Examen de sémantique des langages de programmation

Yves Bertot

Janvier 2002

1 Exercice de sémantique naturelle

Nous utiliserons dans cet exercice les règles de sémantique naturelle telles qu'elles ont été données dans la première leçon auxquelles on ajoutera des règles pour l'évaluation des soustractions (représentées par un opérateur binaire `minus`) et des multiplications (représentées par un opérateur binaire `times`).

1. Donner ces règles.

On note I_1 l'instruction suivante

```
while x - y > 0 do
  y := 2 * y
done
```

et I_2 l'instruction `y:=2*y`.

2. Construire la dérivation de sémantique naturelle pour l'exécution de l'instruction I_1 dans l'environnement $(y, 1) \cdot (x, 3) \cdot \emptyset$.

2 Exercice de sémantique dénationnelle

On considère la fonction de second ordre F définie de la façon suivante:

$$F(f, x, y) = \text{si } x = 0 \text{ alors } 0 \text{ sinon } y + f(x - 1, y)$$

La fonction F prend donc trois arguments, dont le premier est une fonction à deux arguments entiers f et le second et le troisième sont des entiers. Si le deuxième argument est 0 alors le résultat est le nombre 0, si le deuxième argument est non nul, alors le résultat est la somme du troisième argument et du résultat de la fonction f appliquée au deuxième argument décrémenté de 1 et au troisième argument.

Soient f_1, f_2 et f_3 les trois fonctions à deux arguments suivantes:

- f_1 n'est définie nulle part,

- f_2 est la fonction d'addition,
- f_3 n'est définie que si son premier argument est supérieur ou égal à son deuxième argument et si les deux arguments sont positifs, elle coincide alors avec la fonction de soustraction.

Nous noterons $F(f)$ la fonction à deux arguments correspondant à la définition suivante:

$$F(f)(x, y) = F(f, x, y)$$

Nous noterons également $F^k(f)$ la fonction $F(\cdots F(f)\cdots)$ où le symbole F est répété k fois.

3. Donner les domaines de définition des fonctions $F(f_1)$, $F(f_2)$, $F(f_3)$, $F^2(f_1)$, $F^2(f_2)$, $F^2(f_3)$, $F^k(f_1)$, $F^k(f_2)$, et $F^k(f_3)$.

4. Donner lorsqu'elles existent les valeurs de $F^i(f_1)(j, 2)$ pour i et j compris entre 1 et 3 (inclus).

5. Quel est le plus petit point fixe de la fonction F.

3 Sémantique axiomatique et calcul de pré-condition la plus faible

On considère le programme suivant, annoté avec des assertions.

```
{n>=0}
x := 0;
y := a;
z := b;
t := c;
r := 0;
while x < n do
  invariant { x =< n & r = x*x*x &
              y = 3*x*x+3*x+1 &
              z = 6*x+6 &
              t = 6 }
  r := r + y;
  y := y + z;
  z := z + t;
  x := x + 1;
done
{r=n*n*n}
```

6. Qelles sont les conditions de vérifications engendrées pour ce programme.

7. Quelles valeurs faut-il choisir pour a, b, et c pour que ces conditions de vérifications soient vraies.