Processus de Perte de Messages avec Paquets Redondants dans une File M/M/1/K

Multiples Sources

Omar AIT HELLAL

Stage DEA Méthodes Informatiques des Systèmes Industriels
Université de Versailles saint-Quentin-en-Yveline

INRIA Sophia-Antipolis
2004 Route des Lucioles
06902 Sophia-Antipolis Cedex

Directeurs de stage:

Eitan ALTMAN & Alain JEAN-MARIE

Septembre 1995

Je remercie M^r Françoit BACCELLI pour m'avoir accueilli au sein du projet MISTRAL.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Mrs Eitan ALTMAN et Alain JEAN-MARIE pour m'avoir confié ce travail, je les remercie également pour leur disponibilité, l'intérêt, le suivi et les précieux conseils qu'ils m'ont prodigués tout au long du stage.

Mes remerciements vont, également, à tout le personnel du projet MISTRAL ainsi que tous les stagiaires pour leur sympathie.

Enfin, que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à ce travail, trouvent ici mes vifs remerciements.

Contents

1 Introduction

Présentation du stage

Ce stage rentre dans le cadre du Diplôme d'Étude Approfondies Méthodes Informatiques des Systèmes Industriels de l'université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines. Proposé par M^{rs} Eitan ALTMAN et Alain JEAN-MARIE, chargés de recherche à l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique de Sophia-Antipolis, ce stage s'est déroulé en plein temps du 20 Mai au 20 Septembre 1995, il s'intègre dans le projet MISTRAL de l'INRIA dont le responsable est Mr François BACCELLI.

L'objectif du stage est d'étudier la perte de messages avec paquets redondants dans une file M/M/1/K, avec présence de flux exogènes (Multiples sources), le cas d'une seule source a été étudié par Eitan ALTMAN et Alain JEAN-MARIE [2]. En utilisant les fonctions génératrices multidimentionnelles pour résoudre les récursions récemment introduites par Cidon, Khamisy et Sidi [1], pour le calcul des probabilités de perte dans une file M/M/1/K, on espère arriver à une formule analytique permettant d'étudier le comportement de ces probabilités en fonction des différents paramètres et de pouvoir décider à quel moment l'ajout de paquets redondants réduit-il la probabilité de perte. On démontre que pour de faible charge, l'ajout de la redondance réduit les probabilités de perte.

La probabilité de perte de paquets dans les réseaux de files d'attente est une mesure importante de la performance des réseaux de telecommunication et bien d'autres applications. La progression rapide dans le développement de la fibre optique assure un très faible taux d'erreur bit (BER) 10^{-14}, la perte d'information est, alors, due essentiellement à la congestion des noeuds et à la saturation des files d'attente.

Souvent, quand les messages sont divisés en paquets, la perte d'un seul paquet entraine la perte de tout le message et la probabilité de perte de messages contenant n paquet, à ce moment, est la probabilité de perdre au moins un paquet parmi n consécutif. Dans le but de réduire cette probabilité, une idée consiste à ajouter des paquets redondants à chaque message et d'augmenter la charge du système de telle sorte à avoir le taux de messages désirable en réception. On se refère à [4], également, [5] et les références citées dans [1] pour plus de détails sur la manière dont les paquets sont construits pour le recouvrement d'erreurs. Les quantités qui nous intéressent, alors, sont les probabilités de perdre plus d'un paquet (k paquets en général) parmi n consécutifs. Cidon , Khamisy et Sidi ont obtenu une formule récursive pour les calculer numériquement dans une file M/M/1/K. Ces résultats montrent une grande divergence par rapport au probabilités obtenus sous l'hypothèse (distribution binômiale) d'indépendance, l'hypothèse sous la quelle la redondance réduit les probabilités de perte d'un facteur de 10 à 100 [4].

Dans les exemples cités dans [1], les probabilités tendent toujours à être plus grandes quand la redondance est ajoutées. Ceci a poussé E. Altman et A. Jean-Marie [2] à faire des analyses plus profondes et ont montré, ainsi, que dans un trafic sporadique la redondance réduit la probabilité de perte de messages ceci pour le cas d'une seule source. Ce travail vient en complément à ce dernier pour étudier le comportement de ces probabilités, quand on ajoute de la redondance dans le cas de plusieurs sources. L'hypothèse des arrivées poissonniennes n'est pas la plus réaliste, cependant, l'étude de ce cas révèle l'essentiel du comportement de ces probabilités et c'est une première étape pour une généralisation (Erlang, Cox).

Nos objectifs dans ce travail, sont (1) réduire la complexité de calcul des probabilités, (2) obtenir des développement asymptotiques pour n grand, et ρ assez petit, (3) déterminer les conditions sous lesquelles l'ajout de la redondance réduit la probabilité de perte de messages. Les résultats asymptotiques nous permettent d'approximer les probabilités pour n grand et pour ρ assez petit, avec une complexité $O(1)$.

La structure du document est la suivante: Dans la section 2 on décrit le modèle et on présente les résultats essentiels: l'expression de la fonction génératrice. Les preuves sont données dans la section 3. L'analyse du comportement asymptotique est présentée en section 4. Dans la section 5 on montre que dans un régime sporadique l'ajout de la redondance réduit la probabilité de perte de messages. Les exemples numériques illustrant cette réduction de probabilité sont donnés en section 6. Enfin, la section 7 est consacrées à l'étude de la perte de paquets individuels avec paquets redondants, pour montrer que les deux approches donnent les mêmes résultats.

NB: Dans tout le document, nous utiliserons les mêmes notations utilisées dans [1] et [2].

2 Résultats essentiels

Considérons une file M/M/1 de capacité M où les paquets arrivent de S sources indépendantes, et que les durées des interarrivées et de transmission de paquets de chaque source sont mutuellement indépendants. Le processus d'arrivée d'une source S, $s = 1, 2, ..., S$, est considéré poissonnien de paramètre λ_s et par conséquent le processus d'arrivées global dans la file est poissonnien de paramètre $\lambda \stackrel{def}{=} \sum_s^S \lambda_s$. On définit $\rho = \lambda/\mu$, $\rho_s = \lambda_s/\mu = \lambda_s \rho$. Nous résumons la méthode recursive de [1] pour le calcul des $P^s(j,n), s = 1, 2, .., S$, qui sont les probabilités de perte de j paquets parmi n consécutifs provenant de la source s. Pour un système avec un processus d'arrivée poissonnien de paramètre λ et des services exponentiels de paramètre μ, à l'état stationnaire, la probabilité d'avoir i paquets dans le système à un moment arbitraire est donnée par

$$\Pi(i) = \frac{\rho^i}{\sum_{l=0}^M \rho^l} \tag{1}$$

Soit $Q_i(k)$ la probabilité que k paquets parmi i quittent le système durant une interarrivée. alors

$$\begin{aligned} Q_i(k) &= \rho\alpha^{k+1} \qquad 0 \leq k \leq i-1 \\ Q_i(i) &= \alpha^i, \qquad \text{où} \quad \alpha := (1+\rho)^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

2.1 Les récursions [Cidon et al]

On définit $P_i^{s,a}(j,n)$ *resp* $P_i^{\bar{s},a}(j,n)$, $i = 0, 1, ..., M$, $s = 1, 2, ..., S$, $n \geq 1$, $0 \leq j \leq n$, comme les probabilités de perte de j paquets parmi n consécutifs provenant de la source s, sachant qu'il y a i paquets dans le système juste avant l'arrivée du premier paquet du bloc, et *resp* juste avant l'arrivée d'un paquet d'une autre source (notée $\bar{s}$). On a

$$P^s(j,n) = \sum_{i=0}^M \Pi(i) P_i^{s,a}(j,n) \tag{3}$$

La probabilité qu'une arrivée dans le flux global soit de la source s est égale à λ_s/λ. Soit $p_s \stackrel{def}{=} \lambda_s/\lambda$ et $p_{\bar{s}} \stackrel{def}{=} 1 - p_s$. Le schéma récursif est le suivant:

$$P_i^{s,a}(j,1) = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & j \geq 1, \end{cases} \qquad i = 0, 1, ..., M-1 \tag{4}$$

$$P_M^{s,a}(j,1) = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ 0 & j = 0, j \geq 2, \end{cases} \tag{5}$$

Pour $n \geq 2$ on a les équations récursives

$$\begin{aligned} P_i^{s,a}(j,n) &= \sum_{k=0}^{i+1} Q_{i+1}(k) \left[p_s P_{i+1-k}^{s,a}(j,n-1) + p_{\bar{s}} P_{i+1-k}^{\bar{s},a}(j,n-1) \right] \qquad 0 \leq i \leq M-1 \\ P_M^{s,a}(j,n) &= \sum_{k=0}^{M} Q_M(k) \left[p_s P_{M-k}^{s,a}(j-1,n-1) + p_{\bar{s}} P_{M-k}^{\bar{s},a}(j-1,n-1) \right] \end{aligned} \tag{6}$$

où $P_i^{\bar{s},a}(j,n)$ pour $n \geq 1$ est donnée par:

$$\begin{aligned} P_i^{\bar{s},a}(j,n) &= \sum_{k=0}^{i+1} Q_{i+1}(k)\left[p_s P_{i+1-k}^{s,a}(j,n) + p_{\bar{s}} P_{i+1-k}^{\bar{s},a}(j,n)\right] \qquad 0 \leq i \leq M-1 \\ P_M^{\bar{s},a}(j,n) &= P_{M-1}^{\bar{s},a}(j,n) \end{aligned} \tag{7}$$

Le calcul des probabilités se fait comme suit:
Pour calculer la probabilité de perdre j paquets parmi n, on calcul toutes les probabilités intermédiaires. En effet, on commence par calculer les $P_i^{\bar{s},a}(j,1)$ en utilisant les équations (4) et (5). Ceci nous permettra de construire un système d'équations linéaires, ce qui nécessite $O(M^2)$ en complexité de calcul, puis sa résolution ce qui est, également, de complexité $O(M^2)$ du moment que c'est une matrice de Hesenberg, on refait ceci pour tout j et n et ainsi, le tout est de complexité $O(M^2 jn)$ et $O(M^2)$ en espace mémoire (matrice). Les valeurs $P_i^{\bar{s},a}$ qu'on trouve à l'étape k nous permettent de calculer $P_i^{s,a}(j,k+1)$ et inversement, ainsi, les $P_i^{s,a}$ et $P_i^{\bar{s},a}$ se calcule d'une manière alternative.

2.2 Résoudre les récursions: Fonction génératrice

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats essentiels dont les preuves seront données dans la section suivante. On définit

$$q_s(y,z) \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} y^j z^{n-1} P^s(j,n)$$

Soient $x_1(z)$ et $x_2(z)$ les solutions en x de l'équation

$$x^2 - (1+\rho)x + \rho(p_{\bar{s}} + p_s z) = 0$$

i.e.

$$x_1(z) = \frac{1+\rho+\sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho(p_{\bar{s}}+p_s z)}}{2}, \qquad x_2(z) = \frac{1+\rho-\sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho(p_{\bar{s}}+p_s z)}}{2}$$

On écrira plus souvent x_1 et x_2 au lieu de $x_1(z)$ et $x_2(z)$. Ces deux fonctions sont analytiques dans le disque $\{|z| < ((1+\rho)^2 - 4\rho_{\bar{s}})/4\rho_s\}$. On définit, pour tout k, $\delta_k = x_1^k - x_2^k$, $\phi_k = (p_{\bar{s}} + p_s z)\delta_{k-1} - \delta_k$. Soit $R_M = (\sum_{l=0}^{M} \rho^l)^{-1}$

Proposition 2.1. *La fonction génératrice de probabilité q_s est donnée par*

$$q_s(y,z) = \frac{R_M}{(1-z)}\left(R_M^{-1} + \frac{\rho^{M-1}\delta_{M+1}}{z\phi_M} + \frac{\rho^{M-1}(1-z)\left[\delta_{M+1}\right]^2}{z\phi_M}\left[\frac{1}{z\delta_M - \delta_{M+1} - \rho z \phi_M y}\right]\right) \tag{8}$$

2.3 Perte de plus de j paquets parmi n

Une fois la fonction génératrice est obtenue, les probabilités $P^s(j,n)$ sont calculées en inversant q_s. Nous nous intéressons essentiellement à $P_\rho^s(>j,n)$, qui est la probabilité de perdre plus de j paquets parmi n consécutifs provenant de la source s. On se focalise plus particulièrement sur les cas où $j = 0,1$, pour être en mesure de décider quand l'ajout d'un paquet redondant à chaque message réduit la probabilité de perte.

Nous utiliserons la notation $\left[z^k\right] f(z)$ pour désigner le coefficient de z^k dans le développement de Taylor de la fonction $f(z)$: *si* $f(z) = \sum_k f_k z^k$ *alors* $\left[z^k\right] f(z) = f_k$. On définit également

$$c_j = \begin{cases} -\frac{2(2j-2)!}{4^j(j-1)!j!} & \text{si } j \geq 1 \\ \\ 1 & \text{si } j = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Les c_j sont les coefficients $[u^j]\sqrt{1-u}$.

Corollaire 2.1. *La probabilité de perdre plus de j paquets parmi n consécutifs provenant de la source s est*

$$P_\rho^s(> j, n) = R_M \rho^{M+j} \left[z^{n-1-j}\right] \frac{1}{z-1} \left[\frac{\delta_{M+1}}{z\delta_M - \delta_{M+1}}\right] \left(\frac{\phi_M}{z\delta_M - \delta_{M+1}}\right)^j \tag{10}$$

2.4 Calcul des probabilités

Dans ce qui suit nous obtenons une récursion assez simple, sur n, pour le calcul de $P_\rho^s(> 0, n)$ et plus généralement $P_\rho^s(> j, n)$. Nous éliminerons ainsi la récursion sur j et la résolution d'un système d'équations linéaires de taille M, pour le calcul des $P_i^{\bar{s}}(j, n)$, requis dans [1].

On définit β, γ et θ tels que

$$x_i = \frac{1}{2}\left(\gamma \pm \beta\sqrt{1-\theta z}\right)$$

i.e.

$$\gamma = 1 + \rho, \quad \beta = \sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho_{\bar{s}}}, \quad \theta = \frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2 - 4\rho_{\bar{s}}} \tag{11}$$

Soient

$$G = \begin{cases} \frac{M}{2} - 1 & \text{si M est pair} \\ \\ \frac{M-1}{2} & \text{sinon,} \end{cases} \qquad a_n = \begin{cases} (-\theta)^n \sum_{k=n}^{G+1} \binom{M+1}{2k+1} \binom{k}{n} \beta \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{2k} & \text{si } n \leq G+1 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} (-\theta)^{n-1} \sum_{k=n}^{G+1} \binom{M+1}{2k+1} \binom{k}{n} \left(\frac{4\gamma\,(2k+1)\,n}{\beta\,(M+1)\,(M+1-2k)} + \theta\beta\right) \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{2k} & \text{si } n \leq G+1 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{12}$$

Corollaire 2.2. *Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$P_\rho^s(> 0, n) = R_M \rho^M + \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_{n-k} P_\rho^s(> 0, k) + R_M \rho^M a_k\right) \tag{13}$$

Pour $j < n$, $n \geq 1$ on a

$$P_\rho^s(> j, n) \quad = \quad \frac{(-1)^j}{A_{j+1,0}} \left[\sum_{k=j}^{n-2} H_{j+1,n-1-k} P_\rho^s(> j, k+1) + R_M \rho^M \sum_{k=0}^{n-j-1} R_{j,k}\right] \tag{14}$$

où

$$H_{k,n} = \sum_{r=0}^{k}\sum_{m=r}^{n} \left(\begin{array}{c} k \\ r \end{array}\right) (-1)^{k-r} A_{k-r,n-m} B_{r,m-r}$$

et

$$R_{k,n} == \sum_{r=0}^{k}\sum_{m=0}^{n} \left(\begin{array}{c} k \\ r \end{array}\right) (-1)^{k-r} A_{k-r+1,n-m} B_{r,m}$$

avec

$$A_{k,n} \quad = [z^n]\,(\delta_{M+1})^k = \sum_{m=0}^{n}\sum_{r=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ r \end{array}\right) (-1)^{k-r} a'_{r(M+1),m} b'_{(k-r)(M+1),n-m}$$

$$B_{k,n} \quad = [z^n]\,(\delta_{M})^k = \sum_{m=0}^{n}\sum_{r=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ r \end{array}\right) (-1)^{k-r} a'_{rM,m} b'_{(k-r)M,n-m}$$

et

$$a'_{k,n} \quad = \theta^n \left(\tfrac{\gamma}{2}\right)^k \sum_{r=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ r \end{array}\right) \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^r \frac{\Gamma(n-r/2)}{n!\Gamma(-r/2)}$$

$$b'_{k,n} \quad = \theta^n \left(\tfrac{\gamma}{2}\right)^k \sum_{r=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ r \end{array}\right) \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right)^r \frac{\Gamma(n-r/2)}{n!\Gamma(-r/2)}$$

Pour le calcul des $P^s_\rho(>0,n)$, on calcule les termes a_k et b_k, $k = 0\cdots n$ ce qui est de complexité $\mathrm{O}(Mn)$ puis, la somme qui n'est autre qu'une récursion sur n de complexité $\mathrm{O}(n^2)$ et $O(M^2)$ en espace mémoire si on considère que toutes les combinaisons sont dans une table en mémoire. C'est une amélioration nette par rapport à $O(M^2n)$ en complexité de calcul, et $O(M^2)$ en espace mémoire requis dans [1].

Pour $j>0$, on procède de la même manière; On calcule les termes $a'_{k,m}$, $b'_{k,m}$ $k = M+1\cdots j(M+1)$, $m = 0\cdots n$ ce qui est de complexité $\mathrm{O}(Mnj^2)$, on calcule ensuite, les termes $A_{k,m}$, $B_{k,m}$ $k = 1\cdots j$, $m = 0\cdots n$ de complexité $\mathrm{O}(j^2n^2)$ pour ensuite, calculer les termes $H_{j+1,m}$ et $R_{j,m}$, $m = 0,\cdots,n$ ce qui est de complexité $O(jn^2)$. Enfin, les probabilités se calculent à partir de (14) qui est d'une complexité $\mathrm{O}(n^2)$ et ainsi la procédure est de complexité $\mathrm{O}(j^2n^2 + Mnj^2)$ et un $O(M^2j^2)$ en espace mémoire si on considère, également, que toutes les combinaisons $\left(\begin{array}{c} Mj \\ r \end{array}\right)$ sont en mémoire. C'est une amélioration en complexité de calcul quand $n \le M$, par rapport à ce qui est requis dans[1], à savoir, $O(M^2nj)$ en complexité de calcul. Bien qu'on perd en espace mémoire.

3 Preuve des résultats

Preuve de la proposition 2.1: Soient

$$\pi^s_{j,n}(x) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{M} x^i P^{s,a}_i(j,n), \qquad \pi^{\bar{s}}_{j,n}(x) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{M} x^i P^{\bar{s},a}_i(j,n),$$

$$\Phi^{s\bar{s}}_{j,n}(x) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{M} x^i \left[p_s P^{s,a}_i(j,n) + p_{\bar{s}} P^{\bar{s},a}_i(j,n)\right], \qquad n \ge 1,\ j \ge 0$$

Il découle de (6) que

$$\pi^s_{j,n}(x) = \sum_{i=0}^{M-1} x^i \sum_{k=0}^{i+1} Q_{i+1}(k) \left[p_s P^{s,a}_{i+1-k}(j,n-1) + p_{\bar{s}} P^{\bar{s},a}_{i+1-k}(j,n-1)\right]$$
$$+x^M \sum_{k=0}^{M} Q_M(k) \left[p_s P^{s,a}_{M-k}(j-1,n-1) + p_{\bar{s}} P^{\bar{s},a}_{M-k}(j-1,n-1)\right]$$

En substituant (2) et avec l'introduction de $\Phi^{s\bar{s}}_{j,n}(x)$ on utilise, également, le fait que $\Phi^{s\bar{s}}_{j,n}(0) = p_s P^{s,a}_0(j,n) + p_{\bar{s}} P^{\bar{s},a}_0(j,n)$, on obtient pour $n \geq 2$, $j \geq 1$

$$\begin{aligned}
\pi^s_{j,n}(x) &= \sum_{i=0}^{M-1} x^i \left(\sum_{k=0}^{i} \rho\alpha^{k+1} \left[p_s P^{s,a}_{i+1-k}(j,n-1) + p_{\bar{s}} P^{\bar{s},a}_{i+1-k}(j,n-1)\right] \right. \\
&\quad \left. +\alpha^{i+1} \left[p_s P^{s,a}_0(j,n-1) + p_{\bar{s}} P^{\bar{s},a}_0(j,n-1)\right]\right) \\
&\quad +x^M \left(\sum_{k=0}^{M-1} \rho\alpha^{k+1} \left[p_s P^{s,a}_{M-k}(j-1,n-1) + p_{\bar{s}} P^{\bar{s},a}_{M-k}(j-1,n-1)\right] \right. \\
&\quad \left. +\alpha^M \left[p_s P^{s,a}_0(j-1,n-1) + p_{\bar{s}} P^{\bar{s},a}_0(j-1,n-1)\right]\right) \\
&= \frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x} \left(\frac{1}{\alpha x} \Phi^{s\bar{s}}_{j,n-1}(x) - (\alpha x)^M \Phi^{s\bar{s}}_{j,n-1}(\alpha^{-1}) \right) \\
&\quad -\frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x} \left(\frac{1}{\alpha x} - (\alpha x)^M \right) \Phi^{s\bar{s}}_{j,n-1}(0) + \alpha \frac{1-(\alpha x)^M}{1-\alpha x} \Phi^{s\bar{s}}_{j,n-1}(0) \\
&\quad +\alpha\rho(\alpha x)^M \Phi^{s\bar{s}}_{j-1,n-1}(\alpha^{-1}) + \alpha(\alpha x)^M \Phi^{s\bar{s}}_{j-1,n-1}(0). \qquad (15)
\end{aligned}$$

De l'équation (7), nous obtenons de la même manière $\pi^{\bar{s}}_{j,n}(x)$. Après substitution de (2) et l'introduction de $\Phi^{s\bar{s}}_{j,n}(x)$, on a pour $n \geq 1$, $j \geq 0$

$$\begin{aligned}
\pi^{\bar{s}}_{j,n}(x) &= \frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x} \left(\frac{1}{\alpha x} \Phi^{s\bar{s}}_{j,n}(x) - (\alpha x)^M \Phi^{s\bar{s}}_{j,n}(\alpha^{-1}) \right) \\
&\quad -\frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x} \left(\frac{1}{\alpha x} - (\alpha x)^M \right) \Phi^{s\bar{s}}_{j,n}(0) + \alpha \frac{1-(\alpha x)^M}{1-\alpha x} \Phi^{s\bar{s}}_{j,n}(0) \\
&\quad +\alpha\rho(\alpha x)^M \Phi^{s\bar{s}}_{j,n}(\alpha^{-1}) + \alpha(\alpha x)^M \Phi^{s\bar{s}}_{j,n}(0). \qquad (16)
\end{aligned}$$

Nous définissons, avec un abus de notation, les fonctions génératrices de $P^{s,a}_i(j,n)$ *resp* $P^{\bar{s},a}_i(j,n)$

$$\pi^s(x,y,z) \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y^j z^{n-1} \pi^s_{j,n}(x), \qquad resp \qquad \pi^{\bar{s}}(x,y,z) \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y^j z^{n-1} \pi^{\bar{s}}_{j,n}(x)$$

Nous définissons également, avec un abus de notation, la fonction génératrice des probabilités $\left(p_s P_i^{s,a}(j,n) + p_{\bar{s}} P_i^{\bar{s},a}(j,n)\right)$

$$\Phi^{s\bar{s}}(x,y,z) \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} y^j z^{n-1} \Phi^{s\bar{s}}_{j,n}(x) = p_s \pi^s(x,y,z) + p_{\bar{s}} \pi^{\bar{s}}(x,y,z) \tag{17}$$

Quand y et $|z| < 1$ sont fixés, les trois fonctions sont des polynômes en x et par conséquent analytiques. Dans le but d'utiliser l'équation (15), qui n'est valable que pour $n \geq 2$ et $j \geq 1$, Nous remarquons que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} y^j z^{n-1} \pi^s_{j,n}(x) &= \pi^s(x,y,z) - \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}\pi^s_{0,n}(x) - \sum_{j=0}^{\infty} y^j \pi^s_{j,1}(x) + \pi^s_{0,1}(x) \\ &= \pi^s(x,y,z) - \pi^s(x,0,z) - \pi^s(x,y,0) + \pi^s(x,0,0).\end{aligned}$$

De (4) et (5) on déduit

$$\pi^s(x,0,0) = \frac{1-x^M}{1-x} \tag{18}$$

et

$$\pi^s(x,y,0) = \frac{1-x^M}{1-x} + yx^M \tag{19}$$

Dans (18) et (19), aussi bien que dans tout le reste, on considère que pour $x = 1$ et pour tout M, $(1-x^M)/(1-x) = M$ ($R_M = 1/(M+1)$ pour $\rho = 1$). De (15), après substitution de (17), on obtient

$$\begin{aligned}\pi^s(x,y,z) - \pi^s(x,0,z) &= yx^M + \frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x}\frac{1}{\alpha x} z\left[\Phi^{s\bar{s}}(x,y,z) - \Phi^{s\bar{s}}(x,0,z)\right] \\ &\quad - \frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x}(\alpha x)^M z\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},y,z) - \Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},0,z)\right] \\ &\quad - \frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x}\left(\frac{1}{\alpha x} - (\alpha x)^M\right) z\left[\Phi^{s\bar{s}}(0,y,z) - \Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)\right] \\ &\quad + \alpha\frac{1-(\alpha x)^M}{1-\alpha x} z\left[\Phi^{s\bar{s}}(0,y,z) - \Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)\right] \\ &\quad + \alpha\rho(\alpha x)^M zy\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},y,z) + \Phi^{s\bar{s}}(0,y,z)\right] \\ &= yx^M + \frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x}\frac{1}{\alpha x} z\left[\Phi^{s\bar{s}}(x,y,z) - \Phi^{s\bar{s}}(x,0,z)\right] \\ &\quad + \rho\alpha(\alpha x)^M\left(y - \frac{\alpha}{1-\alpha x}\right) z\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},y,z) + \frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},0,z)\right] \\ &\quad + \frac{\rho\alpha^2(\alpha x)^M}{1-\alpha x} z\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},0,z) + \frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)\right] \\ &\quad + \left(\frac{-\rho\alpha^2}{1-\alpha x}\frac{1}{\alpha x} + \frac{\alpha}{1-\alpha x}\right) z\left[\Phi^{s\bar{s}}(0,y,z) - \Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)\right]\end{aligned} \tag{20}$$

de même de (16), après substitution de (17), on obtient

$$\begin{aligned}\pi^{\bar{s}}(x,y,z) &= \frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x}\frac{1}{\alpha x}\Phi^{s\bar{s}}(x,y,z)+\frac{\alpha^2(x-\rho)}{(1-\alpha x)\alpha x}\Phi^{s\bar{s}}(0,y,z)\\ &\quad+\rho\alpha(\alpha x)^M\left(1-\frac{\alpha}{1-\alpha x}\right)\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},y,z)+\frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},0,z)\right] \qquad (21)\end{aligned}$$

En remarquant que $\alpha+\rho\alpha=1$, on déduit facilement de (21) et (17) que

$$\pi^{\bar{s}}(\rho,y,z)=\Phi^{s\bar{s}}(\rho,y,z)=\pi^s(\rho,y,z) \qquad (22)$$

Ce qui implique que les probabilités prises aux instants d'arrivée des paquets de la source s sont les mêmes si elles sont prises aux instants d'arrivée des paquets des autres sources, ce qui est du à l'état stationnaire des chaines de Markov.

De (3), il en découle que pour obtenir $q_s(y,z)$, il suffit seulement d'obtenir $\pi^s(x,y,z)$ pour $x=\rho$ puisque

$$q_s(y,z)=R_M\pi^s(\rho,y,z) \qquad (23)$$

de (20) et (22) on a

$$\begin{aligned}\left[\pi^s(\rho,y,z)-\pi^s(\rho,0,z)\right](1-z) &= y\rho^M\\ &\quad+z(y-1)(\rho\alpha)^{M+1}\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},y,z)-\Phi^{s\bar{s}}(0,y,z)\right]\\ &\quad+z(\rho\alpha)^{M+1}\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},0,z)-\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)\right] \qquad (24)\end{aligned}$$

Dans le but d'obtenir $\pi^s(\rho,y,z)$ il suffit de calculer les termes entre crochets et $\pi^s(\rho,0,z)$. Pour ce faire, on calcule $\pi^s_{0,n}$ en procédant de la même manière que dans (15), puisque $P_M^{s,a}(0,n)=0$ on a

$$\begin{aligned}\pi^s_{0,n} = &\frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x}\frac{1}{\alpha x}\Phi^{s\bar{s}}_{0,n-1}(x)-\frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x}(\alpha x)^M\Phi^{s\bar{s}}_{0,n-1}(\alpha^{-1})\\ &+\alpha\frac{1-(\alpha x)^M}{1-\alpha x}\Phi^{s\bar{s}}_{0,n-1}(0)-\frac{\rho\alpha^2}{1-\alpha x}\left(\frac{1}{\alpha x}-(\alpha x)^M\right)\Phi^{s\bar{s}}_{0,n-1}(0)\end{aligned}$$

En prenant la fonction génératrice des deux côtés et en substituant (18), on peut écrire

$$\begin{aligned}(1-\alpha x)\alpha x\pi^s(x,0,z) &= \frac{1-x^M}{1-x}(1-\alpha x)\alpha x+\rho\alpha^2 z\Phi^{s\bar{s}}(x,0,z)\\ &\quad-\rho\alpha^2(\alpha x)^{M+1}z\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},0,z)+\frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)\right]\\ &\quad+\alpha^2(x-\rho)z\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z) \qquad (25)\end{aligned}$$

Pour $x=\rho$, en substituant(22), il en découle immédiatement que

$$(1-z)\pi^s(\rho,0,z)={R_{M-1}}^{-1}-(\rho\alpha)^{M+1}z\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},0,z)+\frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)\right] \qquad (26)$$

de (17), (20) et (21) on a

$$
\begin{aligned}
&\Big((1-\alpha x)\,\alpha x-\rho\alpha^2\,(p_{\bar{s}}+p_s z)\Big)\left[\Phi^{s\bar{s}}(x,y,z)-\Phi^{s\bar{s}}(x,0,z)\right] \\
&\qquad = p_s(1-\alpha x)\alpha y x^{M+1} \\
&\qquad\quad +\rho\alpha(\alpha x)^{M+1}\left[p_{\bar{s}}\alpha\,(\rho-x)+(y\,(1-\alpha x)-\alpha)\,p_s z\right]\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},y,z)+\frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(0,y,z)\right] \\
&\qquad\quad +\rho\alpha^2(\alpha x)^{M+1}\left(p_{\bar{s}}(x-\rho)+p_s z\right)\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},0,z)+\frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)\right] \\
&\qquad\quad +\left(p_{\bar{s}}+p_s z\right)\Big(\alpha^2(x-\rho)\Big)\left[\Phi^{s\bar{s}}(0,y,z)-\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)\right] \qquad (27)
\end{aligned}
$$

également de (17), (21) pour $y=0$ et (25) on obtient

$$
\begin{aligned}
&\Big((1-\alpha x)\,\alpha x-\rho\alpha^2\,(p_{\bar{s}}+p_s z)\Big)\,\Phi^{s\bar{s}}(x,0,z) \\
&\qquad = \frac{1-x^M}{1-x}(1-\alpha x)\alpha x p_s \\
&\qquad\quad +\rho\alpha^2(\alpha x)^{M+1}\left(p_{\bar{s}}(x-\rho)+p_s z\right)\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},0,z)+\frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)\right] \\
&\qquad\quad +\alpha^2(x-\rho)\left(p_{\bar{s}}+p_s z\right)\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z) \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Pour $i=1,2$, quand $x=x_i(z)$, le terme gauche de l'équation (28) s'annule et comme $\Phi^{s\bar{s}}(x,0,z)$ est un polynôme en x, donc analytique, on obtient deux équations avec deux inconnues: $\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)$ et $\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},0,z)+\frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)\right]$. En résolvant ces deux équations on obtient

$$
\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},0,z)+\frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)=p_s\frac{\alpha^{-(M+1)}(x_1^M-x_2^M)}{x_2^M(x_2-\rho_{\bar{s}})(x_1-\rho)-x_1^M(x_1-\rho_{\bar{s}})(x_2-\rho)} \qquad (29)
$$

et

$$
\Phi^{s\bar{s}}(0,0,z)=\frac{\rho_s}{(x_1-\rho)(x_2-\rho)}\left[-1+x_1^M+\frac{\rho_s x_1^M(x_1-\rho_{\bar{s}})(x_2-\rho)(x_1^M-x_2^M)}{x_2^M(x_2-\rho_{\bar{s}})(x_1-\rho)-x_1^M(x_1-\rho_{\bar{s}})(x_2-\rho)}\right] \qquad (30)
$$

De même pour l'équation (27), pour chaque $i=1,2,$, quand $x=x_i(z)$, le terme gauche disparaît, $\Phi^{s\bar{s}}(x,y,z)$ également analytique en x. En substituant (29) et (30) dans (27), pour $x=x_i(z)$, on obtient deux équations avec deux inconnues $\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},y,z)+\frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(0,y,z)\right]$ et $\Phi^{s\bar{s}}(0,y,z)$. En résolvant ces deux équations on obtient

$$
\begin{aligned}
&\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},y,z)+\frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(0,y,z)= \\
&\qquad p_s\frac{\alpha^{-(M+1)}\Big(x_1^M(y(x_2-\rho)-1)-x_2^M(y(x_1-\rho)-1)\Big)}{x_1^M(x_2-\rho)\left[x_1(1-yx_2)-\rho_{\bar{s}}(1-y)\right]-x_2^M(x_1-\rho)\left[x_2(1-yx_2)-\rho_{\bar{s}}(1-y)\right]} \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Substituant (26),(29) et (31) dans (24), nous donne finalement

$$\begin{aligned}
&(1-z)\pi^s(\rho,y,z)\\
&= y\rho^M + R_{M-1}^{-1} + z(y-1)(\rho\alpha)^{M+1}\left[\Phi^{s\bar{s}}(\alpha^{-1},y,z) + \frac{1}{\rho}\Phi^{s\bar{s}}(0,y,z)\right]\\
&= y\rho^M + R_{M-1}^{-1}\\
&\quad + \frac{p_s z(y-1)\rho^{M+1}\left(x_1^M(y(x_2-\rho)-1) - x_2^M(y(x_1-\rho)-1)\right)}{x_1^M(x_2-\rho)\left[x_1(1-yx_2)-\rho_{\bar{s}}(1-y)\right] - x_2^M(x_1-\rho)\left[x_2(1-yx_2)-\rho_{\bar{s}}(1-y)\right]} \qquad (32)
\end{aligned}$$

Après l'introduction des notations ϕ_m et δ_m, en remarquant également les relations suivantes: $x_1x_2 = p_{\bar{s}} + p_s z$, $x_1 + x_2 = 1+\rho$, $\rho_s(1-z) = (x_i-\rho)(x_i-1)$, $i=1,2$. Particulièrement $\rho\phi_M = \delta_M - \delta_{M+1}$ puisque

$$\begin{aligned}
\delta_{M+1} = x_1^{M+1} - x_2^{M+1} &= x_1^{M-1}[\alpha^{-1}x_1 - \rho(p_{\bar{s}}+p_s z)] - x_2^{M-1}[\alpha^{-1}x_2 - \rho(p_{\bar{s}}+p_s z)]\\
&= \alpha^{-1}\delta_M - \rho(p_{\bar{s}}+p_s z)\delta_{M-1} = \delta_M - \rho\phi_M;
\end{aligned}$$

la proposition, enfin, découle de (23).

Preuve du corollaire 2.1:

$$\begin{aligned}
P_\rho^s(>j,n) &= R_M\left[z^{n-1}\right]\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[y^k\right]\pi^s(\rho,y,z)\\
&= R_M\left[z^{n-1}\right]\frac{\rho^{M-1}}{z\phi_M}\frac{\left[\delta_{M+1}\right]^2}{\left[z\delta_M-\delta_{M+1}\right]}\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\frac{\rho z\phi_M}{z\delta_M-\delta_{M+1}}\right)^k\\
&= R_M\left[z^{n-1}\right]\rho^M\left[\frac{\delta_{M+1}}{z\delta_M-\delta_{M+1}}\right]^2\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\frac{\rho z\phi_M}{z\delta_M-\delta_{M+1}}\right)^{k-1}\\
&= R_M\left[z^{n-1}\right]\rho^M\left[\frac{\delta_{M+1}}{z\delta_M-\delta_{M+1}}\right]^2\left(\frac{\rho z\phi_M}{z\delta_M-\delta_{M+1}}\right)^j\frac{1}{1-\dfrac{\rho z\phi_M}{z\delta_M-\delta_{M+1}}}
\end{aligned}$$

l'équation (10) est obtenue en notant que

$$z\delta_M - \delta_{M+1} - \rho z\phi_M = z(\delta_M - \rho\phi_M) - \delta_{M+1} = z\delta_{M+1} - \delta_{M+1} = -(1-z)\delta_{M+1}$$

Preuve du corollaire 2.2: De l'équation (10), on déduit

$$(z\delta_M - \delta_{M+1})^{j+1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}P_\rho^s(>j,n)\right) = -R_M\rho^M\frac{1}{1-z}\delta_{M+1}(\rho z\phi_M)^j \qquad (33)$$

en particulier, pour $j=0$, en cherchant le coefficient de $\left[z^{n-1}\right]$ des deux cotés de (33), sachant que $\left[z^{n-1}\right]f(z)/(1-z) = \sum_{k=0}^{n}\left[z^k\right]f(z)$, on aura

$$\left[z^{n-1}\right](z\delta_M-\delta_{M+1})\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}P_\rho^s(>0,n)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[z^{n-1-k}\right](z\delta_M-\delta_{M+1})\,P_\rho^s(>0,k+1)$$

$$\begin{aligned} &= \left[z^0\right](z\delta_M - \delta_{M+1})\, P^s_\rho(>0,n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1}\left[z^{n-k}\right](z\delta_M - \delta_{M+1})\, P^s_\rho(>0,k) \\ &= -R_M\rho^M\left[z^0\right]\delta_{M+1} - R_M\rho^M\sum_{k=1}^{n-1}\left[z^k\right]\delta_{M+1} \end{aligned}$$

l'équation (13) est obtenue en remarquant que a_n *resp* b_n défini dans (12) sont les coefficients $[z^n]\left(\frac{\gamma}{2}\right)^M\frac{1}{\sqrt{1-\theta z}}\delta_{M+1}$ *resp* $[z^n]\left(\frac{\gamma}{2}\right)^M\frac{1}{\sqrt{1-\theta z}}(z\delta_M - \delta_{M+1})$ et que $[z^0]\left(\frac{\gamma}{2}\right)^M\frac{1}{\sqrt{1-\theta z}}(z\delta_M - \delta_{M+1}) = [z^0]\left(\frac{\gamma}{2}\right)^M\frac{-1}{\sqrt{1-\theta z}}\delta_{M+1} = -a_0$.

De la même façon, pour $j > 0$, on a

$$\left[z^{n-1}\right](z\delta_M - \delta_{M+1})^{j+1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}P^s_\rho(>j,n)\right) = -R_M\rho^M\sum_{k=0}^{n-j-1}\left[z^k\right]\delta_{M+1}(\delta_M - \delta_{M+1})^j \tag{34}$$

et

$$\begin{aligned} \left[z^{n-1}\right](z\delta_M - \delta_{M+1})^{j+1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}P^s_\rho(>j,n)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[z^{n-1-k}\right](z\delta_M - \delta_{M+1})^{j+1}P^s_\rho(>j,k+1) \\ = (-1)^{j+1}\left[z^0\right]\delta_{M+1}{}^{j+1}P^s_\rho(>j,n) &+ \sum_{k=j}^{n-2}\left[z^{n-1-k}\right](z\delta_M - \delta_{M+1})^{j+1}P^s_\rho(>j,k+1) \\ = (-1)^{j+1}\left[z^0\right]\delta_{M+1}{}^{j+1}P^s_\rho(>j,n) &+ \sum_{k=0}^{n-2}H_{j+1,n-1-k}P^s_\rho(>j,k+1) \end{aligned}$$

ainsi que

$$-R_M\rho^M\sum_{k=0}^{n-j-1}\left[z^k\right]\delta_{M+1}(\delta_M - \delta_{M+1})^j = -R_M\rho^M\sum_{k=0}^{n-j-1}R_{j,k}$$

L'équation (14) découle de (34) en posant $H_{j+1,n} = [z^n](z\delta_M - \delta_{M+1})^{j+1}$ et $R_{j,n} = [z^n]\delta_{M+1}(\delta_M - \delta_{M+1})^j$, et en remarquant que $P^s_\rho(>j,n) = 0,$ pour $j \geq n$.

$$H_{j+1,n} = \sum_{k=0}^{j+1}\sum_{m=k}^{n}\begin{pmatrix} j+1 \\ k \end{pmatrix}(-1)^{j+1-k}\left[z^{m-k}\right]\delta_M^k\left[z^{n-m}\right]\delta_{M+1}^{j+1-k}$$

et ainsi $H_{k,n}$ et $R_{k,n}$ sont obtenues en fonction de $A_{k,n}$ et $B_{k,n}$ par le binôme de Newton.

$$\begin{aligned} A_{k,n} &= [z^n](\delta_{M+1})^k = [z^n](x_1^{M+1} - x_2^{M+1})^k \\ &= \sum_{r=0}^{k}\begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix}(-1)^{k-r}[z^n]\,x_1^{r(M+1)}x_2^{(k-r)(M+1)} \\ &= \sum_{r=0}^{k}\sum_{m=0}^{n}\begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix}(-1)^{k-r}[z^m]\,x_1^{r(M+1)}\left[z^{n-m}\right]x_2^{(k-r)(M+1)} \end{aligned}$$

$B_{k,n} = [z^n](\delta_M)^k$ est obtenu de la même manière. $a'_{k,n}$ *resp* $b'_{k,n}$ du corollaire 2.2 sont en fait, les coefficients $[z^n]\, x_1^k$ et *resp* $[z^n]\, x_2^k$

4 Comportement asymptotique

Dans cette section, nous allons essayer d'obtenir un développement asymptotique pour approximation de $P_\rho^s(> j, n)$ $j = 0, 1$ pour de larges n et M et un développement quand ρ est très petit. Une fois obtenues, ces expressions nous permettront de conclure que pour certaines valeurs de n, quand ρ est suffisamment grand ou suffisamment petit, l'ajout de la redondance réduit nettement la probabilité de perte de messages.

4.1 Pour de larges n (longueur des messages $n \to \infty$)

La difficulté d'avoir une expression directe pour le calcul des $P_\rho^s(> j, n)$, nous pousse à faire les approximations suivantes:

De (10) on déduit que

$$\begin{aligned} P_\rho^s(> j, n) &= -R_M \rho^M \left[z^{n-1}\right] \frac{1}{1-z} \frac{x_1^{M+1}}{x_1^M (z - x_1)} \left(\frac{z x_1^M (1 - x_1)}{x_1^M (z - x_1)} \right)^j + \left[z^{n-1}\right] f_j(z) \\ &= -R_M \rho^M \left[z^{n-1}\right] \frac{1}{1-z} \left(\frac{\rho_{\bar{s}}}{x_1 - \rho_{\bar{s}}} + \frac{1}{1 - x_1} \right) \left(x_2 - \frac{\rho_{\bar{s}}(x_1 - \rho)}{x_1 - \rho_{\bar{s}}} \right)^j + \left[z^{n-1}\right] f_j(z) \end{aligned}$$

en particulier, pour $j = 0, 1$, on a

$$\begin{aligned} P_\rho^s(> 0, n) &= -R_M \rho^M \left[z^{n-1}\right] \frac{1}{(1-z)} \frac{x_1}{z - x_1} + \left[z^{n-1}\right] f_0(z) \\ &= \tilde{p}_\rho^s(> 0, n) + \left[z^{n-1}\right] f_0(z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_\rho^s(> 1, n) &= -R_M \rho^M \left[z^{n-1}\right] \frac{1}{(1-z)} \frac{x_1}{z - x_1} \left(x_2 - \frac{\rho_{\bar{s}}(x_1 - \rho)}{x_1 - \rho_{\bar{s}}} \right) + \left[z^{n-1}\right] f_1(z) \\ &= \tilde{p}_\rho^s(> 1, n) + \left[z^{n-1}\right] f_1(z) \end{aligned}$$

Une forte intuition nous laisse supposer que les termes $\left[z^{n-1}\right] f_0(z) \cong O(p_{\bar{s}}^{M+1-n} p_s^n)$ et $\left[z^{n-1}\right] f_1(z)$ sont suffisamment petits pour qu'ils soient négligés quand $n < M$ et n'influent, donc, pas sur les résultats pour les développements asymptotiques en n. Néanmoins une preuve formelle reste toujours à élaborer, ce qu'on essayera de faire très prochainement. Pour ces raisons, on considère que

$$P_\rho^s(> 0, n) \cong \tilde{p}_\rho^s(> 0, n) \quad \text{et } P_\rho^s(> 1, n) \cong \tilde{p}_\rho^s(> 1, n)$$

et on cherche les développements asymptotiques en n pour $\tilde{P}_\rho^s(> j, n)$, on montre par des exemples numériques que c'est une excellente approximation pour $P_\rho^s(> j, n)$ même pour des valeur modérées de n et M $(n < M)$.

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^s_\rho(>0,n) &= \frac{R_M\rho^M}{2(1-\rho_{\bar{s}})}\left[z^{n-1}\right]\left[\frac{1}{(1-z)^2}\left(1-\rho+\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}-4\rho_s z}\right)\right.\\
&\quad -\frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{1-z}\left(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}}-\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}-4\rho_s z}\right)\\
&\quad \left.+\frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{\rho_{\bar{s}}-z}\left(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}}-\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}-4\rho_s z}\right)\right]\\
&= R_M\rho^M\left[z^{n-1}\right]\psi_0(z) \qquad (35)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^s_\rho(>1,n) &= \frac{R_M\rho^M}{2(1-\rho_{\bar{s}})^2}\left[z^{n-1}\right]\left[\frac{\rho_s}{(1-z)^2}\left(2z-1-\rho+\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}-4\rho_s z}\right)\right.\\
&\quad -\frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{1-z}\left((1+\rho_s)^2+(\rho_{\bar{s}}-1)^2-1-2\rho_s z-(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}-4\rho_s z}\right)\\
&\quad +\frac{\rho_s\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{z-\rho_{\bar{s}}}\left(2z-1-\rho+\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}-4\rho_s z}\right)\\
&\quad +\frac{\rho_{\bar{s}}^3}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{z-\rho_{\bar{s}}}\left((1+\rho_s)^2+(\rho_{\bar{s}}-1)^2-1-2\rho_s z-(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}-4\rho_s z}\right)\\
&\quad \left.+\frac{\rho_{\bar{s}}^3}{(\rho_{\bar{s}}-z)^2}\left((1+\rho_s)^2+(\rho_{\bar{s}}-1)^2-1-2\rho_s z-(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}-4\rho_s z}\right)\right]\\
&= \frac{R_M\rho^M}{2(1-\rho_{\bar{s}})^2}\left[z^{n-1}\right]\Psi_0(z) \qquad (36)
\end{aligned}$$

Proposition 4.1. *Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$\tilde{P}^s_\rho(>0,n) = \begin{cases}
\frac{R_M\rho^M}{1-\rho_{\bar{s}}}\left[(1-\rho)n+\left(\frac{\rho_s}{1-\rho}-\frac{\rho_s\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\right)+\left(\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\right)^n O\left(n^{-3/2}\right)\right] & si\ \rho<1\\
\frac{1}{M+1}\frac{1}{p_s}\left[\left(2\sqrt{p_s}+\frac{p_{\bar{s}}}{\sqrt{p_s}n}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-p_{\bar{s}}\right] & si\ \rho=1\\
1-\left(\frac{4\rho_s^2}{\rho(\rho-1)^3}-\frac{\rho_s\rho_{\bar{s}}}{\rho(1-\rho_{\bar{s}})}\left(\frac{1}{\rho-1}-\frac{\rho-1}{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2}\right)\right) & \\
\left(\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\right)^{n-1}\frac{\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\ n^{-3/2}}{(1-\rho_{\bar{s}})\sqrt{\pi}}\left(1+o\left(1\right)\right) & si\ \rho>1
\end{cases} \qquad (37)$$

$$\tilde{P}^s_\rho(>1,n) = \begin{cases} \frac{R_M\rho^M\rho_s}{(1-\rho_{\bar{s}})^2}\left[(1-\rho)n + \frac{\rho_s+\rho-1}{1-\rho} - \frac{\rho_s\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}} + \left(\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\right)^n O\left(n^{-3/2}\right)\right] & si\ \rho<1 \\ \frac{1}{M+1}\frac{1}{p_s}\left[\left(2\sqrt{p_s}+\frac{2p_{\bar{s}}}{\sqrt{p_s}n}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-(1+p_{\bar{s}})\right] & si\ \rho=1 \\ 1-\frac{\rho_s}{1-\rho_{\bar{s}}}\left(\frac{4\rho_s^2}{\rho(\rho-1)^3}+\frac{\rho_{\bar{s}}(\rho-1)}{\rho(1-\rho_{\bar{s}})(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})}\left(\frac{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2}{(\rho-1)^2}-\frac{\rho_s}{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})}\right.\right. & \\ \left.\left.+\rho_{\bar{s}}^2+\frac{4\rho_s\rho_{\bar{s}}^2(1-\rho_{\bar{s}})}{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2}\right)\right)\left(\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\right)^{n-1}\frac{\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\ n^{-3/2}}{(1-\rho_{\bar{s}})\sqrt{\pi}}(1+o(1)) & si\ \rho>1 \end{cases} \tag{38}$$

Preuve: De l'équation (35), on déduit, pour $\rho<1$, que

$$\begin{aligned} \psi_0(z) &= \frac{1-\rho}{(1-z)^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}(z-1)}\right) \\ &\quad -\frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{1-z}\left(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}}-(1-\rho)\sqrt{1-\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}(z-1)}\right)+\psi_1(z) \\ &= \frac{1-\rho}{(1-z)^2}\left(2+\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}(z-1)\right)^j\right) \\ &\quad -\frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{1-z}\left(2\rho_s-(1-\rho)\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}(z-1)\right)^j\right)+\psi_1(z) \\ &= \frac{2(1-\rho)}{(1-z)^2}+\left(\frac{1}{1-\rho}-\frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\right)\frac{2\rho_s}{1-z}+\psi_2(z)+\psi_1(z) \end{aligned}$$

où

$$\psi_2(z) = (1-\rho)\sum_{j=2}^{\infty}c_j\left(\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}\right)^j(z-1)^{j-2}+\frac{\rho_{\bar{s}}(1-\rho)}{1-\rho_{\bar{s}}}\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}\right)^j(z-1)^{j-1} \tag{39}$$

$\psi_2(z)$ est analytique en $z=1$ et admet une singularité de type $\sqrt{\bullet}$ en $z=((1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}})/4\rho_s$ et donc quand z tend vers $((1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}})/4\rho_s$

$$\psi_2(z) = O\left(\sqrt{\frac{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}{4\rho_s}-z}\right)$$

il est facile de vérifier que

$$\psi_1(z) = \frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{\rho_{\bar{s}}-z}\left(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}}-\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}-4\rho_s z}\right)$$

$$= \frac{\rho_{\bar{s}}(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{\rho_{\bar{s}}-z}\left(1-\sqrt{1-\frac{4\rho_s}{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2}(z-\rho_{\bar{s}})}\right)$$

$$= \frac{\rho_{\bar{s}}(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})}{1-\rho_{\bar{s}}}\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\frac{4\rho_s}{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2}\right)^j(z-\rho_{\bar{s}})^{j-1} \tag{40}$$

$\psi_1(z)$, est analytique en $z=\rho_{\bar{s}}$ et pour les mêmes raisons quand z tend vers $((1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}})/4\rho_s$

$$\psi_1(z)=O\left(\sqrt{\frac{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}{4\rho_s}-z}\right)$$

en plus ψ_0 admet des pôles à $z=1$, on a

$$\left[z^{n-1}\right]\psi_0(z)=2(1-\rho)n+2\rho_s\left(\frac{1}{1-\rho}-\frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\right)+\left(\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\right)^n O\left(n^{-3/2}\right)$$

ceci est obtenu, en appliquant le théorème 1 de Flajolet et Odlyzko[3]. Le théorème est applicable,du moment que $\psi_0(z)$ est analytique dans tout le plan complexe excepté le segment de droite sur l'axe des réels $z\in[((1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}})/4\rho_s,\infty[$.

Pour $\rho=1$ on a

$$\psi_0(z)=\frac{2\sqrt{p_s}}{(1-z)^{3/2}}+\frac{2p_{\bar{s}}}{\sqrt{p_s}}\frac{1}{(1-z)^{1/2}}+\psi_1(z)$$

$$\psi_1(z)=2p_{\bar{s}}\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\frac{1}{p_s}\right)^j(z-p_{\bar{s}})^{j-1}$$

elle est analytique en $z=p_{\bar{s}}$ et admet une singularité de type $\sqrt{\bullet}$ à $z=1$ i.e quand z tend vers 1,

$$\psi_1(z)=O\left(\sqrt{1-z}\right)$$

on a

$$\left[z^{n-1}\right]\psi_0(z)=2\sqrt{p_s}\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(3/2)}\frac{1}{(n-1)!}+\frac{2p_{\bar{s}}}{\sqrt{p_s}}\frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(1/2)}\frac{1}{(n-1)!}-2p_{\bar{s}}+O\left(n^{-3/2}\right)$$

on obtient, l'équation de la proposition 4.1, en utilisant la proposition 1 de [3] avec $\Gamma(3/2)=\frac{1}{2}\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}/2$:

$$\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(3/2)}\frac{1}{(n-1)!}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Pour $\rho>1$ on remarque que:

$$\psi_0(z)=\frac{2(1-\rho_{\bar{s}})\rho}{\rho-1}\left(\frac{1}{1-z}\right)-\psi(z) \tag{41}$$

où

$$\begin{aligned}\psi(z) = & -\frac{1-\rho}{(1-z)^2}+\frac{\rho_{\bar{s}}(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{1-z}-\frac{2(1-\rho_{\bar{s}})\rho}{\rho-1}\frac{1}{1-z}-\frac{\rho_{\bar{s}}(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{\rho_{\bar{s}}-z}\\ & -\frac{\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}}{(1-z)^2}\sqrt{1-\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}z}-\frac{\rho_{\bar{s}}\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{1-z}\sqrt{1-\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}z}\\ & +\frac{\rho_{\bar{s}}\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{\rho_{\bar{s}}-z}\sqrt{1-\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}z}\end{aligned}$$

Quand z tend vers $((1+\rho)^2 - 4\rho_{\bar{s}})/4\rho_s$, équivalent à dire que $(z-1)$ tends vers $(1-\rho)^2/4\rho_s$ ou, encore, $(z-\rho_{\bar{s}})$ tends vers $(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2/4\rho_s$, on a

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \frac{(\rho-1)(4\rho_s)^2}{(1-\rho)^4} - \frac{\rho_{\bar{s}}(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2} + \frac{2(1-\rho_{\bar{s}})\rho}{\rho-1}\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{4\rho_s}{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})} \\
&\quad - \left(\frac{(4\rho_s)^2}{(1-\rho)^4} - \frac{4\rho_s\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\left(\frac{1}{(1-\rho)^2} - \frac{1}{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2}\right)\right)\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\sqrt{1-\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}z} \\
&\quad + o\left(\sqrt{1-\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}z}\right)
\end{aligned}$$

de [2] p. 219 (2.2) on déduit que

$$\begin{aligned}
\left[z^{n-1}\right]\psi(z) &= -\left(\frac{(4\rho_s)^2}{(1-\rho)^4} - \frac{4\rho_s\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\left(\frac{1}{(1-\rho)^2} - \frac{1}{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2}\right)\right)\left(\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\right)^{n-1} \\
&\qquad \frac{\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\,(n-1)^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (42)
\end{aligned}$$

Combinant (35), (41) et (42), on a

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^s_\rho(>0,n) &= \frac{R_M\rho^M}{2(1-\rho_{\bar{s}})}\left[z^{n-1}\right]\psi_0(z) \\
&= \frac{1}{1-\rho^{-(M+1)}}\left[z^{n-1}\right]\left(\frac{1}{1-z} + \frac{(1-\rho)}{2\rho(1-\rho_{\bar{s}})}\psi(z)\right) \\
&= 1 - \left(\frac{4\rho_s^2}{\rho(\rho-1)^3} - \frac{\rho_s\rho_{\bar{s}}}{\rho(1-\rho_{\bar{s}})}\left(\frac{1}{\rho-1} - \frac{\rho-1}{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2}\right)\right)\left(\frac{4\rho_s}{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\right)^{n-1} \\
&\qquad \frac{\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho_{\bar{s}}}\,n^{-3/2}}{(1-\rho_{\bar{s}})\sqrt{\pi}}\left(1+o\left(1\right)\right).
\end{aligned}$$

De même, pour obtenir le développement asymptotique de $\tilde{P}^s_\rho(>1,n)$, on note que de (36) on a

$$\begin{aligned}
\Psi_0(z) &= -\frac{2\rho_s}{1-z} - \frac{2\rho_{\bar{s}}\rho_s}{1-\rho_{\bar{s}}} + \frac{\rho_s(1-\rho)}{(1-z)^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}(z-1)}\right) \\
&\quad - \frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{1-z}\left((\rho_{\bar{s}}-1)^2+\rho_s^2-((\rho_{\bar{s}}-1)^2-\rho_s^2)\sqrt{1-\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}(z-1)}\right) + \Psi_1(z) \\
&= -\frac{2\rho_s}{1-z} - \frac{2\rho_{\bar{s}}\rho_s}{1-\rho_{\bar{s}}} + \frac{\rho_s(1-\rho)}{(1-z)^2}\left(2+\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}(z-1)\right)^j\right) \\
&\quad - \frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\frac{1}{1-z}\left(2\rho_s^2-((\rho_{\bar{s}}-1)^2-\rho_s^2)\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}(z-1)\right)^j\right) + \Psi_1(z) \\
&= \frac{2\rho_s(1-\rho)}{(1-z)^2} + 2\rho_s\left(\frac{\rho_s+\rho-1}{1-\rho} - \frac{\rho_s\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\right)\frac{1}{1-z} - \frac{2\rho_{\bar{s}}\rho_s}{1-\rho_{\bar{s}}} + \Psi_2(z) + \Psi_1(z)
\end{aligned}$$

où

$$\Psi_2(z) = \rho_s(1-\rho)\sum_{j=2}^{\infty} c_j\left(\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}\right)^j (z-1)^{j-2}$$
$$+\frac{\rho_{\bar{s}}(1-\rho)(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})}{1-\rho_{\bar{s}}}\sum_{j=1}^{\infty} c_j\left(\frac{4\rho_s}{(1-\rho)^2}\right)^j (z-1)^{j-1} \quad (43)$$

$\Psi_2(z)$ est analytique en $z=1$ et admet les mêmes singularités que $\psi_2(z)$.

Il est facile de vérifier, également, que

$$\Psi_1(z) = +\left(2\rho_s-\rho_{\bar{s}}^2(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})\right)\frac{\rho_{\bar{s}}(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})}{1-\rho_{\bar{s}}}\sum_{j=1}^{\infty} c_j\left(\frac{4\rho_s}{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2}\right)^j (z-\rho_{\bar{s}})^{j-1}$$
$$+\rho_{\bar{s}}^3(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2\sum_{j=2}^{\infty} c_j\left(\frac{4\rho_s}{(1+\rho_s-\rho_{\bar{s}})^2}\right)^j (z-\rho_{\bar{s}})^{j-2}+\frac{2\rho_{\bar{s}}\rho_s}{1-\rho_{\bar{s}}}\left(1-\rho_{\bar{s}}^2\right) \quad (44)$$

$\Psi_1(z)$ est analytique en $z=\rho_{\bar{s}}$ et admet les mêmes singularités que $\psi_1(z)$, ajoutant à cela $\Psi_0(z)$ a des pôles à $z=1$

Pour $\rho=1$

$$\Psi_0(z)=\frac{2p_s\sqrt{p_s}}{(1-z)^{3/2}}+\frac{2p_{\bar{s}}\sqrt{p_s}}{(1-z)^{1/2}}-\frac{2p_s(1+p_{\bar{s}})}{1-z}-2p_{\bar{s}}+\Psi_1(z)$$

quand z tends vers 1 $\Psi_1(z)=O\left(\sqrt{1-z}\right)$ On obtient l'équation correspondante dans (38) en utilisant les mêmes propriétés que celles utilisées pour avoir (37). On obtient l'expression pour $\rho>1$ de la même façon qu'on l'a obtenue pour $\tilde{P}_\rho^s(>0,n)$, ce qui établie la preuve.

4.2 Faibles charges ($\rho \to 0$)

Proposition 4.2. *Pour tout n, $0\le j<n$, on a pour ρ assez petit*

$$P_\rho^s(>j,n)=\rho^M\rho_s^j(n-j+O(\rho_s)).$$

Preuve: Pour ρ assez petit, $x_1(z)=1+O(\rho_s)$, $x_2(z)=O(\rho_s)$, ainsi, $\delta_M=1+O(\rho_s)$. Ce qui implique que

$$\frac{\delta_{M+1}}{z\delta_m-\delta_{M+1}}=\frac{1}{z-1}+O(\rho_s), \qquad \left(\frac{\phi_M}{z\delta_m-\delta_{M+1}}\right)=p_s+O(\rho_s)$$

en substituant ceci dans (10), puisque $R_M\cong 1$, on peut écrire

$$P_\rho^s(>j,n)=\rho^M\rho_s^j\left[z^{n-j-1}\right]\frac{1}{(1-z)^2}+O(\rho_s)=\rho^M\rho_s^j(n-j+O(\rho_s)).$$

en particulier

$$P_\rho^s(>0,n)=\rho^M(n+O(\rho_s)), \qquad P_\rho^s(>1,n)=\rho^{M+1}p_s(n-1+O(\rho_s)).$$

5 La redondance et la probabilité de perte

Dans cette section, nous comparons la probabilité de perte de messages n avec et sans redondance. Nous allons montrer que pour une charge assez petite ou suffisamment grande (trafic intense ou trafic léger, sporadique), en ajoutant un paquet redondant (plus généralement j paquets), on réduit la probabilité de perte d'information. Nous considérons que dans les deux cas le taux de messages par unité de temps, en sortie est le même et est égale à $x = x' + x''$ tels que $x' = p_{\bar{s}}x$ et $x'' = p_s x$. Nous allons prendre $\mu = 1$ et ainsi, le taux d'arrivée global de messages, sans redondance, est $\lambda = \rho = nx$. Deux cas sont envisageables pour ajouter de la redondance:

1. ajouter de la redondance pour toutes les sources, ce qui revient à augmenter la charge du système d'un facteur $\frac{n+1}{n}$ i.e $\rho = (n+1)x$ pour avoir x mess/ut.

2. ajouter de la redondance uniquement pour la source s et augmenter la charge du système de x'', $\lambda = \rho = nx + x''$, $\rho_{\bar{s}}$ reste constant.

Le message est perdu, dans ces deux derniers cas, s'il y a perte de plus d'un paquet. c'est un compromis entre la croissance de la probabilité de perte d'un paquet individuel, due à l'augmentation de la charge, et la tolérance des message à la perte d'un seul paquet. Nous nous intéressons essentiellement au cas 1, le cas 2 sera donc un cas particulier.

La différence $\Delta = P^s_{nx}(>0, n) - P^s_{(n+1)}x(>1, n+1)$, nous permet de conclure si l'ajout d'un paquet redondant permet de diminuer la probabilité de perte de messages ($\Delta > 0$) ou non.

Proposition 5.1. *(i) Pour tout n et M, l'ajout d'un paquet redondant permet de réduire la probabilité de perte de messages dans un régime sporadique (faibles charges).*

Preuve: de la proposition 4.2 on a

$$P^s_{nx}(>0, n) = (nx)^M (n + O(nx''))$$

et

$$P^s_{(n+1)x}(>1, n+1) = ((n+1)x)^{M+1} p_s (n + O(nx''))$$

et donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{P^s_{(n+1)x}(>1, n+1)}{P^s_{nx}(>0, n)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{n+1}{n}\right)^M (n+1) p_s x = 0 < 1 \tag{45}$$

ce qui implique que pour x assez petit, $\Delta > 0$

La proposition 5.1 reste toujours valable dans le cas où l'on ajoute de la redondance uniquement pour la source s

6 Exemples numériques

Nous avons vu que la redondance améliore les performances du système, dans un régime intense ou à faible charges. La question que l'on se pose est de savoir si, réellement, ces cas sont intéressants dans certains domaines pratiques. Il est claire que pour ρ assez large, les probabilités sont proches de 1, et l'amélioration des performances par l'ajout de la redondance, dans ces cas, paraît très négligeables. Cependant, il n'est pas raisonnable que les systèmes fonctionnent avec des probabilités proches de 1. Nous allons voir, à l'aide des exemples numériques, que dans des cas très réalistes, l'ajout de la redondance réduit la probabilité de perte messages.

Notre objectif dans ce qui va suivre est de fixer ρ, ps et d'obtenir ensuite l'ensemble des n, M pour lesquels la redondances est profitable et qui satisfont un certain critère lié à la probabilité de perte (ex:une probabilité de perte de l'ordre de 10^{-9}). Soit η une constante, à déterminer, telle que n et M sont reliés par $n \cong \eta M$. On considère que $n >> 1$, en fait, les approximations, obtenues par le développement asymptotique, sont valable même pour des valeurs modérées de n et M. Dans la Figure 1, on montre $P_\rho^s(>0,n)$ et ses approximations (de la proposition 4.1):

$$A_0(>0,n) = \frac{R_M\rho^M}{(1-\rho_{\bar{s}})}\left((1-\rho)n + \rho_s\left(\frac{1}{1-\rho} - \frac{\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\right)\right), \text{ et } B_0(>0,n) = \frac{R_M\rho^M}{(1-\rho_{\bar{s}})}(1-\rho)n$$

dans le cas $M = 10$, $n \leq 10$, $\rho = 0.4$ et $p_s = 0.6$. Dans la Figure 2, on fait la même comparaison entre $P_\rho^s(>1,n)$ et

$$A_1(>1,n) = \frac{R_M\rho^M\rho_s}{(1-\rho_{\bar{s}})^2}\left((1-\rho)n + \frac{\rho+\rho_s-1}{1-\rho} - \frac{\rho_s\rho_{\bar{s}}}{1-\rho_{\bar{s}}}\right), \text{ et } B_1(>1,n) = \frac{R_M\rho^M\rho_s}{(1-\rho_{\bar{s}})^2}(1-\rho)n$$

pour les mêmes valeurs. Ces approximations sont obtenues de la proposition 4.1 (cas $\rho < 1$), en prenant les deux premiers et le premier terme, respectivement, dans le développement asymptotique en n.

6.1 Redondance pour toutes les sources

Soit x^* tel que $P_{(n+1)x}^s(>1,n+1) - x^*P_{nx}^s(>0,n) = 0$, alors $[0,x^*]$ est l'intervalle des valeurs de ρ (région du trafic sporadique) pour les quelles l'ajout d'un paquet redondant réduit la probabilité de perte de messages. De (45), on a pour M assez grand

$$x^* = \frac{1}{p_s(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^M \cong \frac{1}{p_s\eta M}\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{\eta M}\right)^M \cong \frac{n}{n+1}\frac{\exp(-1/\eta)}{p_s\eta M}$$

Puisque $\rho_s^* = p_s x^*\eta M$,on a

$$\rho_s^* \cong \frac{n}{n+1}\exp(-1/\eta) \cong \exp(-1/\eta)$$

Pour déterminer n et M on posera simplement

$$\eta \cong \frac{-1}{\log(\rho_s)}. \tag{46}$$

En fait, c'est une estimation optimiste, du moment qu'on a une limite pour ρ_s. Cela ne signifie pas qu'en faisant varier ρ au même temps que p_s, de telle sorte que (46) soit vérifiée, on réduit la probabilité de perte de message. On doit prendre en compte que toutes ces équations ne sont valables que pour ρ assez petit et $p_{\bar{s}}$ très petit également. Pour $\rho^* = 1$ on déduit de (46) que pour $p_s \leq \exp(-1/\eta)$ ajouter un paquet redondant réduit la probabilité de perte. En fait ceci n'est valable que pour (résultat expérimental) $\rho < 0.62$.

Exemple 1:

Soit $\rho = 0.6$ $p_s = 0.1$, on cherche les valeurs de n et M pour les quelles la redondance donne de meilleures performances et la probabilité de perte soit de l'ordre de 10^{-8}. De (46) on déduit que $\eta \geq 0.36$. Des développement asymptotiques de $P^s(>0,n)$ on a

$$P_{0.6}^s(>0,n) \cong \frac{1-0.6}{1-0.6^{M+1}}\frac{0.6^M}{1-0.54}(1-0.6)0.36M \cong 10^{-8} \quad \Rightarrow M \cong 39,\ n = \eta M \cong 15$$

Les calculs exacts pour $A(\rho) = P^s_{nx}(> 0, n)$ et $S(\rho) = P^s_{(n+1)x}(> 1, n+1)$ montrent que pour $n = 15$ $A(0.6) = 1.17{*}10^{-8}$ et $S(0.6) = 1.88{*}10^{-8}$. Pour $n = 19$, $S(0.6) = 1.42{*}10^{-8}$ et $A(0,6) = 1.48{*}10^{-8}$, il faut prendre η plus grand que la valeur qu'on a obtenue pour avoir une marge de confiance. Si on prend $\eta = 0.5$, on déduit $M = 40$ et $n = 20$ $A(0.6) = 9.39 * 10^{-9}$ et $S(0.6) = 8.59 * 10^{-9}$. La Figure 3, nous montre la variation de la probabilité en fonction de p_s pour $\rho = 0.6$, $M = 39$ et $n = 19$. On constate que pour les source dont la proportion par rapport à la charge totale ne dépasse pas les 10% ($p_s \leq 0.1$), la redondance leur est profitable à l'inverse des autres qui verrons leur probabilités croître. La Figure 4 nous montre la variation de la différence relative $(A(\rho) - S(\rho))/A(\rho)$ en fonction de ρ pour $M = 39$, $n = 19$ et $p_s = 0.1$. on améliore, ainsi, de plus de 90% la probabilité pour $\rho = 0.1$.

Ce qu'on va voir ultérieurement (Exemple 3), c'est qu'on fixe la valeur de ρ^* à 0.6 du moment que (46) n'est valide que pour ρ assez petit et on cherche la valeur maximale p^*_s pour $\rho = 1$ ainsi, on espère que pour tous les couples (ρ, p_s) tels que $\{\rho \in [0, 0.6],\ p_s \in [0, \exp(-1/\eta)]\}$, l'ajout d'un paquet réduit la probabilité de perte.

En général, dans le cas où j paquets sont redondants, l'écart des probabilités devient plus important du fait que $P^s(> j, n)$ est multipliée par un facteur de ρ^j_s, mais l'intervalle des valeur de ρ, pour les quelles la redondance donne de meilleures performances, se rétrécie. En d'autres termes, ceci est vrai

Soit

$$l_j = \left(\frac{n+j-1}{n+j}\right)^{M+j-1} \left(\frac{1}{(n+j)p_s}\right) \cong \frac{n}{n+j} x^*$$

alors, pour tout $x \in [0, l_j]$, $j < n$, on a

$$P^s_{(n+j)x}(> j, n+j) \leq P^s_{(n+j-1)x}(> j-1, n+j-1) \leq \cdots \leq P^s_{nx}(> 0, n)$$

En effet, il est facile de remarquer que pour tout $j < n$, on déduit de la proposition 4.2

$$P^s_{(n+j)x}(> j, n+j) - l_j P^s_{(n+j-1)x}(> j-1, n+j-1) = 0 \tag{47}$$

et comme l_j est une fonction décroissante en j alors

$$[0, l_j] \subseteq [0, l_{j-1}] \subseteq \cdots \subseteq [0, l_1]$$

ou encore

$$\forall a \in [0, l_j];\ a \in \{[0, l_1] \cap [0, l_2] \cap \cdots \cap [0, l_1]\}$$

ainsi, combinant ceci avec (47), on a la proposition.

Puisque $\rho_j = n l_j$, on a pour M grand

$$\rho_j \cong \frac{n}{(n+j)p_s}\left(1 - \frac{1}{\eta M + j}\right)^{M+j-1} \cong \frac{n}{(n+j)} \frac{\exp(-1/\eta)}{p_s} = \frac{n}{n+j} n x^* \cong \frac{n}{n+j}\rho^* \tag{48}$$

Si on souhaite ajouter $j > 1$ paquets redondants, alors pour le même p^*_s qu'on a trouvé précédemment (l'ajout d'un seul paquet réduit la probabilité de perte), on multiplie $\rho^* = 0.6$ par $\frac{n}{n+j}$ pour avoir la valeur maximale ρ_j pour laquelle l'ajout de j paquets est mieux que l'ajout de k, $k < j$. En d'autres termes, pour les couples $(\rho, p_s) \in \{(a, b) \backslash\ a \in [0, \frac{n}{n+j} 0.6],\ b \in [0, p^*_s]\}$, l'ajout de j paquet redondants est meilleur que l'ajout de $1, 2, \cdots, j-1$. Car $P^s(> 0, n)$ décroît en fonction de p_s et $P^s(> j, n)$, $j > 1$ croît en fonction de p_s(résultat expérimental).

Exemple 2:

Pour l'exemple précédent $n = 19$ et $M = 39$, $p_s = 0.1$, pour $j = 6$, d'après (48), on doit prendre $\rho_j \leq (19/25)0.6 \cong 0.45$. En effet, la Figure 5, nous montre la variation de la probabilité en fonction de j pour $\rho = 0.45$, $p_s = 0.1$. Elle est décroissante en fonction de j. On peut conclure que pour toutes les valeurs $\{\rho \in [0, 0.45],\ p_s \in [0, 0.1]\}$ ajouter 6 paquets redondants donne de meilleures performances que l'ajout de $0, 1, \cdots, 5$.

Le même exemple pour $j = 4$ on a $\rho_4 \leq (19/23)0.6 \cong 0.5$ et $p_s = 0.1$. La Figure 6 nous montre que quand $j > 4$, les probabilités commencent à croître. En fait, même pour $\rho = 0.52$, $p_s = 0.1$ on a le même comportement, ce qui nous laisse croire que c'est une approche pessimiste pour $j > 1$.

Exemple 3:

Pour $n = 10$ $M = 30$, ρ^* qu'on fixe à 0.6 on a $p_s^* \cong \exp(-1/\eta) \cong 0.05$ et $\rho_6 = (10/16)0.6 = 0.375$ pour toutes les valeurs $\{p_s \in [0, 0.05],\ \rho \in [0, 0.375]\}$, comme on peut le constater sur la Figure 7, l'ajout de 6 paquets redondants donne les meilleures performances.

Le même exemple pour $j = 4$ on a $\rho_4 = 0.4285$ et $p_s^* \cong 0.05$. La Figure 8 nous montre que dès que $j > 4$, les probabilités commencent à croître.

6.2 Cas particulier, redondance uniquement pour la source s

Ici on se propose d'étudier le cas où on ajoute de la redondance uniquement pour la source s. Pour avoir le même taux de message en réception, dans ce cas, il faut augmenter la charge du système de x'' tel que $x'' = p_s x$.

En procédant d'une manière similaire que précédemment, on aura, pour M suffisamment grand

$$\rho_s^* = \exp(-p_s/\eta). \tag{49}$$

Remarque 6.1. *Dans tout le document, en remplaçant p_s par 1, on retrouve toutes les équations et les formules de [2] qui est une étude du cas d'une seule source.*

Exemple 4:

Supposons que $p_s = 0.125$, $M = 50$ et $n = 10$, $\eta = 0.2$, de (49) on a $\rho_s^* \cong 0.535$. On sait que pour ρ assez grand la redondance donne de meilleurs performances. Pour $\rho = 4.28$, les calculs exacts pour $S(\rho) = P^s_{(nx+x'')}(> 1, n+1)$ et $A(\rho) = P^s_{nx}(> 1, n)$ montrent que $S(\rho) = 0.999989$ et $A(\rho) = 0.999998$. Évidemment, ce n'est pas le cas le plus intéressant. Pour $\rho = 0.8$ on a $S(\rho) = 1.1414 * 10^{-5}$ et $A(\rho) = 2.133 * 10^{-5}$. On voit bien qu'on réduit a probabilité de perte de près de la moitié. La figure 9, nous montre la variation de la probabilité en fonction de j pour $\rho = 0.8$, $p_s = 0.125$, $n = 10$, $M = 50$, on voit que la probabilité décroît en fonction de j et on la réduit ainsi d'un facteur de 10 quand on ajoute 6 paquets redondants uniquement pour la source s.

Pour $p_s = 0.8$, $M = 50$ et $n = 10$, $\eta = 0.2$ on a $\rho_s^* = 0.01831$, $\rho \cong 0.0229$ on a $S(\rho) = 8.902 * 10^{-82}$ et $A(\rho) = 9.429 * 10^{-82}$ et juste pour des valeurs un peut plus grande $\rho = 0.025$ on a $A(\rho) = 7.552 * 10^{-80}$ et $S(\rho) = 7.784 * 10^{-80}$. Dans ce cas on constate que plus p_s est petit plus les performance de la redondance s'améliorent.

Exemple 5:

Dans cet exemple, on se donne des valeurs $\rho = 0.8$ et $p_s = 0.1$ et on cherche n et M pour les quels la redondance améliore les performances du système et les probabilités de perte de messages soit de l'ordre 10^{-9}.

De (49) on déduit que $\eta = 0.04$ De la proposition 4.1, on a

$$P^s_{0.8}(>0, n) \cong \frac{1-0.8}{1-0.8^{M+1}} \frac{0.8^M}{1-0.72}(1-0.8)0.04M \cong 10^{-9} \quad \Rightarrow M \cong 90,\ n = \eta M \cong 4$$

Les calculs exacts pour $n = 4$ et $M = 90$ montrent que $S(0.8) = 2.67 * 10^{-9}$ et $A(\rho) = 1.28 * 10^{-9}$ et pour $n = 7$ $M = 90$ on a $S(0.8) = 1.86 * 10^{-9}$ et $A(\rho) = 2.12 * 10^{-9}$ ainsi pour toutes les valeurs de $n \geq 7$, $S(\rho) < A(\rho)$.

La Figure 10 nous montre la variation de la probabilité en fonction de j, pour $n = 8$, $M = 90$, $\rho = 0.8$ et $p_s = 0.1$.

On remarque, également, que plus la taille des messages est grande plus les performances de la redondance s'améliorent. Pour le même exemple, en prenant $n = 14$, on arrive à réduire la probabilité de perte d'un facteur de 10 en ajoutant 4 paquets redondants (Figure 11).

La question que l'on se pose c'est de savoir l'impacte de la minimisation de la probabilité de perte, pour la source s, sur les autres sources. Intuitivement, on s'attend à ce que ces probabilités augmentent à cause de l'augmentation de la charge totale du système et de la diminution de leur proportion (p_s), compte tenu de la décroissance de la probabilité de perte, sans redondance, en fonction de p_s.

Pour ce dernier exemple $\rho = 0.8$, $p_s = 0.1$, $n = 14$ et $M = 90$, si on considère uniquement l'existence d'une autre source $\bar{s}$, alors $p_{\bar{s}} = 0.9$ et

$$P^{\bar{s}}_{0.8} = 2.114\ 10^{-9}.$$

Quand on ajoute 4 paquets redondants pour la source s, la charge totale du système est $\rho = 0.8 + \frac{4}{14}0.08 = 0.8228$ et $p_s = \frac{18}{14}0.1 = 0.1285$, on déduit que $p_{\bar{s}} = 1 - 0,1285 = 0.8715$ et pour ces valeurs on a

$$P^{\bar{s}}_{0.8228} = 2.305\ 10^{-8}.$$

On augmente, finalement, la probabilité de perte pour la source $\bar{s}$ du même ordre que l'on diminue pour la source s. On peut bien penser à privilégier certaines sources très sensibles au pertes au détriment des autres, ce qui constitue l'intérêt de cette approche.

7 Processus de perte de paquets avec paquets redondants dans une file M/M/1/K

On se tourne, maintenant, vers l'étude de $\mathcal{P}_\rho(j)$, qui est la probabilité de perte de paquets individuels avec redondance (j paquets), dans le cas de multiples sources. Le cas d'une seule source sera donc un cas particulier($p_s = 1$). Nous considérons que parmi $n + j$ paquets, j paquets sont redondants et nous permettent la récupération d'une quelconque perte de k paquets ($k \leq j$). Nous nous intéressons, particulièrement, au cas où $j = 1$.

Proposition 7.1. *la probabilités de perte de paquets, sachant que j paquets sont redondants est donnée par*

$$\mathcal{P}_\rho(j) = R_M \rho^M - \frac{1}{n+j} \sum_{k=1}^{j} k P^s(k, n+j) \tag{50}$$

Preuve:

Supposons que l'on aie perdus k paquets parmi les $n + j$. La probabilité qu'un paquet quelconque i qu'on note p_i soit perdu est, exactement $k/(n + j)$ du moment que les pertes sont indépendantes; c'est la probabilité que le paquet p_i soit parmi les k paquets perdus. Nous savons qu'une perte de j paquets, au plus, est récupérable. En d'autres termes si p_i est parmi les k perdus ($k \leq j$), il est à ce moment là récupérable; il n'est, effectivement, perdu que si $k > j$, ce qui nous permet d'écrire:

$$\mathcal{P}_\rho(j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{k}{n+j} P^s(k, n+j)$$

Par définition de $q_s(y, z)$ on a

$$\left.\frac{dq_s(y,z)}{dy}\right|_{y=1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \left.\sum_{k=1}^{\infty} k y^{k-1} P^s(k,n)\right|_{y=1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k P^s(k,n)$$

Ce qui implique, après substitution de (8) et quelques lignes de calcul, en remarquant, également, que $\rho\phi_M = \delta_M - \delta_{M+1}$, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k P^s(k, n+j) = \left[z^{n+j-1}\right] \left.\frac{dq_s(y,z)}{dy}\right|_{y=1} = R_M \rho^M \left[z^{n+j-1}\right] \frac{1}{(1-z)^2} = R_M \rho^M (n+j)$$

Et ainsi

$$\mathcal{P}_\rho(j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{k}{n+j} P^s(k, n+j) = \frac{1}{n+j} \left(R_M \rho^M (n+j) - \sum_{k=1}^{j} k P^s(k, n+j) \right) \text{(C.Q.F.D)}$$

Dans le cas où on ajoute un seul paquet redondant à une suite de n paquets successifs on a

$$\mathcal{P}_\rho(1) = R_M \rho^M - \frac{1}{n+1} P^s(1, n+1), \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_\rho(0) = R_M \rho^M$$

$\mathcal{P}_\rho(0)$ est la probabilité de perte de paquet sans redondance. C'est la probabilité que le buffer soit plein.

De la proposition (4.2), on déduit pour $\rho << 1$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_\rho(1) &= R_M\rho^M - \frac{1}{n+1}P^s(1,n+1) = R_M\rho^M - \frac{1}{n+1}\left(P^s(>0,n+1) - P^s(>1,n+1)\right) \\
&\cong \rho^M - \frac{1}{n+1}\left(\rho^M(n+1) - \rho^M\rho_s n\right) = \rho^M - \rho^M + \frac{n}{n+1}\rho^M\rho_s = \frac{n}{n+1}\rho^M\rho_s \\
\mathcal{P}_\rho(0) &\cong \rho^M, \qquad R_M \cong 1
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Dans le cas où on ajoute un paquet redondant, pour avoir ρ paquets par unité de temps, il faut augmenter la charge du système d'un facteur $(n+1)/n$. Nous avons à étudier, donc,

$$\Delta' = \mathcal{P}_\rho(0) - \mathcal{P}_{\frac{n+1}{n}\rho}(1),$$

pour pouvoir discuter si l'ajout d'un paquet redondant, réduit la probabilité de perte de paquets ($\Delta' > 0$) ou non ($\Delta' < 0$).

De (51) on a

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\mathcal{P}_{\frac{n+1}{n}\rho}(1)}{\mathcal{P}_\rho(0)} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^M\rho^M\rho_s}{\rho^M} = \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{n+1}{n}\right)^M p_s\rho = 0 < 1.$$

Ce qui nous permet d'affirmer que dans un régime sporadique, ρ assez petit, $\Delta' > 0$ et par conséquent ajouter un paquet redondant à n paquets successifs réduit la probabilité de perte de paquets.
Pour M assez grand, on a

$$\rho_s^* = \left(\frac{n}{n+1}\right)^M \cong \left(1 - \frac{1}{\eta M}\right)^M \cong \exp(-1/\eta).$$

On retrouve, finalement, la même limite que dans (46). Ainsi, on obtient les mêmes résultats que précédemment.

8 Conclusion

Ce stage nous a permis d'approfondir nos connaissances dans le domaine de la modélisation et des réseaux à haut débit, et de travailler avec un outil toujours puissant pour la résolution des récursions qui est les fonctions génératrices. Ceci s'est déroulé dans un centre de recherches nous permettant, ainsi, une bonne initiation à la recherche.

Nous avons utilisé les récursions pour obtenir l'expression de la fonction génératrice, malheureusement, très difficile à inverser. Néanmoins pour $j = 0, 1$ l'algorithme pour le calcul des probabilités est simple. Les développement asymptotiques nous ont permis d'approximer les probabilités avec une complexité $O(1)$ et de montrer que la redondance, dans des cas réalistes ($\rho = 0.6$), réduit la probabilité de perte.

En étudiant le cas où une seule source utilise de la redondance, nous avons montré qu'on peut privilégier une source très sensible au perte par rapport aux autres. La construction d'algorithmes adaptatifs, qui, en fonction de la charge du système pourront décider du moment et de la quantité de la redondance à ajouter, peut être une solution pour les systèmes actuels fonctionnant, généralement, en débit variable (VBR). Ce travail peut être étendu par l'étude du même problème sous d'autres hypothèses plus réalistes.

References

[1] I. Cidon, A. Khamisy et M. Sidi, *"Analysis of Packet Loss Process in High-Speed Netwoks"*, IEEE Trans.IT, VOL. 39, No. 1, pp. 98-108, 1993.

[2] E. Altman et A. Jean-Marie, *"The Loss Process of Messages with Redundant Packets in an M/M/1/K Queue"*,

[3] P. Flajolet et A. Odlyzko, *"Singularity analysis of generating functions"*, SIAM J. Disc. Math., Vol. 3, No. 2, pp. 216-240, 1990.

[4] N. Shacham et P. McKenney, *"Packet Recovery in High-Speed Networks Using Coding and Buffer Management"*, IEEE, , , pp. 124-131, 1990.

[5] N. Cem Oğuz et E. Ayanoğlu *"Performance Analysis of Two-Level Forward Error Correction for Lost Cell Recovery in ATM Networks"*, IEEE, , , pp. 6b.3.1-6b.3.10, 1995.

[6] L. Kleinrock, *"Queueing Systems"*, J. Wiley & Sons, 1975.

[7] H.M. Srivastava et B.R.K. Kashyap, *"Special Functions in Queueing Theory"*, Academic Press, 1982.

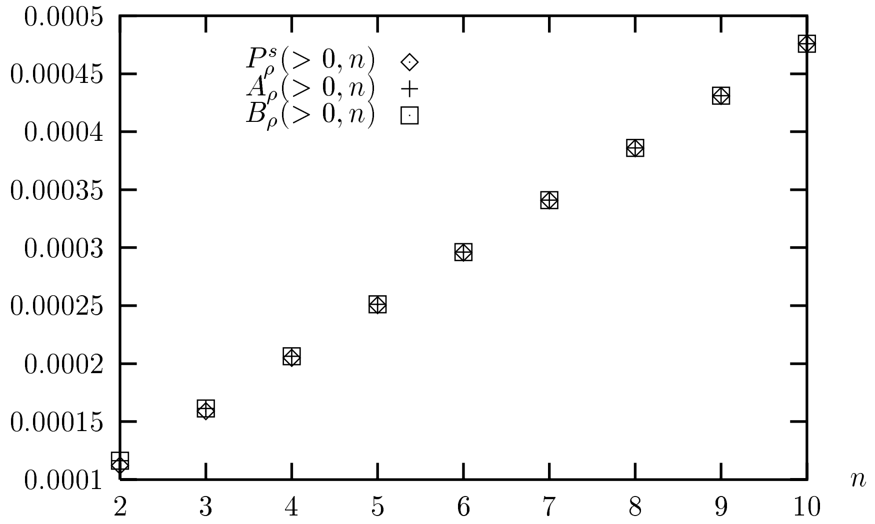

Figure 1: $P^s_\rho(>0,n)$ et ses approximations $\rho = 0.4$, $p_s = 0.6$ et $M = 10$.

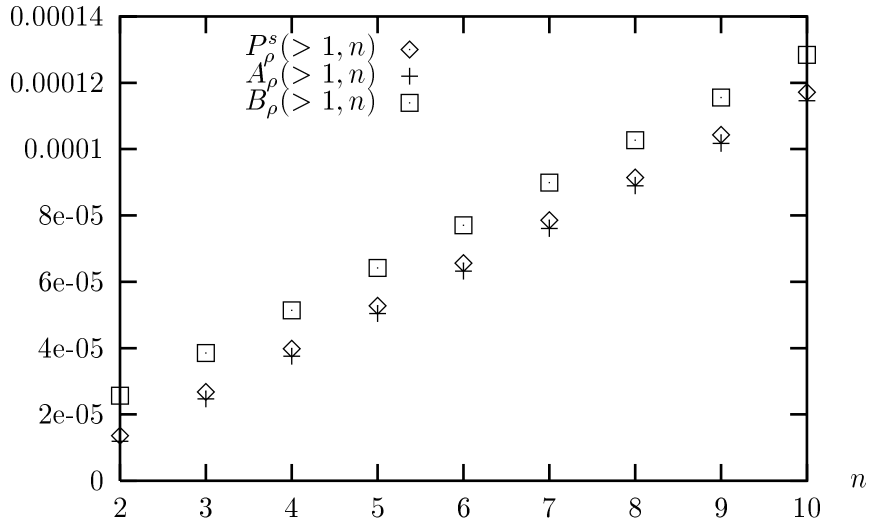

Figure 2: $P^s_\rho(>1,n)$ et ses approximations pour $\rho = 0.4$, $p_s = 0.6$ et $M = 10$.

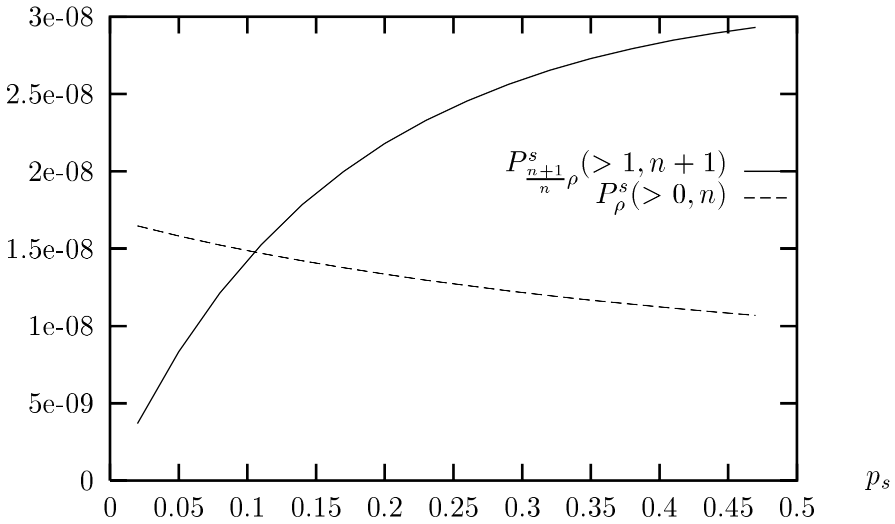

Figure 3: Variation de $P^s_\rho(>j, n+j)$, $j = 0, 1$ en fonction de p_s pour $\rho = 0.6$, $n = 19$ et $M = 39$.

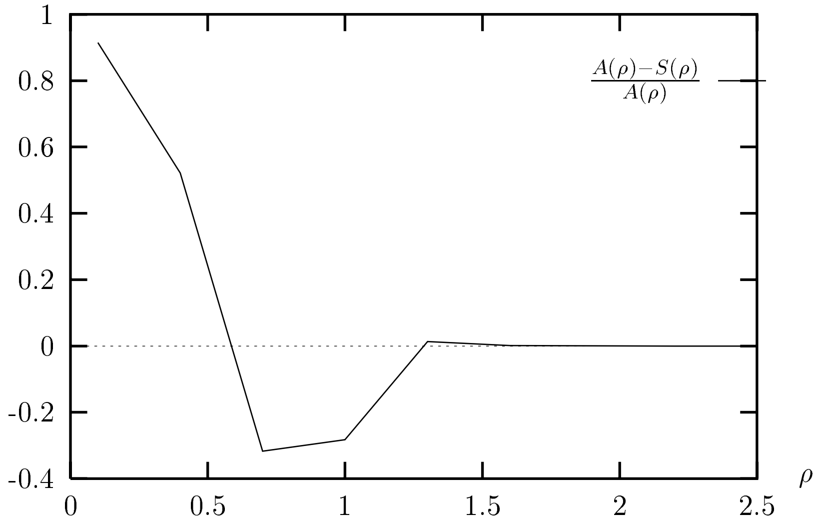

Figure 4: Variation de $(A(\rho) - S(\rho))/A(\rho)$ en fonction de ρ pour $p_s = 0.1$, $n = 19$ et $M = 39$.

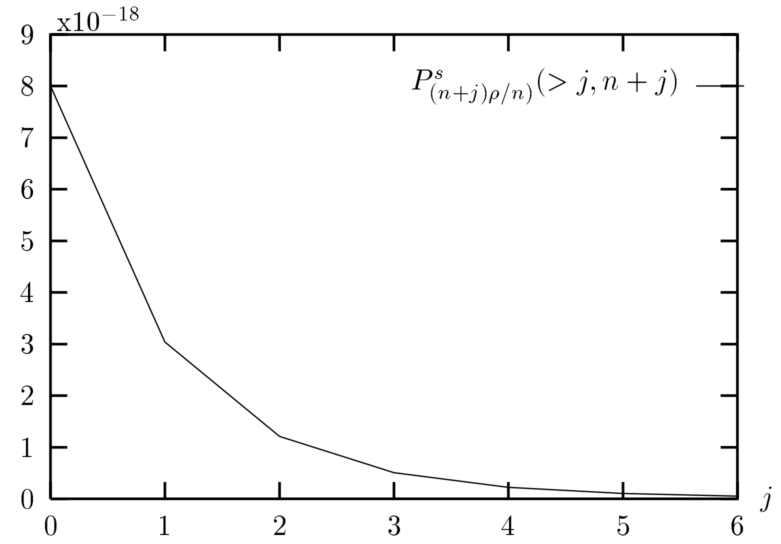

Figure 5: Variation de $P^s_{\frac{n+j}{n}\rho}(> j, n+j)$ en fonction de j pour $\rho = 0.45$, $p_s = 0.1$, $n = 19$ et $M = 39$

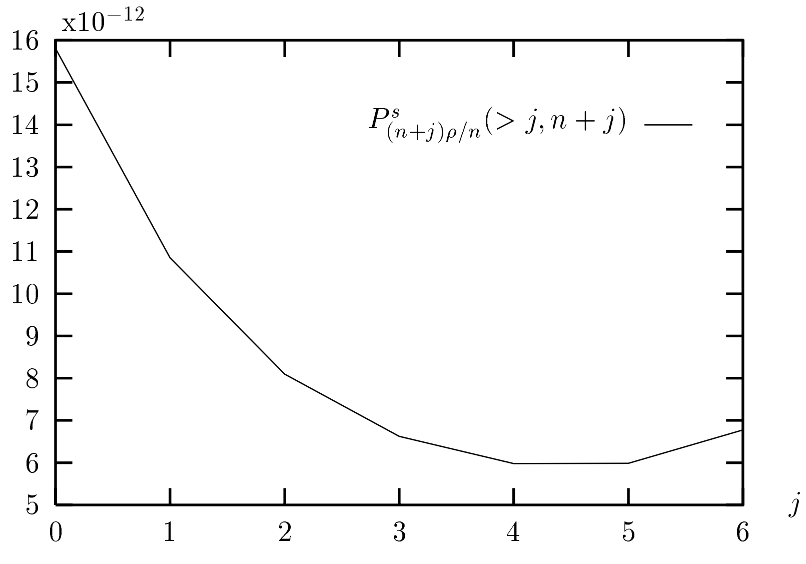

Figure 6: Variation de $P^s_{\frac{n+j}{n}\rho}(> j, n+j)$ en fonction de j pour $\rho = 0.5$, $p_s = 0.1$, $n = 19$ et $M = 39$

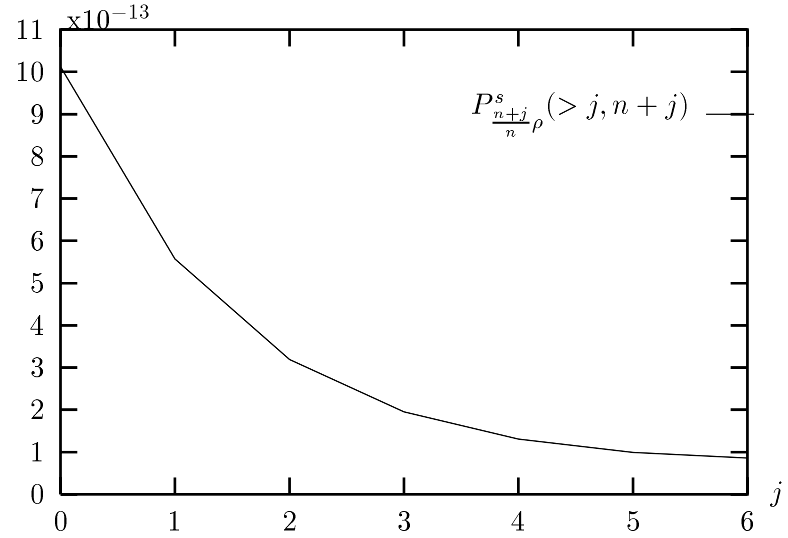

Figure 7: Variation de $P^s_{\frac{n+j}{n}\rho}(> j, n+j)$ en fonction de j pour $\rho = 0.375$, $p_s = 0.05$, $n = 10$ et $M = 30$

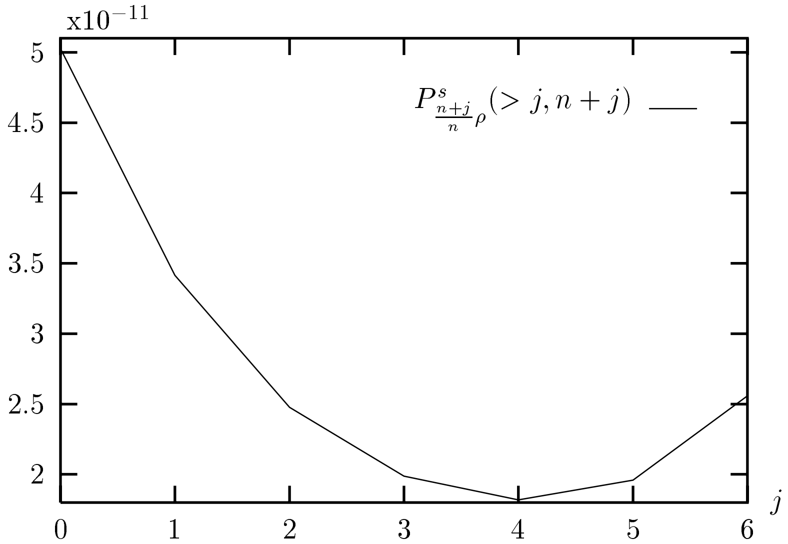

Figure 8: Variation de $P^s_{\frac{n+j}{n}\rho}(> j, n+j)$ en fonction de j pour $\rho = 0.4285$, $p_s = 0.05$, $n = 10$ et $M = 30$

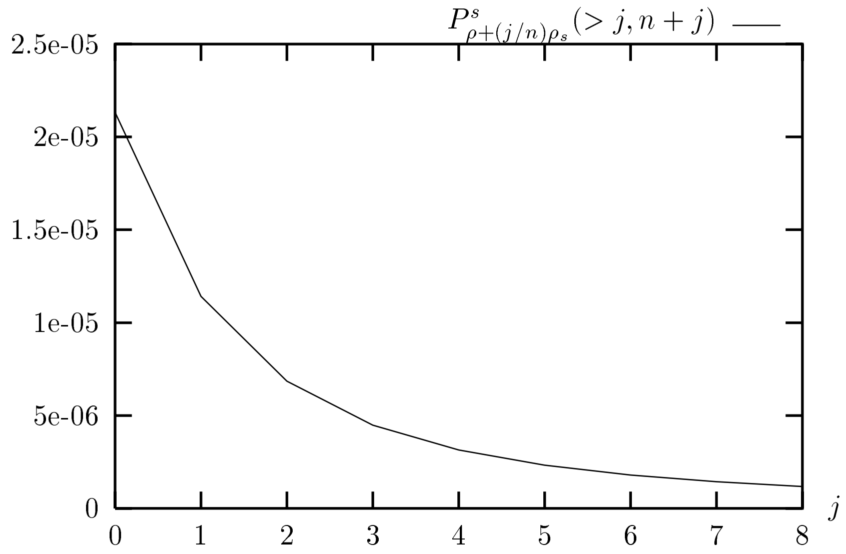

Figure 9: Variation de $P^s_{\rho+\frac{j}{n}\rho_s}(> j, n+j)$ en fonction de j pour $\rho = 0.8$, $p_s = 0.125$, $n = 10$ et $M = 50$

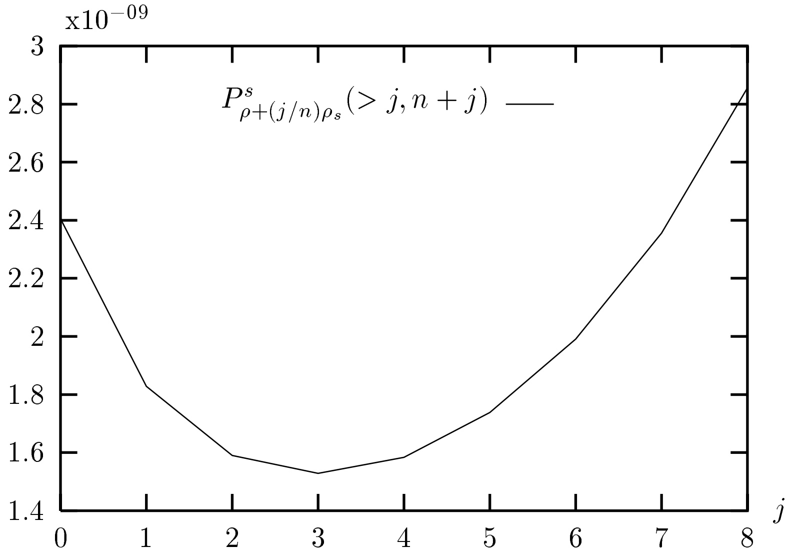

Figure 10: Variation de $P^s_{\rho+\frac{j}{n}\rho_s}(> j, n+j)$ en fonction de j pour $\rho = 0.8$, $p_s = 0.1$, $n = 8$ et $M = 90$

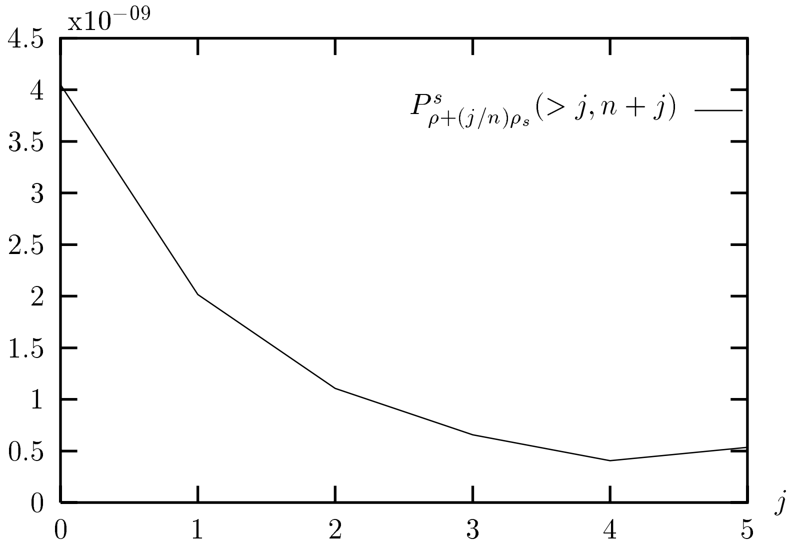

Figure 11: Variation de $P^s_{(\rho+\frac{j}{n}\rho_s)}(>j, n+j)$ en fonction de j pour $\rho = 0.8$, $p_s = 0.1$, $n = 14$ et $M = 90$