

Formation spontanée des structures dans le cortex visuel : Problème de bifurcation avec symétrie

Osman Khodr

Direction : M. Pascal Chossat

M. Bruno Cessac

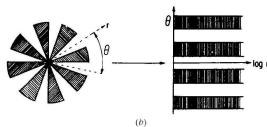
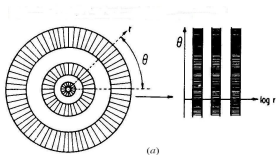
Stage financé par l'INRIA, équipe Odyssée, projet MACACC

19 juin 2008

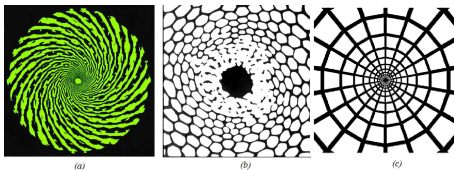
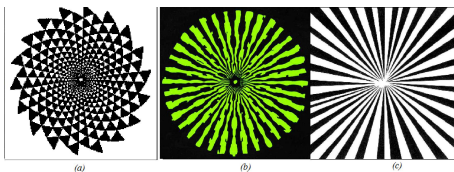
L'application rétinocorticale

(1)-La couche V1 du cortex visuel.

(2)-L'application rétinocorticale : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. $z = \text{Log}(re^{i\theta})$



Hallucinations visuelles



Modèle

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -E + S_e(\alpha_{ee} w_{ee}^{**} E - \alpha_{ie} w_{ie}^{**} I) \equiv G_e(E, I)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -I + S_i(\alpha_{ei} w_{ei}^{**} E - \alpha_{ii} w_{ii}^{**} I) \equiv G_i(E, I)$$

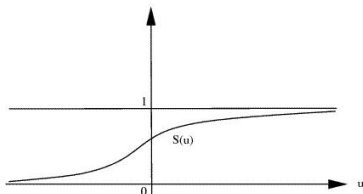
Modèle

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -E + S_e(\alpha_{ee} w_{ee}^{**} E - \alpha_{ie} w_{ie}^{**} I) \equiv G_e(E, I)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -I + S_i(\alpha_{ei} w_{ei}^{**} E - \alpha_{ii} w_{ii}^{**} I) \equiv G_i(E, I)$$

$E, I \in \mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et

$$w_{mn}^{**} z(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} w_{mn}(x - x', y - y') z(x', y') dx' dy'$$



Etats d'équilibre

Formalisme de Ermentrout-Cowan :

$$0 = -E + S_e(\mu w_{ee}^{**} E - \alpha_{ie} w_{ie}^{**} I) \equiv G_e(E, I, \mu)$$

$$0 = -I + S_i(\mu w_{ei}^{**} E - \alpha_{ij} w_{ij}^{**} I) \equiv G_i(E, I, \mu)$$

Etats d'équilibre

Formalisme de Ermentrout-Cowan :

$$0 = -E + S_e(\mu w_{ee}^{**} E - \alpha_{ie} w_{ie}^{**} I) \equiv G_e(E, I, \mu)$$

$$0 = -I + S_i(\mu w_{ei}^{**} E - \alpha_{ij} w_{ij}^{**} I) \equiv G_i(E, I, \mu)$$

Formalisme de Bressloff-Cowan et al :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\alpha a + \mu w^{**} S[a] \equiv G[a, \mu]$$

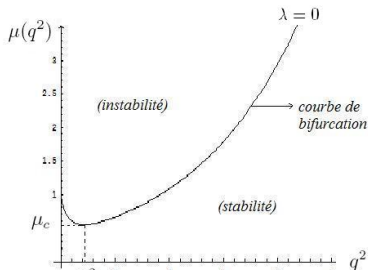
$$w(x^2 + y^2) = 1/\sqrt{2\pi\xi^2} e^{-(x^2+y^2)/2\xi^2} - A/\sqrt{2\pi\hat{\xi}^2} e^{-(x^2+y^2)/2\hat{\xi}^2}$$

Stabilité dans la formalisme de Bressloff-Cowan

Linéarisation dans le modèle de Bressloff-Cowan et al :

$$DG[a, \mu](a) = -\alpha a + \mu s_1 w^{**} a$$

$$DG[a, \mu](a) = (-\alpha + \mu s_1 \hat{w}(k^2 + l^2))a = \lambda(\mu, k^2 + l^2)a$$



Symétrie euclidienne

$$E(2) = O(2) \times \mathbb{R}^2$$

$$g = (r, a) \in E(2), X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, gX = rX + a$$

Symétrie euclidienne

$$E(2) = O(2) \times \mathbb{R}^2$$

$$g = (r, a) \in E(2), X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, gX = rX + a$$

-Opérateur linéaire

$$T_g u(X) = u(g^{-1}X), g \in E(2)$$

Alors G est $E(2)$ -equivariant :

$$T_g G = G T_g, \quad \forall g \in E(2)$$

Restriction sur l'espace des fonctions doublements périodiques

$$DG[0, \mu_c](a) = (-\alpha + \mu_c s_1 \hat{w}(k^2 + l^2))a$$

$$\text{Ker}(DG[0, \mu_c]) = \{\phi(\mu_c, \Omega^2) e^{\langle r\Omega, X \rangle}, X = (x, y) \quad r \in O(2)\}$$

Ω le vecteur d'onde correspondant à μ_c (le plus petit valeur de μ) : $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ deux vecteurs linéairement indépendants :

$$\mathcal{L} = \{L = m_1 \mathbf{l}_1 + m_2 \mathbf{l}_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbf{l}_1 = |\Omega|(1, 0)$$

Restriction sur l'espace des fonctions doublements périodiques

$$DG[0, \mu_c](a) = (-\alpha + \mu_c s_1 \hat{w}(k^2 + l^2))a$$

$$\text{Ker}(DG[0, \mu_c]) = \{\phi(\mu_c, \Omega^2) e^{\langle r\Omega, X \rangle}, X = (x, y) \quad r \in O(2)\}$$

Ω le vecteur d'onde correspondant à μ_c (le plus petit valeur de μ) : $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ deux vecteurs linéairement indépendants :

$$\mathcal{L} = \{L = m_1 \mathbf{l}_1 + m_2 \mathbf{l}_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbf{l}_1 = |\Omega|(1, 0)$$

Definition :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

On dit que f est \mathcal{L} -doublement périodique si $f(X + L) = f(X)$ pour tout $L \in \mathcal{L}$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ } \mathcal{L}\text{-doublement périodique}\} = \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^2)$$

Restriction sur l'espace des fonctions doublements périodiques

Groupe de symétrie restreint : $\Gamma \cong E(2)_{/\Sigma} = H_{\Sigma} \rtimes \mathbb{T}^2$, $H_{\Sigma} = D_n$,
 $n=2,4$ ou 6

D_n engendré par κ et ξ tel que :

$$\kappa(z) = \bar{z} \quad \text{et} \quad \xi(z) = ze^{2i\pi/n}$$

θ est l'angle formé par \mathbf{l}_1 et \mathbf{l}_2 :

(1) Réseau hexagonale : $\theta = \pi/3$, alors $\Gamma = D_6 \times \mathbb{T}^2$

(2) Réseau carré : $\theta = \pi/2$, alors $\Gamma = D_4 \times \mathbb{T}^2$

(3) Réseau rhombique : $0 < \theta < \pi/2$ et $\theta \neq \pi/3$, alors

$\Gamma = D_2 \times \mathbb{T}^2$

Restriction sur l'espace des fonctions doublements periodiques

$$\chi(\mathcal{L}) \equiv \text{Ker}(DG[0, \mu_c]) / \mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\phi(\mu_c, \Omega^2) e^{\langle r\Omega, X \rangle}, \quad r \in D_n\}$$

Restriction sur l'espace des fonctions doublements périodiques

$$\chi(\mathcal{L}) \equiv \text{Ker}(DG[0, \mu_c]) / \mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\phi(\mu_c, \Omega^2) e^{\langle r\Omega, X \rangle}, \quad r \in D_n\}$$

Base de $\chi(\mathcal{L})$ pour le Réseau carré :

$$\psi_1(X) = \phi(\mu_c, \Omega^2) e^{i|\Omega|x}, \quad \psi_2(X) = T_{\xi} \psi_1$$

$$\psi_3(X) = T_{\xi^2} \psi_1 = \overline{\psi_1}, \quad \psi_4(X) = T_{\xi^3} \psi_1 = \overline{\psi_2}$$

Les équations de bifurcation

Technique de Lyapounov-Schimdt Résoudre :

$$G[u, \mu] = DG[0, \mu_c]u + R[u, \mu - \mu_c]$$

$DG[0, \mu_c]$ compact et autoadjoint sur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^2)$ alors

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \ker DG[0, \mu_c] \oplus \operatorname{Im} DG[0, \mu_c]$$

Les équations de bifurcation

Technique de Lyapounov-Schimdt Résoudre :

$$G[u, \mu] = DG[0, \mu_c]u + R[u, \mu - \mu_c]$$

$DG[0, \mu_c]$ compact et autoadjoint sur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^2)$ alors

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \ker DG[0, \mu_c] \oplus \text{Im} DG[0, \mu_c]$$

Soient \mathbf{P} et $\mathbf{Q} = (I - \mathbf{P})$ les projections

$$\mathbf{M} : \mathbf{Q}\mathcal{F}_{\mathcal{G}} \longrightarrow (I - \mathbf{P})\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$$

telque $\mathbf{M}DG(0, \mu_c) = I_d$ identité sur $(I - \mathbf{P})\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$

$u \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$, $u = \psi + \varphi$ où $\psi = \mathbf{P}u$ et $\varphi = (I - \mathbf{P})u$

Les équations de bifurcation

$$\varphi + \mathbf{MQR}(\psi + \varphi, \mu - \mu_c) = 0$$

$$(I - \mathbb{Q})R[\psi + \varphi, \mu - \mu_c] = 0$$

Les équations des bifurcations : $F : \ker DG[0, \mu_c] \rightarrow \ker DG[0, \mu_c]$

$$(I - \mathbb{Q})R(\psi + \varphi(\psi, \mu - \mu_c), \mu - \mu_c) = 0 = F(\psi, \mu)$$

$$\psi = \sum_{j=1}^n z_j \psi_j, z_j = \langle u, \psi_j \rangle \quad \text{et} \quad F = \sum_{j=1}^n F_j \psi_j$$

Les équations de bifurcation

$$\varphi + \mathbf{MQR}(\psi + \varphi, \mu - \mu_c) = 0$$

$$(I - \mathbf{Q})R[\psi + \varphi, \mu - \mu_c] = 0$$

Les équations des bifurcations : $F : \ker DG[0, \mu_c] \rightarrow \ker DG[0, \mu_c]$

$$(I - \mathbf{Q})R(\psi + \varphi(\psi, \mu - \mu_c), \mu - \mu_c) = 0 = F(\psi, \mu)$$

$$\psi = \sum_{j=1}^n z_j \psi_j, z_j = \langle u, \psi_j \rangle \quad \text{et} \quad F = \sum_{j=1}^n F_j \psi_j$$

Definition : x_0 solution du problème de bifurcation, on appelle le sous groupe d'isotopie de x_0 :

$$\Sigma_{x_0} = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x_0 = x_0\}$$

$$\text{Fix}[\Sigma_{x_0}] = \{x \in \mathcal{F} : \sigma x = x \text{ pour tout } \sigma \in \Sigma_{x_0}\}$$

Equivariant branching lemma

Alors pour Σ un sous groupe d'isotopie on a :

$$F : \text{Fix}[\Sigma] \longrightarrow \text{Fix}[\Sigma]$$

Si $\dim \text{Fix}[\Sigma]=1$, on dit que Σ est un sous groupe axial.

Lemme :

$$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

un problème de bifurcation, Γ est un sous groupe compact qui agit d'une façon irréductible sur \mathbb{R}^n . G est Γ -équivariant, (x_0, λ_0) un point d'équilibre avec $\text{Ker } DG[x_0, \lambda_0]$ est non nul. Soit Σ un sous groupe axiale de Γ . Alors, il existe génériquement une branche de solution bifurquante en x_0 d'isotopie Σ .

Exemple

Réseau carré :

$$\psi = z_1 e^{ik_1 X} + z_2 e^{ik_2 X} + c.c.$$

Action du groupe de symétrie sur le réseau carré

D_4	action
I	(z_1, z_2)
ξ	(\bar{z}_2, \bar{z}_1)
ξ^2	(\bar{z}_1, \bar{z}_2)
ξ^3	(z_2, \bar{z}_1)
κ	(z_1, \bar{z}_2)
$\kappa\xi$	(\bar{z}_2, \bar{z}_1)
$\kappa\xi^2$	(\bar{z}_1, z_2)
$\kappa\xi^3$	(z_2, z_1)
$[\theta_1, \theta_2]$	$(z_1 e^{-2i\pi\theta_1}, z_2 e^{-2i\pi\theta_2})$

Exemple

Sous groupe axiales	Vecteurs fixes
$D_4(\kappa, \xi)$	(1,1)
$\mathcal{O}(2) \oplus \mathbf{Z}_2(\kappa)$	(1,0)

TABLE: $\mathcal{O}(2)$ engendré par $(0, \tau_2) \in \mathbb{T}^2$ et rotation d'un angle π

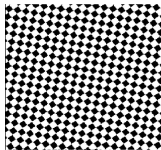
Conséquences : $(\eta = \varepsilon^2(\mu - \mu_c))$

$$u_1(x, y) = \varepsilon \phi(\mu_c, \Omega^2) \sqrt{\frac{-\eta}{A}} \cos(|\Omega|x)$$

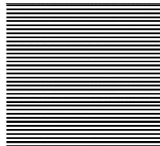
$$u_2(x, y) = \varepsilon \phi(\mu_c, \Omega^2) \sqrt{\frac{-\eta}{B}} \cos(|\Omega|y)$$

$$u_3(x, y) = \varepsilon \phi(\mu_c, \Omega^2) \sqrt{\frac{-\eta}{A+B}} [\cos(|\Omega|x) + \cos(|\Omega|y)]$$

Exemple

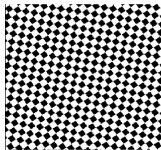


(a)

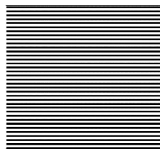


(b)

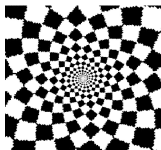
Exemple



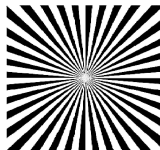
(a)



(b)



(a)



(b)

Le modèle de Bressloff-Cowan avec orientation

Modèle :

$$\frac{\partial a(r, \phi, t)}{\partial t} = -\alpha a(r, \phi, t) + \mu \int_0^\pi \int_{R^2} w(r, \phi/r', \phi') S[a(r', \phi', t)] \frac{dr, d\phi'}{\pi}$$

Le modèle de Bressloff-Cowan avec orientation

Modèle :

$$\frac{\partial a(r, \phi, t)}{\partial t} = -\alpha a(r, \phi, t) + \mu \int_0^\pi \int_{R^2} w(r, \phi/r', \phi') S[a(r', \phi', t)] \frac{dr, d\phi'}{\pi}$$

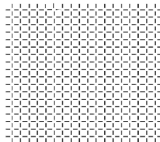
$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^2 \times S^1)$$

On introduit des solutions du ker de la linéarisé pour la petite valeur de bifurcation μ_c

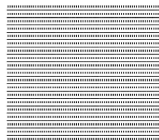
$$a(r, \phi) = u(\phi - \varphi) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\kappa a(r, \phi) = a(\kappa r, -\phi) = u(-\phi) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + c.c.$$

Nouvelles solutions



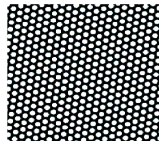
(a)



(b)

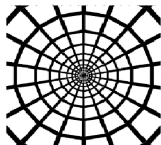


(a)

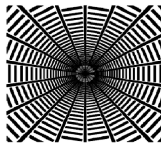


(b)

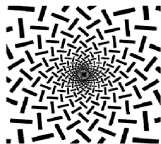
Nouvelles solutions



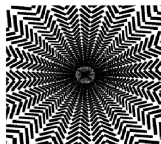
(a)



(b)



(c)



(d)

Introduction d'un nouvelles paramètre géométrique

Prise en compte de la fréquence spatiale

Merci pour votre attention

Questions ?