
Identification de paramètres magnétiques à l'intérieur d'un tokamak

Yannick Fischer*

** INRIA Bordeaux Sud-Ouest - Equipe MAGIQUE 3D
Université de Pau et des Pays de l'Adour
UFR Sciences, Bâtiment B1
Avenue de l'Université, BP 1155
F-64013 Pau Cedex
yannick.fischer@inria.fr*

RÉSUMÉ. Nous étudions le problème inverse de Cauchy consistant à retrouver des données magnétiques (le flux ainsi que sa dérivée normale) à l'intérieur d'un tokamak, plus précisément dans la région située à l'extérieur du plasma, et ce uniquement à partir de quantités magnétiques mesurées sur la frontière extérieure de la machine. L'originalité de l'approche proposée réside dans l'utilisation d'outils d'analyse complexe permettant de voir le problème inverse comme un problème de meilleure approximation sous contrainte. Une méthode constructive de résolution s'appuyant sur l'utilisation de bases d'harmoniques toroïdales est présentée.

ABSTRACT. We study the inverse Cauchy problem which consists in recovering magnetic data (the flux and its normal derivative) inside a tokamak, more precisely in the area located outside of the plasma, from their measurements on the outer boundary of the device. We propose an original approach which mostly relies on complex analysis tools so that the inverse problem is formulated as a best approximation one under constraint. A constructive resolution's method involving the use of toroidal harmonics basis is suggested.

MOTS-CLÉS : Problèmes inverses, problèmes extrémaux bornés, fonctions analytiques généralisées, espaces de Hardy.

KEYWORDS: Inverse problems, bounded extremal problems, generalized analytic functions, Hardy spaces.

1. Introduction

La fusion nucléaire constitue aujourd'hui une source d'énergie prometteuse, et ce en vue de subvenir aux besoins de la demande mondiale en perpétuelle augmentation. La production ainsi que la maîtrise de cette énergie sont actuellement envisagées via deux modes de réalisation, l'un procédant par confinement inertiel du plasma, l'autre par confinement magnétique. Nous nous intéressons uniquement à cette dernière dans ce papier.

Ainsi, le confinement magnétique est réalisé dans des machines appelées tokamaks. Il s'agit d'un concept mis au point par l'ex-Union Soviétique dans les années 50 signifiant "machine toroïdale à bobines magnétiques" et représentant à l'heure actuelle la meilleure approche quant à l'exploitation de l'énergie produite par la fusion. De nombreux tokamaks sont aujourd'hui utilisés pour la recherche tels que Tore Supra (France), JET (Angleterre), DIII-D (Etats-Unis), FTU (Italie), TCV (Suisse) ou encore ASDEX (Allemagne), et ce en vue de la construction de réacteur tel que ITER¹ (France) permettant la production d'énergie à une échelle commerciale. Les difficultés rencontrées lors de l'exploitation de telles machines sont multiples et suscitent des recherches aussi bien dans le domaine des matériaux que de celui du contrôle des plasmas. Nous renvoyons le lecteur à (Wesson, 2004) pour une introduction complète au concept du tokamak.

La présente étude s'intéresse quant à elle à l'identification en temps réel de certaines quantités magnétiques (champ, flux) inaccessibles par des mesures directes en raison des conditions de température et de pression régnant au sein du tokamak. La détermination précise de ces dernières donne accès en particulier à la position du plasma dont la connaissance revêt une importance fondamentale en vue de contrôler les réactions de fusion au sein de la machine. Il s'agit en effet d'éviter tout contact entre le plasma et les parois de la machine afin d'assurer à la fois la conservation de l'énergie de fusion et la stabilité des réactions. L'identification du flux magnétique et de sa dérivée normale que nous proposons relève alors de l'étude d'un problème inverse pour une équation de diffusion isotrope dans une géométrie doublement connexe. Il s'agit en effet de les retrouver dans le domaine situé entre la paroi extérieure du tokamak et la frontière du plasma (Figure 1) à partir de leur connaissance sur la paroi extérieure seule. Formellement, cela revient à résoudre un problème de Cauchy puisqu'une partie de la frontière de ce domaine supporte à la fois des conditions de Dirichlet-Neumann alors que le reste de la frontière n'en supporte aucune. Néanmoins, à cela s'ajoute une difficulté supplémentaire puisque la frontière du plasma n'est pas connue à l'avance. Formulé en ces termes, un tel problème est connu pour être mal posé au sens de Hadamard (Hadamard, 1923).

Il existe à ce jour un nombre important de techniques permettant de traiter la résolution du problème inverse de Cauchy. Dans leur grande majorité, celles-ci dérivent de la méthode de régularisation de Tikhonov (Tikhonov *et al.*, 1977) qui permet de transformer le problème initial mal posé en un problème bien posé (voir aussi, par

1. <http://www.iter.org>

exemple, la méthode de quasi réversibilité (Bourgeois *et al.*, 2010; Lattès *et al.*, 1967), les méthodes de transformation conforme (Haddar *et al.*, 2005; Haddar *et al.*, 2010) ou bien encore les méthodes itératives (Kozlov *et al.*, 1991)). Son application à la détermination de quantités magnétiques au sein du tokamak a déjà été largement traitée (Blum, 1989) et a notamment donné lieu à l'écriture de codes numériques tel que Apolo actuellement en service pour le tokamak *Tore Supra* en exploitation au CEA/IRFM de Cadarache en France.

L'objectif de ce papier est de proposer une approche originale pour la résolution du problème inverse en faisant appel à des techniques dérivant de l'analyse complexe. Essentiellement, il s'agit de tirer partie du fait que l'équation régissant l'évolution du flux magnétique dans le vide situé à l'intérieur de la machine puisse être vue comme une condition de compatibilité d'une équation complexe. L'étude des solutions de cette dernière conduit à la mise en place d'un cadre fonctionnel permettant l'introduction judicieuse de contraintes globales issues de considérations physiques et grâce auxquelles le problème inverse peut être stabilisé. Notons, et ce afin de positionner notre étude par rapport aux travaux (Blum, 1989; Blum *et al.*, 2011), que la résolution du problème inverse mise en place n'est valable qu'à l'extérieur du plasma. Ceci a pour conséquence qu'il ne nous est pas possible d'avoir accès aux paramètres caractéristiques du plasma telle que la densité de courant. Toutefois, pour ce qui est de la reconstruction de la frontière plasma, nos travaux se démarquent de ceux cités dans la mesure où l'E.D.P mise en jeu est uniquement intégrée sur le contour du domaine d'étude et non plus à l'intérieur de celui-ci. D'un point de vue algorithmique, ceci permet un gain de temps non négligeable, le but étant d'identifier la frontière plasma en temps réel. Du point de vue de l'approximation, cela nous permet d'exprimer la solution du problème inverse comme une combinaison de véritables solutions à l'équation étudiée ce qui, là encore, contraste avec les méthodes de résolution par éléments finis généralement mises en œuvre.

Le papier s'organise de la façon suivante. Dans un premier temps, nous décrivons la géométrie du problème à partir des éléments constitutifs du tokamak, ce qui nous permet d'indiquer dans quel domaine nous allons considérer l'équation d'évolution du flux magnétique poloïdal. Dans un deuxième temps, nous rappelons le lien entre cette équation réelle et l'équation complexe de Beltrami conjuguée. Les solutions de cette dernière nous permettent de définir des classes de fonctions dans lesquelles il est possible de reformuler le problème de Cauchy en un problème de meilleure approximation sous contrainte (problème extrémal d'adéquation aux mesures). Nous rappelons alors certains résultats prouvant que ce problème d'approximation est bien posé et admet une unique solution (Fischer *et al.*, A paraître). Enfin, dans la dernière partie, nous mettons en place une méthode constructive de calcul de cette solution à partir de solutions explicites de l'équation de Beltrami conjuguée obtenues dans le système de coordonnées toroïdales.

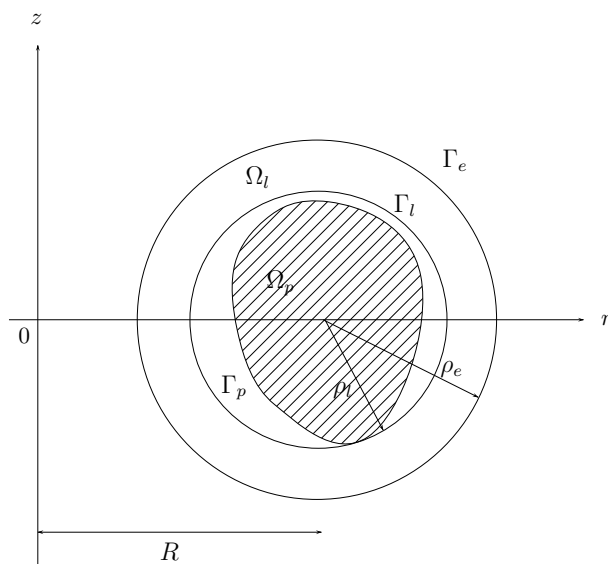


Figure 1. Section poloidale du tokamak

2. Modèle d'étude du plasma

Nous présentons dans cette section quelques caractéristiques géométriques d'un tokamak ainsi que le modèle d'équilibre du plasma que nous étudions.

Si (x, y, z) désigne le système de coordonnées cartésiennes, on note (r, φ, z) le système de coordonnées cylindriques de telle sorte que r représente la coordonnée radiale dans le plan (x, y) et φ l'angle toroïdal d'axe z .

L'axisymétrie (provenant de la symétrie de révolution autour de l'axe z) du tokamak permet de faire l'hypothèse que les quantités magnétiques sont indépendantes de la coordonnée φ . Aussi l'équilibre du plasma peut être étudié dans une section (r, z) , encore appelée section poloidale (voir Figure 1).

REMARQUE. — Le problème initial posé en trois dimensions se réduit donc à un problème en deux dimensions en les variables r et z . Ces dernières jouent donc désormais le rôle de coordonnées cartésiennes ce qui explique la forme des opérateurs différentiels (gradient, divergence) que nous utiliserons dans ce papier.

La Figure 1 est une représentation schématique d'une section poloidale d'un tokamak. Une description plus précise est visible sur la Figure 2 pour ce qui est du cas de

Tore Supra. Ici Γ_e désigne la paroi extérieure du tokamak alors que Γ_l est le limiteur. Ce dernier correspond à une pièce matérielle ayant pour but d'éviter tout contact entre le plasma Ω_p , de frontière Γ_p , et Γ_e . Autrement dit, le plasma ne peut pas évoluer au-delà de Γ_l . Le domaine situé entre le plasma et la frontière extérieure est occupé par le vide et nous désignons par Ω_l celui situé entre le limiteur et la frontière extérieure. Enfin on désigne par ρ_l et ρ_e les distances radiales, comptées à partir du centre $(R, 0)$ du cercle Γ_e , définissant le domaine annulaire Ω_l .

En notant alors u le flux magnétique poloidal et $\nabla = (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z})$, puis en écrivant les équations de Maxwell dans le vide, donc dans Ω_l , on obtient la loi d'évolution spatiale de u (Blum, 1989)

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r} \nabla u \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega_l . \quad [1]$$

Il s'agit donc d'une équation elliptique homogène du second ordre en dimension 2. La frontière plasma Γ_p est alors définie comme la dernière ligne de niveau de u entièrement contenue dans le limiteur, les lignes de niveau étant comptées à partir du centre magnétique du plasma (point de flux le plus important). Mentionnons aussi que l'équation [1] n'est plus valable à l'intérieur du plasma étant donné la présence de courants. Dans ce dernier cas, elle admet un second membre noté j_T désignant la composante toroïdale du vecteur courant \vec{j} et porte alors le nom d'équation de *Grad-Shafranov* (Blum, 1989).

Afin d'identifier la frontière plasma, il convient donc de déterminer les quantités u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ ($\frac{\partial u}{\partial n}$ désignant la dérivée normale de u) en tout point situé entre Γ_e et Γ_p à partir de leurs mesures sur Γ_e uniquement. Posée en ces termes, la question soulevée revient à résoudre un problème inverse à frontière libre. Signalons que dans le cadre de ce papier, ce problème est simplifié dans la mesure où les configurations du plasma que nous étudions sont restreintes aux configurations dites « limiteur » (le plasma a au moins un point de contact avec le limiteur). Ainsi, le flux magnétique ayant la particularité d'augmenter à mesure que l'on se rapproche radialement du centre magnétique du plasma, la ligne de niveau définissant Γ_p s'obtient en calculant le maximum de u sur Γ_l . On est ainsi ramené à un problème inverse posé dans Ω_l dont la géométrie est fixe.

3. Problème extrémal borné pour l'équation de Beltrami conjuguée

Du point de vue des notations, pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, on notera classiquement $L^2(\Omega)$ l'espace de Lebesgue des fonctions (à valeurs réelles ou bien complexes) de carrés intégrables sur Ω . La norme associée à cet espace est notée $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$. L'espace $W^{1,2}(\Omega)$ désignera quant à lui l'espace de Sobolev dont les éléments ainsi que leur dérivée au sens des distributions appartient à $L^2(\Omega)$. On notera aussi $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ l'espace des traces associé à $W^{1,2}(\Omega)$. Enfin $W^{1,\infty}(\Omega)$ désignera l'espace des applications bornées et lipschitziennes sur Ω .

Plaçons nous dans un premier temps dans un cadre un peu plus général que celui évoqué dans la Section 2. Pour cela, on note $\sigma \in W^{1,\infty}(\Omega_l)$ le coefficient **réel** de diffusion dont on suppose qu'il vérifie

$$0 < C_1 \leq \sigma(r, z) \leq C_2 \quad \text{dans } \Omega_l \quad [2]$$

avec C_1, C_2 des constantes strictement positives. Remarquons que dans l'équation [1], le coefficient $\sigma = \frac{1}{r}$ vérifie bien les hypothèses de bornitude [2]. On étudie alors le problème d'identification au travers de l'équation elliptique suivante :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{dans } \Omega_l, \quad [3]$$

Comme cela a déjà été mentionné, il s'agit d'un problème inverse mal posé. En réalité, moyennant le fait que l'on se munisse d'une topologie et d'un cadre fonctionnel permettant de formaliser la notion d'écart (ou d'erreur), il est en général possible de trouver des solutions de l'équation [1] approchant suffisamment près les mesures effectuées sur Γ_e . Néanmoins, forcer l'approximation de mesures, qui par nature sont entachées de bruit, mène classiquement à un comportement divergent de la solution sur la partie du bord où aucune information n'est disponible. Ce problème peut toutefois être régularisé en contraignant la solution cherchée à adopter un certain comportement sur cette partie du bord. En procédant ainsi, on transforme le problème de Cauchy initial en un problème de meilleure approximation sous contrainte qui, dans le cas particulier des espaces que nous allons introduire, sera nommé problème extrémal borné (**BEP** : **B**ounded **E**xtrémal **P**roblem).

Il est à noter que lorsque σ est constant, cette problématique revient à résoudre un problème de Cauchy pour l'opérateur Laplacien. Autrement dit à identifier les valeurs d'une fonction holomorphe dans son domaine d'holomorphie à partir de valeurs fournies sur une partie du bord de ce domaine. Cette question a déjà été activement étudiée en géométrie simplement et doublement connexe, notamment pour des données à la frontière de régularité L^2 (Alpay *et al.*, 1992; Baratchart *et al.*, 1998; Chalendar *et al.*, 1999).

3.1. Lien avec l'équation de Beltrami conjuguée

La résolution du problème de Cauchy pour l'équation [3] procède de l'étude des solutions d'une équation elliptique complexe du premier ordre appelée équation de Beltrami conjuguée (Astala *et al.*, 2006; Bers, 1953; Vekua, 1962) :

$$\bar{\partial} f = \nu \bar{\partial} f \quad \text{dans } \Omega_l, \quad [4]$$

où $\nu \in W^{1,\infty}(\Omega_l)$ est à valeurs **réelles** et vérifie

$$\|\nu\|_{L^\infty(\Omega_l)} \leq \kappa \quad \text{avec } \kappa \in (0, 1), \quad [5]$$

et où on utilise les notations classiques

$$\partial f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\partial}{\partial z} \right) f \quad \text{et} \quad \bar{\partial} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) f.$$

En effet, désignons par $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe. Il est alors facile de vérifier la proposition suivante :

Proposition 1 Soient ν et σ appartenant à $W^{1,\infty}(\Omega)$. Alors la fonction $f(r, z) = u(r, z) + iv(r, z)$ satisfait [4] si et seulement si u satisfait [3] avec $\sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu}$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} = -\sigma \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = \sigma \frac{\partial u}{\partial r} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad [6]$$

Preuve 1 Supposons dans un premier temps que $f = u + iv$ soit solution de [4] et que $\sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu}$. En injectant cette expression dans [4], on obtient directement le système [6] qui conduit au fait que u satisfait [3] alors que v satisfait $\nabla \cdot (\sigma^{-1} \nabla v) = 0$ dans Ω . Remarquons que la condition [5] implique bien [2].

Réciproquement, supposons que u soit solution à valeurs réelles de [3]. Alors la 1-forme différentielle $D = (D_1, D_2) = (\sigma \frac{\partial u}{\partial r}, -\sigma \frac{\partial u}{\partial z})$ satisfait $\frac{\partial D_1}{\partial r} = \frac{\partial D_2}{\partial z}$ et est donc fermée dans Ω simplement connexe. Par application du théorème de Poincaré, on en déduit l'existence d'une fonction v à valeurs réelles vérifiant [6]. Finalement, en posant $\nu = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$, on a directement que la fonction $f = u + iv$ satisfait l'équation [4]. Notons que v est obtenue par intégration du système [6] si bien qu'elle est définie à une constante additive près. Concluons en précisant à nouveau que la condition de bornitude [2] implique [5].

Remarque. –Lorsque $\sigma = 1$, le système [6] n'est rien d'autre que les équations de Cauchy-Riemann classiques. De plus, toujours pour $\sigma = 1$, on a que $\nu = 0$, si bien que l'équation [4] se réduit à $\bar{\partial}f = 0$ qui traduit ainsi l'holomorphie de f . Pour ces raisons, les solutions de [4] sont qualifiées de fonctions analytiques généralisées.

Il est important de noter que la démonstration de la Proposition 1 fait appel à la simple connexité de Ω . Le passage à un domaine doublement connexe, tel que Ω_l , fait quant à lui apparaître certaines difficultés. En effet, en reprenant la deuxième partie de la preuve de la Proposition 1, et plus particulièrement l'application du théorème de Poincaré, il n'est possible de garantir l'existence de v *a priori* que localement. Plus précisément, en appliquant la formule de Green, on obtient :

$$0 = \int_{\Omega_l} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \int_{\partial \Omega_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\Gamma_e} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} + \int_{\Gamma_i} \sigma \frac{\partial u}{\partial n}$$

où le vecteur unitaire normal est à chaque fois choisi extérieur au domaine Ω_l . Ainsi, dans la mesure où le système [6] peut être réécrit $\frac{\partial v}{\partial t} = \sigma \frac{\partial u}{\partial n}$ sur $\partial \Omega_l$, avec $\frac{\partial}{\partial t}$ désignant la dérivée tangentielle sur $\partial \Omega_l$, on constate que si $\int_{\Gamma_e} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \neq 0$, alors il en est de même pour $\int_{\Gamma_i} \frac{\partial v}{\partial t}$ et que par conséquent v , et donc f par construction, sont multivaluées. On voit donc que pour donner un sens à v , et donc f , en tant que fonctions monovaluées sur Ω_l tout entier, il est nécessaire que la condition de compatibilité

$\int_{\Gamma_e} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ soit satisfaite. Nous observerons dans la Section 4 que cette condition est mise en défaut par les mesures effectuées sur Γ_e . Il est néanmoins possible de remédier à ce problème en ajustant ces dernières par une solution fondamentale de l'opérateur $\nabla \cdot (\sigma \nabla)$ (voir, par exemple, (Leblond *et al.*, 2006) pour ce qui est du cas holomorphe, soit $\sigma = 1$, et pour lequel la solution fondamentale utilisée est $u = \log |z|$).

3.2. Espaces de Hardy généralisés

Nous allons introduire dans cette section des espaces fonctionnels reliés à l'équation [4] et dont la structure va nous permettre de transformer le problème de Cauchy en un problème d'approximation sous contrainte bien posé pour des données à la frontière de régularité L^2 . Remarquons que cette hypothèse de régularité est cohérente avec le contexte physique dans la mesure où elle renvoie à l'utilisation de mesures d'énergie finie, seul cadre que nous souhaitons nous fixer. Il s'agit toutefois d'une hypothèse de régularité plus faible, et donc plus générale, que celles couramment utilisées dans la littérature. Ceci conduit logiquement à certaines difficultés mathématiques, en particulier en ce qui concerne l'identification des espaces auxquels appartiennent les fonctions que nous manipulons. Ainsi, si on suppose $u|_{\Gamma_e}$ de régularité plus grande, comme par exemple appartenant à l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{1/2,2}(\Gamma_e)$, alors il est connu que le problème de Dirichlet associé à l'équation [3] admet une unique solution dans $W^{1,2}(\Omega_l)$ (Campanato, 1980). Se pose alors naturellement la question de savoir si cela est encore le cas pour une régularité au bord L^2 .

Nous noterons désormais $\mathbb{D}_{R,\varrho}$ le disque de centre $(R, 0)$ et de rayon ϱ ainsi que $\mathbb{T}_{R,\varrho}$ sa frontière. On définit alors les espaces de Hardy généralisés de la manière suivante :

Définition 1 Soit $\nu \in W^{1,\infty}(\Omega_l)$ satisfaisant [5]. On appelle $H_\nu^2(\Omega_l)$ l'espace de Hardy généralisé correspondant à l'ensemble des fonctions f Lebesgue mesurables sur Ω_l , solutions de [4] au sens des distributions dans Ω_l et satisfaisant

$$\|f\|_{H_\nu^2(\Omega_l)} := \operatorname{ess\,sup}_{\varrho_l \leq \varrho \leq \varrho_e} \|f\|_{L^2(\mathbb{T}_{R,\varrho})} < +\infty \quad [7]$$

où

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}_{R,\varrho})} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(R + \varrho e^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

Equipé de la norme définie par [7], qui est en fait équivalente à $\|\cdot\|_{L_\nu^2(\partial\Omega_l)}$, on vérifie facilement que $H_\nu^2(\Omega_l)$ est un espace de Hilbert réel. Par ailleurs, la relation [7] implique que $f \in L^2(\Omega_l)$.

Ces espaces permettent de donner un cadre approprié pour étudier les solutions de l'équation [4] lorsqu'on dispose de données à la frontière de régularité L^2 . A ce stade, il convient de préciser que les calculs menés dans la Proposition 1 gardent un sens au

niveau distributionnel. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à (Baratchart *et al.*, 2010; Fischer, 2011).

Précisons dans un premier temps que les espaces H_ν^2 partagent les mêmes propriétés que les espaces de Hardy classiques $H^2(\Omega_l)$ (Duren, 1970), que ce soit dans une géométrie simplement connexe (Baratchart *et al.*, 2010; Fischer *et al.*, 2011) ou bien doublement connexe (Fischer, 2011). On retiendra ici simplement que chaque élément $f \in H_\nu^2(\Omega_l)$ admet une limite non tangentielle presque partout sur $\partial\Omega_l$ avec laquelle il s'identifie (non isométriquement mais avec équivalence des normes). Cette limite est appelée la trace de f et notée $tr f$. On a par ailleurs que l'espace $tr H_\nu^2(\Omega_l)$ est fermé dans $L^2(\partial\Omega_l)$. Enfin terminons ces propriétés en mentionnant que tout élément de H_ν^2 se voit en contrôler en norme par sa partie réelle, soit

$$\forall f \in H_\nu^2(\Omega_l), \exists c = c(p, \sigma) \in \mathbb{R}_*^+, \|f\|_{H_\nu^2(\Omega_l)} \leq c \|u\|_{L^2(\partial\Omega_l)}. \quad [8]$$

Introduisons maintenant deux opérateurs dont nous aurons l'usage lors de la résolution du BEP. On note \mathcal{P}_ν la projection orthogonale de $L^2(\partial\Omega_l)$ sur $tr H_\nu^2(\Omega_l)$. Cet opérateur n'est autre que l'extension naturelle de l'opérateur de projection de Riesz utilisé dans le cadre analytique classique (Garnett, 1981). Il peut être évalué au moyen d'un autre opérateur \mathcal{H}_ν appelé transformée de Hilbert. Ce dernier, quant à lui, se définit ainsi : soit $(u_e, u_l) \in L^2(\partial\Omega_l) = L^2(\Gamma_e) \times L^2(\Gamma_l)$. Si les équations [6] sont intégrables, au sens où la condition de compatibilité $\int_{\Gamma_e} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ est vérifiée, alors il existe une unique fonction f solution de [4] tel que la partie réelle de la trace de f sur $\partial\Omega_l$ soit exactement la donnée (u_e, u_l) . Autrement dit, le problème de Dirichlet associé à [4] admet une unique solution (Fischer, 2011). L'opérateur \mathcal{H}_ν est alors celui qui à la trace de la partie réelle de f associe la trace de la partie imaginaire de f , soit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu : L^2(\partial\Omega_l) &\rightarrow L^2(\partial\Omega_l) \\ (u_e, u_l) &\mapsto (v_e, v_l) \end{aligned}$$

si on note $f = u + iv$ avec $f|_{\Gamma_e} = u_e + iv_e$ et $f|_{\Gamma_l} = u_l + iv_l$. Ainsi définie, la fonction v est encore appelée fonction conjuguée de u . Le lien entre les opérateurs \mathcal{H}_ν et \mathcal{P}_ν s'exprime alors à travers le résultat suivant (Astala *et al.*, 2006) :

$$\forall f \in L^2(\partial\Omega_l), \mathcal{P}_\nu f = \frac{1}{2}(I + i\mathcal{H}_\nu)f + \frac{1}{2}Lf \quad [9]$$

avec L l'opérateur de valeur moyenne sur Γ_e , c'est-à-dire $L\varphi = \frac{1}{|\Gamma_e|} \int_{\Gamma_e} \varphi$ pour tout $\varphi \in L^2(\Gamma_e)$.

3.3. Résultat de densité et résolution du BEP

Il est possible de formuler le problème d'identification des paramètres magnétiques dans les classes de Hardy généralisées introduites à la Section 3.2. Ainsi, la

première étape à mettre en place concerne un résultat fondamental de densité affirmant que toute fonction à valeurs complexes définie sur Γ_e peut être approchée arbitrairement près, en norme L^2 , par la trace d'une fonction de $H_\nu^2(\Omega_l)$. Il s'énonce ainsi (Fischer, 2011) :

Théorème 1 *Les restrictions à Γ_e des traces des fonctions de $H_\nu^2(\Omega_l)$ sont denses dans $L^2(\Gamma_e)$.*

A partir de données magnétiques disponibles sur Γ_e , il est possible de composer la fonction $F_d = u + iv \in L^2(\Gamma_e)$ telle que $\int_{\Gamma_e} \frac{\partial v}{\partial t} = \int_{\Gamma_e} \sigma \frac{\partial u}{\partial n}$ d'après les formules (6). Le Théorème 1 nous assure qu'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0} \in H_\nu^2(\Omega_l)$ dont la trace sur Γ_e converge vers F_d dans $L^2(\Gamma_e)$. Maintenant, le fait que le problème de Cauchy soit mal posé se retrouve dans le comportement de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ sur Γ_l , à savoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|tr f_n\|_{L^2(\Gamma_l)} = +\infty$. Pour se rendre compte de ceci, supposons le contraire, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|tr f_n\|_{L^2(\Gamma_l)} \neq +\infty$. Alors, quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite $(tr f_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans $L^2(\Gamma_l)$. Or par hypothèse $(tr f_n)_{n \geq 0}$ est déjà bornée dans $L^2(\Gamma_e)$, ce qui assure que la suite $(tr f_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans $L^2(\partial\Omega_l)$. Elle l'est finalement dans $H_\nu^2(\Omega_l)$ étant donné l'équivalence des normes évoquée dans la section 3.2. Le fait que $H_\nu^2(\Omega_l)$ soit un espace de Hilbert permet d'en déduire l'existence d'une sous suite $(tr f_{n_p})_{p \geq 0}$ convergeant faiblement vers un certain élément f de $H_\nu^2(\Omega_l)$. Maintenant il est clair que la restriction à Γ_e de cette sous suite converge faiblement vers la restriction à Γ_e de f dans $L^2(\Gamma_e)$. Dans la mesure où F_d est la limite forte de $(tr f_n)_{n \geq 0}$, donc aussi de $(tr f_{n_p})_{p \geq 0}$, dans $L^2(\Gamma_e)$, il s'en suit que $F_d = f$ (presque partout) sur Γ_e .

On conclut donc que seules deux possibilités peuvent se présenter : soit F_d est déjà la trace sur Γ_e d'une fonction de $H_\nu^2(\Omega_l)$; ou bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|tr f_n\|_{L^2(\Gamma_l)} = +\infty$. Le comportement de la solution du problème d'identification est donc fortement lié à la nature des données disponibles sur le bord extérieur de la machine, illustrant ainsi le caractère instable du problème étudié. Remarquons qu'en théorie F_d devrait appartenir à l'espace $tr H_\nu^2(\Omega_l)$ puisque les mesures effectuées sur le bord extérieur sont la conséquence de réactions physiques obéissant à l'équation d'évolution [3] de u dans le domaine annulaire Ω_l . Mais ceci n'est en général pas vrai principalement à cause des erreurs de mesures inhérentes aux capteurs.

Il existe toutefois un moyen de prévenir ce genre d'instabilités en contraignant le comportement de la solution sur Γ_l . Ceci permet de transformer le problème d'identification, qui se veut être au départ un problème d'extension de mesures faites sur Γ_e , en un problème d'approximation sous contrainte dans une classe de fonctions \mathcal{B}_{Ω_l} définie de la façon suivante :

Définition 2 *Soient $M \in \mathbb{R}_*^+$ et $\phi \in L^2(\Gamma_l)$. On note*

$$\mathcal{B}_{\Omega_l} = \{g \in tr H_\nu^2(\Omega_l); \|g - \phi\|_{L^2(\Gamma_l)} \leq M\}_{|\Gamma_e} \subset L^2(\Gamma_e).$$

Cet espace fournit un cadre approprié pour la résolution du BEP :

Théorème 2 Soient $M \in \mathbb{R}_*^+$ et $\phi \in L^2(\Gamma_l)$ fixés. Pour toute fonction $F_d \in L^2(\Gamma_e)$, il existe une unique solution $g^* \in \mathcal{B}_{\Omega_l}$ au problème de minimisation

$$\|F_d - g^*\|_{L^2(\Gamma_e)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{\Omega_l}} \|F_d - g\|_{L^2(\Gamma_e)}.$$

De plus, si $F_d \notin \mathcal{B}_{\Omega_l}$, alors la contrainte sur Γ_l est saturée : $\|g - \phi\|_{L^2(\Gamma_l)} = M$.

Pour la preuve de ce résultat nous renvoyons à (Fischer, 2011). Notons que si le principe de la démonstration reste identique à celui effectué dans le cas simplement connexe (Baratchart *et al.*, 1998; Fischer *et al.*, 2011), les éléments constitutifs de cette dernière, à savoir le Théorème 1 et la propriété [8], sont le résultat d'une extension non triviale d'arguments déjà connus dans le disque.

Par ailleurs, le cadre hilbertien adopté dans ce papier permet d'exprimer le minimiseur g^* du Théorème 2 comme la solution d'une équation variationnelle faisant intervenir l'opérateur de projection orthogonal \mathcal{P}_ν défini dans la Section 3.2. Une généralisation naturelle des résultats de (Alpay *et al.*, 1992) aux espaces H_ν^2 fournit immédiatement que pour $F_d \notin \mathcal{B}_{\Omega_l}$

$$g^* = g^*(\lambda) = (I + \lambda \mathcal{P}_\nu \chi_{\Gamma_l})^{-1} \mathcal{P}_\nu (\chi_{\Gamma_e} F_d + \chi_{\Gamma_l} (1 + \lambda) \phi) \quad [10]$$

où χ_{Γ_e} désigne la fonction caractéristique de Γ_e . Le coefficient $\lambda \in (-1, \infty)$ est alors l'unique paramètre de type Lagrange ajusté tel que la contrainte sur Γ_l soit saturée. Ajoutons que le cas où $F_d \in \mathcal{B}_{\Omega_l}$ ne pose quant à lui pas de difficulté particulière. En effet, le problème inverse d'identification est bien posé dans ce cas précis et sa résolution revient en fait à prolonger les mesures faites sur Γ_e dans Ω_l (ce qui correspond à la solution donnée par [10] avec $\lambda = -1$).

REMARQUE. — Signalons que la définition de la classe \mathcal{B}_{Ω_l} peut être modifiée. Ainsi le Théorème 2 reste vraie si dans \mathcal{B}_{Ω_l} la contrainte sur Γ_l porte uniquement sur la partie réelle ou la partie imaginaire de g ou bien même encore sur des combinaisons convexes de ces deux dernières.

4. Méthode constructive de résolution du BEP

On constate que pour rendre exploitable [10], il faut être capable de calculer la projection \mathcal{P}_ν d'une fonction $f = u + iv \in L^2(\partial\Omega_l)$. Pour ce faire, nous allons expliciter une famille de fonctions complète dans $trH_\nu^2(\Omega_l)$ sur laquelle seront projetés les éléments de $L^2(\partial\Omega_l)$ au moyen du produit scalaire découlant de la norme [7]. La méthode mise en place pour la détermination d'une telle famille de fonctions s'appuie sur la recherche de solutions explicites aux équations suivies par les parties réelles et imaginaires des éléments de $trH_\nu^2(\Omega_l)$, c'est-à-dire

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot (\sigma^{-1} \nabla v) = 0 \quad \text{dans } \Omega_l. \quad [11]$$

4.1. Coordonnées toroïdales et famille complète de solutions

Dans un premier temps nous nous intéressons uniquement à l'équation [3] vérifiée par le flux magnétique poloidal u . Si cette dernière est effectivement vérifiée, un calcul rapide montre que la fonction de trois variables $U(r, \varphi, z) = \frac{1}{r}u(r, z) \cos \varphi$ est harmonique dans Ω_l , c'est-à-dire $\Delta U = 0$ avec Δ le Laplacien en coordonnées cylindriques. Cette remarque permet alors de déterminer des solutions exactes de l'équation [3] en utilisant une méthode de séparation des variables pour l'équation de Laplace. Cependant, la réussite de cette technique est fortement conditionnée par le choix d'un système de coordonnées adapté à la topologie du tokamak ainsi que de celle des lignes de niveau que nous recherchons.

Nous faisons le choix des coordonnées toroïdales (τ, η, φ) définies par la transformation suivante (Morse *et al.*, 1953) :

$$r = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \eta} \quad \text{et} \quad z = a \frac{\sin \eta}{\cosh \tau - \cos \eta}, \quad [12]$$

la coordonnée angulaire φ étant identique à celle utilisée dans la géométrie cylindrique. Précisons seulement que $(a, \tau) \in \mathbb{R}_*^{+2}$ où le point $(r, z) = (a, 0)$ est appelé foyer (ou pôle) du système de coordonnées et $\eta \in [0, 2\pi]$. On observe en particulier que la définition du système toroïdal est subordonné au choix d'un foyer sur l'axe r . Dans une section poloidale, donc à φ constant, les coordonnées toroïdales constituent un système orthogonal permettant de repérer de manière unique un point du plan par l'intersection de deux cercles. Ces derniers appartiennent respectivement à deux familles de faisceaux de cercles correspondant aux lignes de niveau de τ (qui s'enroulent autour du foyer a) et η (qui passent par le foyer a et son symétrique par rapport à l'axe z).

La recherche de solutions explicites pour l'équation [3] dans ce système de coordonnées se fait alors au moyen d'une « quasi »-séparation de l'équation de Laplace, si bien qu'on obtient la famille de fonctions réelles $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ solutions de [3] (Alladio *et al.*, 1986; Lebedev, 1972; Morse *et al.*, 1953; Milligen *et al.*, 1994) :

$$\begin{aligned} u_j^p(\tau, \eta) &= a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \mathcal{P}_{j-1/2}^1(\cosh \tau) \begin{cases} \cos j\eta \\ \sin j\eta \end{cases} \\ u_j^q(\tau, \eta) &= a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \mathcal{Q}_{j-1/2}^1(\cosh \tau) \begin{cases} \cos j\eta \\ \sin j\eta \end{cases} \end{aligned} \quad [13]$$

où $(\mathcal{P}_{j-1/2}^1(\cosh \tau))_{j \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{Q}_{j-1/2}^1(\cosh \tau))_{j \in \mathbb{N}}$ désignent les fonctions de Legendre d'ordre 1, d'indices demi-entiers et d'argument $\cosh \tau$ respectivement de première et deuxième espèce (Abramowitz *et al.*, 1972).

On peut par le même processus montrer que l'équation régissant l'évolution de v , la quantité conjuguée de u , admet comme famille de solutions réelles $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ avec

$$v_j^p(\tau, \eta) = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \mathcal{P}_{j-1/2}^0(\cosh \tau) \begin{cases} \cos j\eta \\ \sin j\eta \end{cases} \quad [14]$$

$$v_j^q(\tau, \eta) = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \mathcal{Q}_{j-1/2}^0(\cosh \tau) \begin{cases} \cos j\eta \\ \sin j\eta \end{cases}$$

où cette fois-ci ce sont les fonctions de Legendre de degré 0 qui interviennent.

REMARQUE. — Rappelons que les fonctions de Legendre d'indices demi-entiers sont appelées harmoniques toroïdales. Elles sont un cas particuliers des fonctions de Legendre associées $X \in (1, \infty) \mapsto \mathcal{P}_\alpha^m(X), \mathcal{Q}_\alpha^m(X)$ d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ et de degré $m \in \mathbb{Z}$ solutions de l'équation différentielle

$$(1 - X^2)h'' - 2Xh' + \left[\alpha(\alpha + 1) - \frac{m^2}{1 - X^2} \right] h = 0.$$

REMARQUE. — **Dans un soucis de simplicité de lecture des fonctions de Legendre utilisées, nous faisons dorénavant le choix de ne plus mentionner l'argument $\cosh \tau$ ainsi que de les noter avec la lettre \mathcal{L} lorsqu'il n'y a pas lieu de distinguer les fonctions de première et deuxième espèce.**

Chacune des familles $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est complète dans $L^2(\partial\Omega_l)$ au sens où elle engendre un sous-espace dense dans $L^2(\partial\Omega_l)$ (Fischer, 2011). On notera que l'utilisation de telles familles se révèle adaptée à la géométrie doublement connexe que nous considérons. En effet, il est possible de montrer que toute solution des équations [11] doit présenter au moins une singularité dans chacune des composantes connexes du complémentaire de Ω_l (cette propriété doit se voir comme une généralisation de la décomposition en série de Laurent sur une couronne). C'est effectivement le cas ici dans la mesure où (Lebedev, 1972)

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{j-1/2}^m(\cosh \tau) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{Q}_{j-1/2}^m(\cosh \tau) = \infty, \quad m \in \{0, 1\},$$

les deux limites renvoyant respectivement à un point du plan convergeant vers le foyer a ou bien l'axe z . On comprend donc aussi que pour assurer la complétude des familles $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$, il est nécessaire de choisir un foyer a qui soit dans le plasma puisque les équations [11] n'y sont pas satisfaites. Ce point est discuté plus amplement dans (Fischer, 2011), et nous mentionnons seulement ici qu'il s'agit d'un problème difficile étant donné que la position du plasma n'est pas connue à l'avance. Par ailleurs, de ce choix dépendra aussi le conditionnement des systèmes linéaires à inverser pour résoudre le problème inverse.

REMARQUE. — Dans (Fischer *et al.*, 2011), on obtient des solutions explicites des équations [11] en pratiquant une séparation des variables directement sur r et z . Ces dernières font en particulier intervenir des fonctions de Bessel dont on vérifie facilement qu’elles présentent bien une singularité à l’infini, mais pas à l’intérieur du domaine d’étude. C’est pourquoi ces résultats sont uniquement exploitables pour une géométrie simplement connexe, ce qui n’est pas le cas de ce papier.

4.2. Estimation de la frontière plasma

Ainsi, présentons le type de résultats obtenus pour la reconstruction de la frontière plasma lorsque l’on dispose de données peu bruitées. La simulation qui suit a été réalisée à partir de mesures faites sur la frontière extérieure du tokamak *Tore Supra* utilisé au CEA/IRFM de Cadarache ainsi qu’avec le logiciel Matlab. Précisons que les harmoniques toroïdales n’étant pas présentes dans la bibliothèque de fonctions spéciales de Matlab, nous les évaluons à partir du code DTORH3 (version 2) (Gil *et al.*, 2000; Gil *et al.*, 2001). Les trois courbes présentées sur la Figure 2 représentent respectivement en partant de l’extérieur de la machine : la frontière extérieure Γ_e (qui est un cercle), le limiteur Γ_l (dont la forme résulte de l’assemblage de diverses pièces mécaniques) et la frontière (calculée) du plasma Γ_p . Le long de Γ_e figurent des croix rouges symbolisant les capteurs mesurant les composantes radiale et tangentielle du champ magnétique. Ces capteurs sont au nombre de 51. La mesure de ces deux composantes du champ magnétique permet d’avoir accès respectivement aux dérivées tangentielle et normale de u (Blum, 1989), mais aussi à u finalement par intégration. Les six cercles bleus symbolisent les capteurs effectuant une mesure directe du flux u . Notons que cette intégration est réalisée par rapport à une des valeurs de flux mesurées par les six capteurs symbolisés par les cercles bleus. Les distances figurant sur les axes de coordonnées sont exprimées en mètres. Toutes les mesures effectuées sont donc ponctuelles et ensuite interpolées le long de Γ_e par une méthode de splines cubiques. Enfin, rajoutons que les capteurs assurent un niveau de bruit inférieur à 1 % et que tous les résultats sont comparés à ceux obtenus avec des données non bruitées (données obtenues en phase de post-processing à partir du logiciel EFIT²).

REMARQUE. — On note que les capteurs mesurant directement le flux u sont au nombre de 6, ce qui est bien inférieur au nombre de capteurs mesurant les différentes composantes du champ magnétique. Un tel écart se justifie notamment par le fait que u est accessible par intégration de la composante tangentielle du champ magnétique, comme évoqué plus haut. Alors, en pratique, et en notant θ l’angle trigonométrique associé au cercle Γ_e , nous réalisons cette intégration par rapport au quatrième capteur compté dans le sens de parcours trigonométrique le long de Γ_e à partir de l’angle $\theta = 0$. Ce choix particulier est motivé par le fait qu’il s’agit du capteur le plus proche de la frontière du tokamak. Notons enfin que les mesures du flux fournies par les

2. <https://fusion.gat.com/THEORY/efit/overview.html>

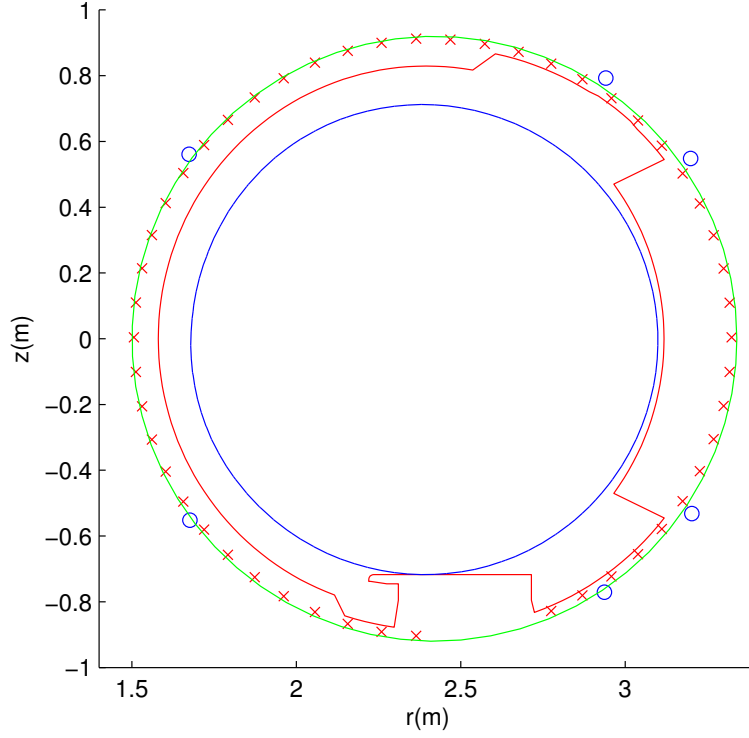


Figure 2. Reconstruction de la frontière du plasma dans Tore Supra

autres capteurs peuvent entrer dans la phase de vérification de l'identification que nous mettons en place.

Dans un premier temps, la donnée $u = Re(F_d)$ a été décomposée sous la forme

$$u(\tau, \eta) = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \times \sum_{j=0}^n \left[(\alpha_{j,c} \cos j\eta + \alpha_{j,s} \sin j\eta) P_{j-1/2}^1 + (\beta_{j,c} \cos j\eta + \beta_{j,s} \sin j\eta) Q_{j-1/2}^1 \right] \quad [15]$$

avec $n = 1$, soit 6 harmoniques toroïdales, par résolution des équations normales. L'utilisation d'un faible nombre d'harmoniques toroïdales permet d'obtenir rapidement une estimation de la frontière plasma.

Cette simulation montre que lorsqu'on dispose de données au bord peu bruitées, on peut reconstruire avec une certaine précision les données u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ à l'intérieur de la machine. En effet, les courbes obtenues respectivement par décomposition sur les harmoniques toroïdales des données bruitées et par EFIT se superposent. La valeur de u que nous calculons sur cette courbe est $u = 0.1573$ Wb (Weber) alors que la valeur théorique (EFIT) est $u = 0.1561$ Wb, soit une erreur relative de 0.8 %. Notons par ailleurs E_{mes} l'erreur relative quadratique sur le bord extérieur Γ_e entre le flux u mesuré et celui obtenu par décomposition en série, ainsi que E_{EFIT} celle entre le flux obtenu en post-processing à partir d'EFIT et cette même décomposition en série. On a alors que $E_{mes} = 3.1$ %. E_{EFIT} est du même ordre.

Remarquons qu'il est toujours possible de faire diminuer E_{mes} et E_{EFIT} en développant u sur un nombre plus important d'harmoniques toroïdales. Procéder de la sorte est bien entendu souhaitable lorsque les mesures effectuées restent peu bruitées (< 1 %). On veillera cependant à se limiter à une approximation dont l'erreur est du même ordre que le bruit afin de ne pas approximer ce dernier (sachant que théoriquement il est possible de faire tendre l'erreur vers 0 avec le résultat de densité du Théorème 1).

Nous proposons ici un algorithme qui peut être mis en œuvre pour la résolution du problème extrémal borné. Au terme de l'étape précédente, nous disposons d'une première estimation de la frontière plasma que nous notons Γ_p^0 ainsi que d'une valeur de flux u^0 associée (on note cependant que cette estimation procède d'une « simple » extension dans Ω_l de mesures effectuées sur Γ_e , ce qui signifie que le problème inverse n'a pas été régularisé). On est ainsi en mesure de définir un domaine doublement connexe Ω_p^0 tel que $\partial\Omega_p^0 = \Gamma_e \cup \Gamma_p^0$, ce qui constitue une condition nécessaire à la mise en place du problème extrémal. On peut en effet alors poser (voir la Définition 7 ainsi que la Remarque à la fin de la Section 3.3)

$$\mathcal{B}_{\Omega_p^0} = \{g \in trH_\nu^2(\Omega_p^0); \|Re g - u^0\|_{L^2(\Gamma_p^0)} \leq M\}_{|\Gamma_e},$$

Un avantage certain de poser le problème extrémal dans $\mathcal{B}_{\Omega_p^0}$ plutôt que dans \mathcal{B}_{Ω_l} tient au fait que la fonction u^0 est désormais explicitement connue sur Γ_p^0 et y est par ailleurs constante. La solution du problème extrémal s'obtient alors en résolvant l'équation [10] à M fixé. Notons que le choix de M est conditionné par la qualité de l'estimation Γ_p^0 obtenue en amont. En effet, si cette dernière présente un profil satisfaisant, alors M aura vocation à être petit. A contrario, si les données mesurées sur Γ_e ne permettent pas de calculer une estimation satisfaisante de Γ_p^0 , alors on aura intérêt à chercher des solutions g « s'écartant » de ce profil. Au terme de ces calculs, on obtient finalement une fonction g dont la partie réelle est relaxée par rapport à la valeur du flux calculée à la première étape et qui par ailleurs fait diminuer le critère d'approximation par rapport aux données F_d sur Γ_e . Ceci est justifié par le fait que

g minimise l'écart quadratique par rapport à F_d sur Γ_e dans la classe $\mathcal{B}_{\Omega_p^0}$ à laquelle appartient par construction la fonction f solution du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \bar{\partial} f = \nu \bar{\partial} \bar{f} & \text{dans } \Omega_p^0 \\ \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} F_d & \text{sur } \Gamma_e \\ \operatorname{Re} f = u^0 & \text{sur } \Gamma_p^0 \end{cases},$$

et qui n'est rien d'autre que la projection analytique généralisée de F_d obtenue à la première étape de l'algorithme.

Dès lors, une fois que g a été calculée, il est possible de déterminer son maximum sur le limiteur donnant ainsi accès à une nouvelle valeur de flux u^1 qui qualifie à son tour une nouvelle ligne de niveau Γ_p^1 pour la frontière plasma dont l'adéquation aux mesures F_d a été améliorée. Le processus de résolution du problème extrémal borné peut alors être répété cette fois-ci dans le domaine Ω_p^1 tel que $\partial\Omega_p^1 = \Gamma_e \cup \Gamma_p^1$. Cet algorithme conduit finalement à la création d'une suite de fonctions g associée à des domaines $(\Omega_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le critère d'approximation calculé pour cette suite de fonctions ne cessant de décroître, on choisit classiquement de l'arrêter lorsqu'il atteint une valeur avoisinant le bruit des mesures.

Pour conclure cette section, faisons remarquer que l'utilisation du problème extrémal borné se veut avant tout justifiée lorsque les données mesurées sur Γ_e se voient bruitées à un niveau supérieur à celui rencontré en phase de test normale. En effet, si le bruit reste inférieur à 1%, il semble raisonnable de calculer une approximation des différentes quantités magnétiques à l'aide d'un développement de type [15] avec un grand nombre d'harmoniques. Il serait en effet trop coûteux de faire appel au problème extrémal dans ce cas précis. A contrario, si les mesures sont suffisamment bruitées, il est préférable de se limiter à une première estimation de la frontière plasma construite à l'aide d'un nombre minimal d'harmoniques que l'on peut ensuite faire évoluer géométriquement avec la résolution du problème extrémal.

4.3. Résolution du BEP en coordonnées toroïdales

Afin de résoudre constructivement le BEP (par exemple selon l'algorithme exposé dans la Section 4.2), il nous faut déterminer une famille complète de fonctions dans $trH_\nu^2(\Omega_l)$ afin de calculer les projections analytiques \mathcal{P}_ν intervenant dans [9]. Remarquons que déterminer le mode opératoire de \mathcal{P}_ν sur les familles de fonctions [13] et [14] exhibées dans la Section 4.1 revient en fait à déterminer celui de l'opérateur \mathcal{H}_ν d'après [9]. La question posée est alors suivante : étant donné un élément \tilde{u} de la famille $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ (respectivement \tilde{v} de $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$), quelle est la fonction $v_{\tilde{u}}$ (respectivement $u_{\tilde{v}}$) telle que $f = \tilde{u} + iv_{\tilde{u}}$ (respectivement $f = u_{\tilde{v}} + i\tilde{v}$) satisfasse [4] en coordonnées toroïdales ? La réponse à cette question s'obtient en écrivant dans un premier

temps le système d'équations [6] en coordonnées toroïdales. A l'aide du changement de variables [12], un calcul simple montre que [6] se réécrit

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\cosh \tau - \cos \eta}{a \sinh \tau} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\cosh \tau - \cos \eta}{a \sinh \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_l. \quad [16]$$

La résolution de ce système en remplaçant successivement u et v par les éléments des familles [13] et [14] donne les associations de fonctions suivantes (Fischer, 2011) :

Proposition 2 *En notant F et E les intégrales elliptiques incomplètes de première et deuxième espèce écrites sous forme de Jacobi (Abramowitz et al., 1972), et c une constante réelle, on a :*

Pour la famille de fonctions [13] :

$$- \text{Si } u_1 = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \mathcal{L}_{-1/2}^1 \text{ alors}$$

$$v_{u_1} = -\frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} \mathcal{L}_{-1/2}^1 F \left(\cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) - \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} \mathcal{L}_{-1/2}^0 E \left(\cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) + c$$

$$- \text{Si } u_2 = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \mathcal{L}_{k+1/2}^1 \cos(k+1)\eta \text{ avec } k \geq 0 \text{ alors}$$

$$v_{u_2} = -\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \mathcal{L}_{k+1/2}^0 \sin((k+1)\eta) - \sum_{j>0}^k \mathcal{L}_{j-1/2}^0 \sin(j\eta) \right] + v_{u_1} + c$$

$$- \text{Si } u_3 = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \mathcal{L}_{k-1/2}^1 \sin k\eta \text{ avec } k \geq 1 \text{ alors}$$

$$v_{u_3} = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) \mathcal{L}_{k-1/2}^0 \cos(k\eta) - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{-1/2}^0 - \sum_{j>0}^{k-1} \mathcal{L}_{j-1/2}^0 \cos(j\eta) \right] + c.$$

Pour la famille de fonctions [14] :

– Si $v_1 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \mathcal{L}_{-1/2}^0$ alors

$$u_{v_1} = 2a \left[\frac{\sin \eta}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^0 - \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^1 F \left(\cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) - \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^0 E \left(\cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right] + c$$

– Si $v_2 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \mathcal{L}_{k+1/2}^0 \cos(k+1)\eta$ avec $k \geq 0$ alors

$$u_{v_2} = \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[\frac{2}{2k+1} \mathcal{L}_{k+\frac{1}{2}}^1 \sin((k+1)\eta) + \sum_{j>0}^k \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} \mathcal{L}_{j-\frac{1}{2}}^1 \sin(j\eta) \right] + u_{v_1} + c$$

– Si $v_3 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \mathcal{L}_{k-1/2}^0 \sin k\eta$ avec $k \geq 1$ alors

$$u_{v_3} = \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[-\frac{2}{2k-1} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 \cos(k\eta) + 2\mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^1 - \sum_{j>0}^{k-1} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} \mathcal{L}_{j-\frac{1}{2}}^1 \cos j\eta \right] + c.$$

Ces associations de fonctions ne sont cependant pas suffisantes pour affirmer être en possession de familles complètes de $tr H_\nu^2(\Omega_l)$. Elles ont en effet été obtenues par intégration des équations [6] sur Ω_l qui est doublement connexe. Cela implique, conformément aux remarques faisant suite à la Proposition 1, que parmi ces fonctions certaines sont multivaluées. C'est effectivement le cas de v_{u_1} et u_{v_1} lorsqu'elles sont écrites avec la fonction de Legendre \mathcal{L} de première espèce \mathcal{P} , et par conséquent aussi celui de v_{u_2} et u_{v_2} pour tout $k \geq 0$. Il est néanmoins possible, grâce à des combinaisons astucieuses de toutes ces fonctions, d'exhiber une famille complète de $tr H_\nu^2(\Omega_l)$ (Fischer, 2011). On dispose ainsi d'un moyen effectif de calculer l'opérateur de projection \mathcal{P}_ν ouvrant ainsi la voie à la mise en place de l'algorithme de résolution du BEP de la Section 4.2.

5. Conclusion

Ce papier présente une méthode d'identification de paramètres magnétiques, mais aussi de la frontière plasma, à l'intérieur d'un tokamak avec application à Tore Supra. La résolution de ce problème inverse de type Cauchy s'appuie sur une régularisation dans des espaces de Hardy généralisés. La topologie de ces derniers permet de traiter la question dans un cadre fonctionnel plus général que celui de méthodes variationnelles classiques. La résolution constructive du problème s'appuie quant à elle sur le calcul de bases semi-explicites de solutions à l'équation du flux (produit de fonctions de Legendre et de fonctions circulaires en coordonnées toroïdales) en géométrie annulaire.

Nous formulons par ailleurs un algorithme de résolution dans ces bases en reformulant le problème initial en un problème extrémal d'adéquation aux données dans les classes de Hardy généralisées. Cette démarche nous permet de fournir un critère qualifiant un estimé donné de la frontière libre du plasma. La méthode, qui ne requiert pas d'intégration de l'équation dans le domaine, est adaptée à une identification rapide, enjeu crucial de la maîtrise des réactions de fusion.

Les premiers tests d'identification sur Tore Supra pour des plasmas en configuration « limiteur » semblent prometteurs (voir aussi (Fischer, 2011)). Ils ouvrent ainsi la voie à une application pour des tokamaks tels que JET ou ITER non sans toutefois soulever certaines difficultés supplémentaires. Les géométries de ces derniers sont en effet plus complexes que celle de Tore Supra (frontière extérieure non circulaire). De plus, on y privilégie la réalisation de plasmas dont la frontière présente un point X et n'a plus de point de contact avec le limiteur (Blum *et al.*, 2011), et ce afin d'augmenter la stabilité des plasmas. Cela implique, en particulier, la mise en place d'une stratégie adéquate pour le choix du foyer des coordonnées toroïdales afin que ce dernier soit le plus proche possible du centre magnétique du plasma.

Remerciements

L'auteur remercie particulièrement François Saint Laurent, ingénieur de recherche au CEA/IRFM, pour la mise à disposition de données Tore Supra ainsi que pour toutes les discussions, remarques et conseils ayant contribué à la réalisation de ce travail.

6. Bibliographie

- Abramowitz M., Stegun I., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, 1972.
- Alladio F., Crisanti F., « Analysis of MHD equilibria by toroidal multipolar expansions », *Nuclear Fusion*, vol. 26, p. 1143, 1986.
- Alpay D., Baratchart L., Leblond J., « Some extremal problems linked with identification from partial frequency data », *Proc. 10 Conf. Analyse Optimisation Systemes*, Springer-Verlag, 1992.

- Astala K., Paivarinta L., « Calderón's inverse conductivity problem in the plane », *Annals of Mathematics*, vol. 163, p. 265-299, 2006.
- Baratchart L., Leblond J., « Hardy approximation to L^p functions on subsets of the circle with $1 \leq p < \infty$ », *Constructive Approximation*, vol. 14, p. 41-56, 1998.
- Baratchart L., Leblond J., Rigat S., Russ E., « Hardy spaces of the conjugate Beltrami equation », *Journal of Functional Analysis*, vol. 259, p. 384-427, 2010.
- Bers L., *The Theory of Pseudoanalytic Functions*, Lectures Notes, New York University, 1953.
- Blum J., *Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics with Applications to Tokamaks*, Wiley Gauthier-Villars, Paris, 1989.
- Blum J., Boulbe C., Faugeras B., « Reconstruction of the equilibrium of the plasma in a Tokamak and identification of the current density profile in real time », *J. Comp. Phys*, 2011.
- Bourgeois L., Dardé J., « A duality-based method of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem in the presence of noisy data », *Inverse Problems*, vol. 26, p. 095016(21 pp), 2010.
- Campanato S., *Elliptic Systems in Divergence Form, Interior Regularity*, Quaderni, Scuola Normale Superiore Pisa, 1980.
- Chalendar I., Partington J., « Approximation problems and representations of Hardy spaces in circular domains », *Studia Mathematica*, vol. 136, p. 255-269, 1999.
- Duren P., *Theory of H^p Spaces*, vol. 38 of *Pure Appl. Math.*, Academic Press, 1970.
- Fischer Y., Approximation dans des classes de fonctions analytiques généralisées et résolution de problèmes inverses pour les tokamaks, Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00643239/fr>, 2011.
- Fischer Y., Leblond J., Partington J., Sincich E., « Bounded extremal problems in Hardy spaces for the conjugate Beltrami equation in simply connected domains », *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 31, p. 264-285, 2011.
- Fischer Y., Marteau B., Privat Y., « Some inverse problems around the tokamak Tore Supra », *Communications on Pure and Applied Mathematics*, A paraître.
- Garnett J., *Bounded Analytic Functions*, vol. 96 of *Pure Appl. Math.*, Academic Press, 1981.
- Gil A., Segura J., « Evaluation of toroidal harmonics », *J. Comp. Phys*, 2000.
- Gil A., Segura J., « A new version of computer program for the evaluation of toroidal harmonics », *J. Comp. Phys*, 2001.
- Hadamard J., *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, New Haven Yale University Press, 1923.
- Haddar H., Kress R., « Conformal mappings and inverse boundary value problems », *Inverse Problems*, vol. 21, p. 1-19, 2005.
- Haddar H., Kress R., « Conformal mappings and impedance tomography », *Inverse Problems*, vol. 26, p. 074002(18 pp), 2010.
- Kozlov V., Mazya V., Fomin A., « An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equation », *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 31, p. 45-52, 1991.
- Lattès R., Lions J., *Méthode de Quasi-réversibilité et Applications*, Dunod, 1967.
- Lebedev N., *Special Functions and their Applications*, Dover Publications, 1972.

- Leblond J., Mahjoub M., Partington J., « Analytic extensions and Cauchy-type inverse problems on annular domains : stability results », *Journal of Inverse Ill-Posed Problems*, vol. 14, p. 189-204, 2006.
- Milligen B., Lopez Fraguas A., « Expansion of vacuum magnetic fields in toroidal harmonics », *Computer Physics Communications*, vol. 81, p. 74-90, 1994.
- Morse P., Feshbach H., *Methods of Theoretical Physics*, Cambridge University press, 1953.
- Tikhonov A., Arsenin V., *Solutions to Ill-Posed Problems*, Winston-Wiley, 1977.
- Vekua I., *Generalized Analytic Functions*, Addison-Wesley Publi. Co., 1962.
- Wesson J., *Tokamaks*, vol. 118 of *International Series of Monographs on Physics*, Oxford University Press Inc., New York, Third Edition, 2004.