

# Examen de sémantique des langages de programmation

Avril 2005

## 1 lambda-calcul

1. Construisez un terme du  $\lambda$ -calcul pur ayant 2 occurrences liées de la variable  $x$  et une occurrence libre de cette variable,
2. Donnez cinq fonctions  $n$ ,  $l$ ,  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $dec$  telles que l'on ait les réductions suivantes:

$$dec(n\ x\ y) \rightarrow^* T$$

$$dec\ l \rightarrow^* F$$

$$\pi_1(n\ x\ y) \rightarrow^* x$$

$$\pi_2(n\ x\ y) \rightarrow^* y$$

*Indication:* les fonctions  $n$  et  $l$  sont censées décrire les moyens de construire des arbres binaires qui sont soit des nœuds binaires, soit des feuilles. La fonction  $dec$  sert à distinguer entre les feuilles et les nœuds internes. Les fonctions  $\pi_1$  et  $\pi_2$  permettent de récupérer le premier fils et le deuxième fils d'un nœud binaire. Nous conseillons d'utiliser un multipllet avec le même nombre de champs pour  $n$  et  $l$ , même si certains champs sont inutiles dans l'un des cas.

## 2 lambda calcul typé

3. Les noms  $t_i$  dénotant des types de base, construisez des termes ayant les types suivants:

$$(t_1 \rightarrow t_2) \rightarrow (t_2 \rightarrow t_3) \rightarrow (t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow t_4) \rightarrow t_1 \rightarrow t_4$$

$$(t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3) \rightarrow (t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow t_4) \rightarrow (t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_4)$$

### 3 Sémantique naturelle

4. Construire une dérivation de sémantique naturelle pour l'exécution de l'instruction suivante dans l'environnement de départ  $(x, 0) \cdot (y, 0) \cdot \emptyset^1$ :

```
while (x>0){x:=x+1; {y:= x+2; x:=x-2}}
```

### 4 Sémantique dénotationnelle

5. Combien y a-t-il d'ordres partiels sur l'ensemble à trois éléments  $\{a, b, c\}$ ? Donnez-en quelques-uns qui soient représentatifs.
6. On considère l'ensemble  $\mathbb{N}_\perp$  des entiers naturels auquel on ajoute la valeur  $\perp$ , et l'ordre partiel complet  $\leq$  tel que  $x \leq y \Leftrightarrow x = \perp \vee x = y$ . Décrivez deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\perp$  telles  $f \leq g$  pour l'ordre induit. Construisez ensuite une suite de fonctions  $f_n$ , qui soit strictement croissante.

### 5 Sémantique axiomatique

5. Construisez un programme de quelques lignes qui suppose en entrée que la variable  $x$  contient une valeur positive ou nulle, qui modifie éventuellement plusieurs variables différentes de  $x$  et qui termine dans un état où  $y$  est la racine cubique de  $x$ . Annotez ce programme de façon à exprimer ces conditions et les invariants de boucle utilisés. Indiquez quelles sont les conditions de vérification engendrées pour ce programme. On préférera, si c'est possible, une solution qui n'effectue que des additions.

---

<sup>1</sup>Correction pendant l'examen, l'environnement de départ doit être  $(x, 1) \cdot (y, 0) \cdot \emptyset$ .