Examen de sémantique des langages de programmation
Solutions

Yves Bertot

Janvier 2002

1 Exercice de sémantique naturelle

1. voici les deux règles:

$$\frac{s \vdash e_1 \rightarrow v_1 \quad s \vdash e_2 \rightarrow v_2}{s \vdash minus(e_1, e_2) \rightarrow v_1 - v_2}$$

$$\frac{s \vdash e_1 \rightarrow v_1 \quad s \vdash e_2 \rightarrow v_2}{s \vdash times(e_1, e_2) \rightarrow v_1 \times v_2}$$

2. Voici la dérivation, décomposée en sous dérivations:

$$\frac{D_1 \quad D_2 \quad D_3}{(y,1)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash I_1 \rightsquigarrow (y,4)\cdot(x,3)\cdot\emptyset}$$

D_1 est la dérivation suivante:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\overline{(x,3)\cdot\emptyset \vdash x \rightarrow 3}}{(y,1)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash x \rightarrow 3} \quad \overline{(y,1)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash y \rightarrow 1}}{(y,1)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash minus(x,y) \rightarrow 2} \quad \overline{(y,1)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash 0 \rightarrow 0}}{(y,1)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash greater(minus(x,y),0) \rightarrow true}$$

D_2 est la dérivation suivante:

$$\frac{\dfrac{\overline{(y,1)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash 2 \rightarrow 2} \quad \overline{(y,1)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash y \rightarrow 1}}{(y,1)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash times(2,y) \rightarrow 2} \quad \overline{(y,1)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash y, 2 \mapsto (y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset}}{(y,1)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash I_2 \rightsquigarrow (y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset}$$

D_3 est la dérivation suivante:

$$\frac{D_4 \quad D_5 \quad D_6}{(y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset \vdash I_1 \rightsquigarrow (y,4)\cdot(x,3)\cdot\emptyset}$$

D_4 est la dérivation suivante:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(x,3)\cdot\emptyset\vdash x\to 3}}{(y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash x\to 3}\quad\dfrac{}{(y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash y\to 2}}{(y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash minus(x,y)\to 1}\quad\dfrac{}{(y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash 0\to 0}}{(y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash greater(minus(x,y),0)\to true}$$

D_5 est la dérivation suivante:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash 2\to 2}\quad\dfrac{}{(y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash y\to 2}}{(y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash times(2,y)\to 4}\quad\dfrac{}{(y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash y,2\mapsto(y,4)\cdot(x,3)\cdot\emptyset}}{(y,2)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash I_2\rightsquigarrow(y,4)\cdot(x,3)\cdot\emptyset}$$

D_6 est la dérivation suivante:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(x,3)\cdot\emptyset\vdash x\to 3}}{(y,4)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash x\to 3}\quad\dfrac{}{(y,4)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash y\to 4}}{(y,4)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash minus(x,y)\to -1}\quad\dfrac{}{(y,4)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash 0\to 0}}{(y,4)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash greater(minus(x,y),0)\to false}}{(y,4)\cdot(x,3)\cdot\emptyset\vdash I_1\rightsquigarrow(y,4)\cdot(x,3)\cdot\emptyset}$$

2 Exercice de sémantique dénotationnelle

3.

$$Dom(F(f_1)) = \{0\}\times Z,$$

$$Dom(F(f_2)) = Z\times Z,$$

$$Dom(F(f_3)) = \{0\}\times Z\cup\{(x,y)|x>0\wedge y\leq x-1\},$$

$$Dom(F^2(f_1)) = \{0,1\}\times Z,$$

$$Dom(F^2(f_2)) = Z\times Z,$$

$$Dom(F^2(f_3)) = \{0,1\}\times Z\cup\{(x,y)|x>1\wedge y\leq x-2\},$$

$$Dom(F^k(f_1)) = \{0,1,\ldots,k\}\times Z,$$

$$Dom(F^k(f_2)) = Z\times Z,$$

$$Dom(F^k(f_3)) = \{0,1,\ldots,k\}\times Z\cup\{(x,y)|x>k-1\wedge y\leq x-k\},$$

4. $F(f_1)(1,2)$,$F(f_1)(2,3)$,$F(f_1)(3,3)$,$F^2(f_1)(2,3)$,$F^2(f_1)(3,3)$, $F^3(f_1)(3,3)$ ne sont pas définies.

$$F^2(f_1)(1,3) = 3+F(f_1)(0,3) = 3$$

$$F^3(f_1)(1,3) = 3+F^2(f_1)(0,3) = 3$$

$$F^3(f_1)(2,3) = 3+F^2(f_1)(1,3) = 3+3$$

5. Le plus petit point fixe de F est la fonction définie sur $N\times Z$ qui coincide avec la multiplication.

3 Sémantique axiomatique

6. `n>=0` $\Rightarrow$ `0 =< n & 0 = 0*0*0 & a = 3*0*0 + 3*0+1 &`
   `b = 6*0+6 & t = 6`

   ```
   x < n & x =< n & r = x*x*x & y = 3*x*x+3*x+1 & z=6*x+6 & t=6
   ⇒
   x+1 =< n & r+y=(x+1)*(x+1)*(x+1) & y+z=3*(x+1)*(x+1)+1 &
   z+t=6*(x+1)+6 & t = 6
   ```

   ```
   not(x<n) & x=< n & r=x*x*x & y = 3*x*x+3*x+1 &
   z = 6*x+6 & t = 6 ⇒ r=n*n*n
   ```

7. Il faut $a = 1$, $b = 6$ et $t = 6$.