ÉCOLE D'ÉTÉ

Analyse Harmonique et Approximation Rationnelle : leurs rôles en théorie du signal, du contrôle et des systèmes dynamiques.

Ile de Porquerolles (Var), septembre 2003

Jean-Daniel Fournier
et
Juliette Leblond

Nice et Sophia-Antipolis
mars 2003

1 Attendus et Buts Scientifiques et Pédagogiques

1.1 Introduction

Le fil conducteur de ce projet d'école est à chercher dans les liens profonds qui existent entre l'analyse complexe et la maîtrise des perturbations. Nous avons à l'esprit plusieurs domaines techniques ou scientifiques, liés de près ou de loin à des questions d'approximation ou de traitement de données, qui sont en plein essor ou connaissent un renouveau d'activité, et ce en relation avec des questions modernes d'analyse complexe. En second lieu, nous faisons le constat que les riches interactions entre les transformations spectrales et les questions d'analyticité, maintenant classiques pour les mathématiciens, sont peu connues parmi les communautés de praticiens. Troisièmement nous précisons que les perturbations mentionnées plus haut peuvent être certaines ou aléatoires. L'introduction des probabilités, avec leur cortège d'hypothèses sur les bruits, peut être artificielle ou réductrice. Dans les cas où elle est naturelle, nous voulons souligner le rôle puissamment organisateur qu'a, non seulement sur la théorie, mais sur les phénomènes, la présence d'*alea*.
Sur la base de ces trois points, nous développons ci-après les attendus et buts de cette école et nous situons l'audience visée. Auparavant, nous exprimons ici ce que le lecteur a sans doute déjà compris, à savoir que nous considérons qu'il faut favoriser les occasions de rassembler des mathématiciens professionnels et des spécialistes ou praticiens d'autres disciplines ; cette entreprise peut être déterminante pour les uns et les autres ; c'est la condition pour que soient cernées de nouvelles questions que les mathématiques puissent poser aux sciences naturelles ou appliquées et celles-ci aux mathématiques.

1.2 Attendus Scientifiques

Après une période d'activité intense liée aux divers rôles de l'analyticité en physique des particules et en théorie des champs, les recherches des physiciens sur les singularités et les méthodes sommatoires ont connu un certain reflux. Conjointement, l'obtention par les mathématiciens des bons théorèmes de convergence (en capacité) des approximants de Padé a semblé clore une période. Dans le même temps, la théorie de la commande des systèmes dynamiques connaissait d'importants développements liés à la possibilité de travailler dans le plan complexe. Cette théorie s'est en effet considérablement enrichie depuis le moment où, en maniant la transformée "en z" ou de Laplace-Fourier de la fonction (ou matrice) de transfert, on a jeté un pont de l'espace des états vers le domaine des fréquences. Dès lors, des problèmes comme celui de la stabilité en boucle fermée étaient ramenés à des questions de domaine d'analyticité.
Une autre période s'est ouverte lorsque l'intérêt s'est porté sur la continuation analytique en temps des systèmes différentiels non linéaires, intégrables, partiellement intégrables, intermittents et chaotiques. Les nombreux résultats obtenus – via l'étude des singularités et l'usage de resommations partielles de séries (Padé, Ψ-séries) – n'ont cependant pas donné lieu à la classification espérée.
Or ces dernières années, dans l'étude de signaux engendrés par des systèmes bruités ou chaotiques, la notion de résonance prise au sens de singularité (notamment de pôle) de la transformée de Fourier a permis de caractériser les composantes certaines et les composantes aléa-

toires. D'autre part, ces singularités peuvent elles-mêmes être localisées au moyen de divers approximants rationnels et de leurs propriétés de convergence. Parallèlement, pour certaines classes de systèmes dynamiques hamiltoniens, simples au regard de la mécanique céleste où peu reste connu, les développements en la constante de couplage (rendue complexe), associés à des méthodes de Padé, ont permis des progrès sur la détermination de domaines d'analyticité. Enfin, en automatique, les avancées récentes en théorie de l'approximation analytique et rationnelle ont notamment permis de traiter les systèmes de dimension infinie ; il faut alors maîtriser non seulement le domaine d'analyticité d'une fonction, mais sa norme sur la frontière. L'usage généralisé de telles techniques ainsi que les besoins en ingénierie ont redonné de l'actualité à différents problèmes restés pendants, d'identification et de contrôle robustes, par exemple.

1.3 Buts de l'École

D'une part, les disciplines dont sont tirés les exemples ci-dessus – les théories du signal, du contrôle et des systèmes dynamiques – sont toutes confrontées à un renouveau du rôle des problèmes d'approximation analytique ou méromorphe, avec ou sans bruit, pour lesquels les outils relèvent de l'analyse complexe et de l'analyse harmonique, ainsi que de la théorie des probabilités. D'autre part, en mathématiques, la théorie des fonctions et la théorie de l'approximation sont bien vivantes, comme le montrent les progrès récents concernant les opérateurs, l'estimation asymptotique des erreurs ou le comportement des zéros de polynômes orthogonaux, déterministes ou aléatoires. Ce qui manque d'évidence est le contact entre les communautés concernées.

Nous proposons d'organiser une école sur les différents sujets dont la maîtrise est un atout pour participer à ce renouveau. Tel auditeur découvrira par là les développements récents ou le cadre théorique de méthodes qu'il ne connaît que comme praticien, ce qui pourra le conduire à infléchir sa réflexion ; tel intervenant, mathématicien par exemple, découvrira les avatars dans d'autres disciplines de concepts qu'il manipule déjà dans la sienne. Cette école visera à transmettre, dans un style pédagogiquement classique, les acquis du passé, et à élaborer et diffuser de nouvelles idées, techniques et problématiques. Pour favoriser cette élaboration, nous comptons réserver, au sein de chaque intervention et dans une table ronde, un temps de réelle interactivité ; nous espérons ainsi non seulement éclairer les thèmes qui sont sur l'avant-scène mais aussi débusquer ceux qui sont habituellement tenus dans l'ombre.

Nous souhaitons d'autre part favoriser la participation de jeunes chercheurs et leur donner l'occasion de pratiquer dans une ambiance favorable le difficile exercice de la communication scientifique.

Enfin, parmi les diverses applications mentionnées dans le programme, comme le contrôle ou la mécanique céleste, nous souhaitons distinguer ici le traitement de l'information en turbulence, et le contrôle et la caractérisation des bruits dans la détection interférométrique des ondes gravitationnelles. Ce souci se traduit par la présence, au sein du Comite Scientifique, d'un représentant de la communauté française de turbulence et d'un représentant de l'expérience franco-italienne Virgo.

Remerciements

L'idée première et la phase initiale de la préparation de ce projet d'école doivent beaucoup à des conversations avec Claude Froeschlé et Elena Lega. D'évidence recentrée vers les mathématiques appliquées entendues au sens large, cette école est dans une mesure l'héritière de la série qu'ils ont organisée sur divers thèmes de dynamique hamiltonienne.

2 Programme

A. Introduction : motivations et rappels

1. Analyticité et résonances en physique — M. Pindor
2. Rappels d'analyse complexe (old and new) — B. Candelpergher
3. Théorie et usage de la table de Padé — M. Pindor

B. Morceaux choisis de mathématiques : Approximation rationnelle, analyse harmonique et probabilités

4. Transformée de Fourier et analyse complexe — J.R. Partington
5. Approximation analytique et rationnelle — E.B. Saff
6. Statistique et probabilité, autour du théorème de la limite centrale — P. Collet

C. Mathématiques pour l'utilisateur : applications et développements, avec ou sans aléas

7. Systèmes dynamiques et mécanique céleste
   (a) Rappels de dynamique hamiltonienne. Problème des trois corps. — L. Biasco
   (b) Séries en mécanique céleste ; domaines d'analyticité. — A. Celletti
   (c) Résonances dans les systèmes hyperboliques et hamiltoniens — V. Baladi
8. Contrôle et traitement du signal
   (a) Historique et rappels — M. Deistler
   (b) Théorie spectral et théorie du contrôle — N. Nikolski
   (c) Approches récentes — L. Baratchart
9. Approximation rationnelle en présence de bruit
   (a) Dans l'espace réel ou des paramètres — M. Pindor
   (b) Dans l'espace de Fourier — B. Dujardin
   (c) Décomposition spectrale de processus linéaires gaussiens — A. Gombani

D. Ouvertures et mise en perspective

10. Détection interférométrique des ondes gravitationnelles — J.-Y. Vinet
11. Turbulence et information — P. Borgnat
12. Table–ronde : avatars d'un même concept dans diverses disciplines — E.B. Saff *animateur*

E. Synthèses et panoramas

13. La transformée de Fourier dans l'histoire des mathématiques — J.-P. Kahane
14. Singularités et approximation en plusieurs variables complexes — N. Sibony
15. De bonnes bases — J.R. Partington

F. Ateliers

16. Aspects algorithmiques et numériques des procédures d'approximation — F. Seyfert
17. Démonstration de logiciels — J. Grimm *animateur*
18. Exposé et discussion de travaux des jeunes participants — M. Olivi *animatrice*

3 Résumé des cours, avant-projet

1. Analyticité et causalité en physique des XIX et XXième siècles ; résonances en physique atomique et physique des particules ; relations de dispersion en optique et en physique des particules ; profil de raies ; matrice S ; pôles de Regge ; resommations dont Padé.
2. Les singularités des fonctions analytiques d'une variable complexe. Que faire des séries divergentes ou des singularités de fonctions analytiques ?
3. Usage de resommations en physique des particules et théorie des champs. Activité mathématique sur les approximants de Padé ; la table de Padé ; les théorèmes de convergence ; approximation de fonction, y compris non méromorphes ; précautions d'emploi et d'interprétation ; précautions et algorithmes numériques.
4. Analyse de Fourier réelle et complexe ; DFT, FFT, fenêtres ; interaction entre le comportement dans le réel et dans le complexe d'une fonction $f(t)$ et le comportement dans le réel et dans le complexe de sa transformée de Fourier $\hat{f}(\omega)$; théorèmes de Wiener ; transformations de Laplace, de Mellin.
5. Rappels sur l'approximation polynômiale et rationnelle (Tchebychev) ; introduction aux espaces de Hardy du disque dans le plan complexe ; approximation dans les classes de Hardy et lien avec l'extrapolation (Carleman) ; approximation méromorphe et rationnelle.
6. Convergence en théorie des probabilités ; rôle pivot (des diverses versions) du théorème de la limite centrale en probabilités et statistiques ; estimation ; quelques idées et travaux modernes : rapidité de convergence, grandes déviations, techniques fonctionnelles.
7. (a) Rappels de mécanique hamiltonienne ; mécanique céleste ; développements de perturbations.

   (b) Développement en la constante de couplage ; séries en mécanique, notamment céleste. Étude en particulier par resommation de Padé. Étude du domaine d'analyticité et comparaison entre différentes méthodes.

   (c) Théorèmes de Ruelle, Keller, Pollicott, Dolgopyat, ...
8. (a) Analyticité et causalité, bornitude et stabilité en théorie du signal et théorie du contrôle. Processus stationnaires dans les domaines temporels et fréquentiels, transformations linéaires des processus stationnaires, décomposition de Wold et prédiction, filtrage, modèles AR, ARMA et représentation interne des systèmes.

   (b) Thérorie spectrale, analyse de Fourier, opérateurs de Hankel ; problème inverse spectral et réalisations équilibrées des fonctions de transfert.

   (c) Identification et théorie des fonctions : approximation rationnelle et analytique de fonctions de transfert à partir de mesures en fréquence, problèmes extrémaux bornés ; comportement asymptotique des pôles et des erreurs en relation avec l'analyse spectrale des opérateurs de Hankel et de Toeplitz et la théorie du potentiel.
9. (a) Phénomènes de Froissart.

   (b) Analyse de Szegö ; identification des bruits.

   (c) Mesure spectrale aléatoire ; décomposition spectrale de processus gaussiens stationnaires ; processus de densité spectrale rationnelle ; obtention d'approximants rationnels pour des processus gaussiens stationnaires par des arguments d'analyse fonctionnelle.

10. Les problèmes de la prédiction et de la détection interférométrique des ondes gravitationnelles ; les bruits des détecteurs et leur caractérisation ; non gaussianité ; usage des approximations rationnelles.
11. Du point de vue traitement du signal. Usage de la transformation de Mellin.
12. Appliquer les mathématiques pures / purifier les applications des mathématiques. Interactions entre la théorie de l'information et l'analyse complexe. Nouvelles questions ouvertes.
13. Séries et intégrales de Fourier de 1807 à 2003.
14. Séries multiples, phénomène de Hartogs, singularités à plusieurs variables ; problèmes d'extension, principe fondamental d'Erhenpreis ; fractions rationnelles, convexité rationnelle et problèmes d'approximation ; extension à plusieurs variables des résultats sur la vitesse d'approximation par des polynômes (analogue du théorème de Bernstein).
15. De Fourier aux ondelettes en passant par les polynômes orthogonaux et les bases de Szegö.

4 Organisation

4.1 Directeurs

Jean-Daniel Fournier
Chercheur au CNRS
Département G.D. Cassini et Collaboration Virgo
Observatoire de la Côte d'Azur et CNRS
fournier@obs-nice.fr

Juliette Leblond
Chercheur à l'INRIA
Projet MIAOU
Unité INRIA Sophia-Antipolis
Juliette.Leblond@sophia.inria.fr

4.2 Comité scientifique

L. Baratchart (INRIA, Sophia–Antipolis) ; A. Celletti (Univ. Tor Vergata, Rome) ; J.-D. Fournier (CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur et Collaboration VIRGO, Nice) ; J. Leblond (INRIA, Sophia–Antipolis) ; O. Michel (Univ. Nice, Sophia–Antipolis) ; J.R. Partington (Univ. Leeds, G.B.) ; J.-Y. Vinet (CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur et Collaboration VIRGO, Nice).

4.3 Comité d'organisation, secrétariat, logistique

B. Dujardin ; J.-D. Fournier ; J. Grimm ; J. Leblond ; F. Limouzis, D. Sergeant et SEMIR, INRIA U.R. Sophia-Antipolis.

4.4 Compte rendus

J.-D. Fournier ; J. Grimm ; J. Leblond ; F. Limouzis ; E.B. Saff.

4.5 Financement et parrainage

4.5.1 Obtenus

CNRS (École thématique de la formation permanente du CNRS) ; INRIA, U.R. Sophia-Antipolis ; Collaboration Virgo ; INRIA, formation permanente.

4.5.2 Envisagés

Observatoire de la Côte d'Azur ; Conseil général des Alpes–Maritimes ; Conseil régional PACA ; Ministère de la Recherche ; GdR ISIS ; GdR Turbulence.

4.6 Lieu

Ile de Porquerolles (Var, France).

4.7 Date et durée

Une semaine, dimanche 14 septembre 2003 au soir au samedi 20 septembre 2003 à midi