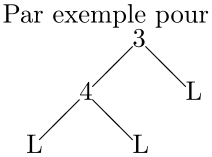
Exercices sur le lambda-calcul typé

Marieke Huisman

Octobre 2002

1. Construire la dérivation de typage (dans le contexte vide) pour les expression suivantes :
   (a) $\lambda x : \mathtt{int}.\lambda f : \mathtt{int} \to \mathtt{int} \to \mathtt{int}.\lambda y : \mathtt{int}.f\ x\ y$
   $: \mathtt{int} \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to \mathtt{int} \to \mathtt{int}$
   (b) $\lambda f : \mathtt{int} \to \mathtt{int}.\lambda g : \mathtt{int} \to \mathtt{int}.\lambda x : \mathtt{int}.f(g\ x)$
   $: (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to (\mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to \mathtt{int} \to \mathtt{int}$
   (c) $\lambda f : \mathtt{int} * \mathtt{int} \to \mathtt{int}.\lambda g : \mathtt{int} * \mathtt{int} \to \mathtt{int} * \mathtt{int}.\lambda x : \mathtt{int} * \mathtt{int}.$
   $\lambda y : \mathtt{int} * \mathtt{int}.f(g\langle \mathit{fst}(x), \mathit{snd}(y)\rangle)$
   $: (\mathtt{int} * \mathtt{int} \to \mathtt{int}) \to (\mathtt{int} * \mathtt{int} \to \mathtt{int} * \mathtt{int}) \to$
   $\mathtt{int} * \mathtt{int} \to \mathtt{int} * \mathtt{int} \to \mathtt{int}$
2. (a) Construire la fonction qui représente $\mathit{sum} = n \mapsto \sum_{i=0}^{n} i$ dans le lambda-calcul typé, en utilisant le récurseur $R_{\mathbb{N}}$.
   (b) Construire les fonctions qui calculent :
   – le nombre de feuilles,
   – le nombre de nœuds internes,
   – la somme des éléments.
   dans un arbre binaire. Par exemple pour l'arbre suivant :



   nombre de feuille : 3, nombre de nœuds : 2, somme des éléments 7.
3. Le type *list* des listes est construit par les constantes *nil* et *cons* de la façon suivante :
   (a) *nil* a le type *list*
   (b) si n a le type `int` et si l a le type *list* alors $\mathit{cons}\ n\ l$ a le type *list*. Définir le récurseur R_L pour ce type et les règles de réductions correspondantes.
4. Faire l'inférence de types pour les expressions suivantes :
   (a) $\lambda x.\ \mathit{plus}\ (\mathit{fst}\ x)\ (\mathit{snd}\ x)$,
   (b) $\lambda xyf.\ \mathit{plus}\ (f\ (\mathit{plus}\ x\ y))\ x$,

(c) $\lambda xyz.\ plus\ (x\ y)\ (z\ y)$,

(d) $\textsf{let}\ x = \lambda x.\ x\ \textsf{in}\ x\ x$.