Prova scritta di C*omunicazioni Elettriche* A.A. 2004-05

Caltanissetta, *23/09/2005* *Prof. V. Mancuso*

Candidato
cognome: ……….…………….…… nome: ……………………..…
matricola: ……………………….

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

Esercizio n.1

Si calcolino i coefficienti della serie di Fourier associata alla ripetizione periodica, con periodo T=4, del segnale a energia finita definito come segue:

$$s_T(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-2;-1] \cup [1;2] \\ |t| & t \in [-1;1] \\ 0 & |t| > 2 \end{cases}$$

Soluzione:
Nella ripetizione periodica del segnale dato, avendo scelto come periodo T=4, non ci sono sovrapposizioni. I coefficienti della serie di Fourier del segnale periodicizzato sono:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) e^{-j2\pi\frac{n}{T}t} dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left[rect\left(\frac{t}{4}\right) - trg(t)\right] e^{-j2\pi\frac{n}{4}t} dt = \frac{1}{4} F\left\{rect\left(\frac{t}{4}\right) - trg(t)\right\}\Bigg|_{f=\frac{n}{4}} =$$

$$\frac{1}{4}\left[4Sinc(4f) - Sinc^2(f)\right]_{f=\frac{n}{4}} = Sinc(n) - \frac{1}{4}Sinc^2\left(\frac{n}{4}\right)$$

Esercizio n.2

Calcolare la correlazione incrociata ***γ(t)*** fra i seguenti segnali determinati:

$$a(t) = e^{-t}u(t)$$
$$b(t) = e^{-2t}u(t)$$

Si calcoli inoltre l'espressione della densità spettrale di energia incrociata fra i due segnali.

Soluzione:
i segnali sono a energia finita e reali, pertanto la loro correlazione incrociata vale:

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} a^*(t) b(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} u(t) e^{-2(t+\tau)} u(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t-2\tau} u(t) u(t+\tau) dt = \int_{\max(0,-\tau)}^{\infty} e^{-3t-2\tau} dt =$$

$$= \int_{-\min(0,\tau)}^{\infty} e^{-3t-2\tau} dt = \frac{1}{3} e^{3\min(0,\tau)-2\tau} = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{\tau} & \tau < 0 \\ \frac{1}{3} e^{-2\tau} & \tau \geq 0 \end{cases}$$

Per la densità spettrale di energia si operi per definizione oppure si trasformi la funzione di correlazione:

$$S_{ab}(f) = A^*(f) B(f) = \frac{1}{1 - j2\pi f} \cdot \frac{1}{2 + j2\pi f} = \frac{1}{(2 + 4\pi^2 f^2) - j2\pi f}$$

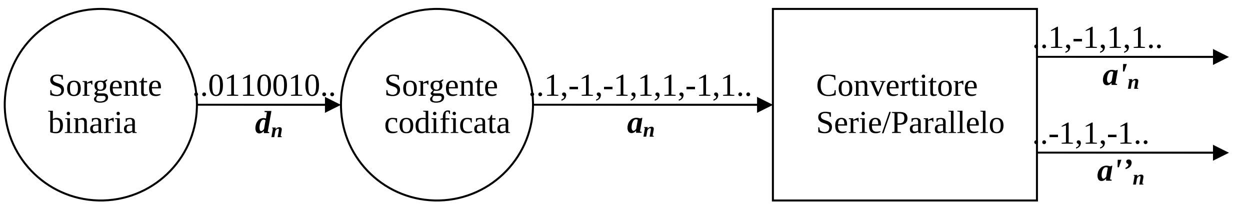
Esercizio n.3

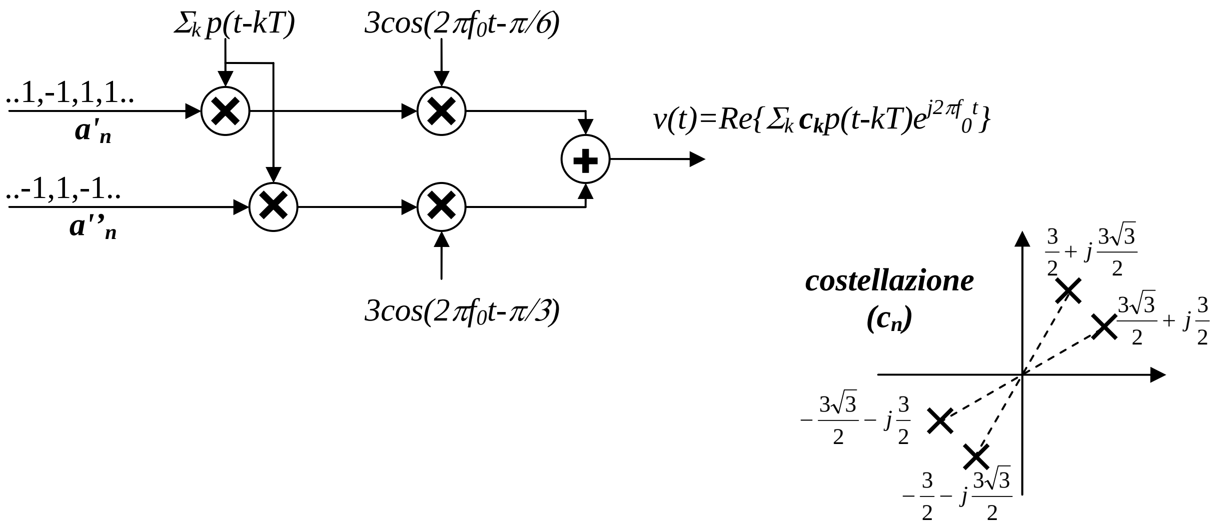
Si considerino due modulazioni ASK ottenute con due sequenze binarie indipendenti e stazionarie codificate con codifica bipolare, con dati equiprobabili. Entrambe le modulazioni utilizzano un intervallo di simbolo pari a $T = 5\ ms$, e la stessa portante con frequenza $f_0 = 200\ MHz$, uguale ampiezza pari a 3, ma con sfasamenti diversi e pari rispettivamente a 30° e 60°.

Si studi la modulazione ottenuta dalla somma delle due ASK in questione, rappresentandone la costellazione dei segnali a radio-frequenza e calcolandone la densità spettrale di potenza, supponendo di adoperare un impulso di segnalazione $p(t) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$.

Soluzione:

Lo schema del modulatore è quello di seguito riportato:





$$c_n \in \left\{ \frac{3}{2} + j\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2} + j\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2} - j\frac{3}{2} \right\},$$

i dati sono equiprobabili, stazionari e indipendenti.

L'autocorrelazione dei dati vale:

$$R_c(k) = E\left[c_n^* \cdot c_{n+k}\right] = \begin{cases} E\left[|c_n|^2\right] = 9 & k = 0 \\ E\left[c_n^*\right] \cdot E\left[c_n\right] = 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$R_c(k) = 9 \cdot \delta(k)$$

Quindi la densità spettrale di potenza dei dati vale:

$$W_c(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_c(k) e^{-j2\pi kTf} = 9$$

La densità spettrale dell'inviluppo complesso è dunque:

$$W_w(f) = \frac{1}{T}|P(f)|^2 W_c(f) = \frac{1000}{5} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1000} \cdot Sinc\left(\frac{5f}{1000}\right)\right]^2 \cdot 9 = \frac{9}{800} Sinc^2\left(\frac{f}{200}\right)$$

Infine, la densità spettrale di potenza del segnale a radio frequenza si ottiene come segue:

$$W_v(f) = \frac{1}{4}\left[W_w(f - f_0) + W_w(-f - f_0)\right] = \frac{9}{3200}\left[Sinc^2\left(\frac{f - 2 \cdot 10^8}{200}\right) + Sinc^2\left(\frac{f + 2 \cdot 10^8}{200}\right)\right]$$

<u>Esercizio n.4</u>

Ipotizzando di avere a disposizione un canale di trasmissione affetto da rumore gaussiano a media nulla, stazionario, additivo e bianco con densità spettrale $\eta=5$, si calcoli la probabilità di errore per simbolo per una trasmissione a radio-frequenza rappresentata dalla seguente costellazione:

$$c_n \in \{2 + 2j, -2 + 2j, -2 - 2j, 2 - 2j\}$$

Si tenga conto del fatto che i simboli trasmessi sono equiprobabili.

Soluzione:
il segnale ricevuto ha due componenti che si possono entrambe vedere come variabili casuali gaussiane a media pari alla componente del segnale non affetta da rumore e varianza pari alla densità spettrale di potenza del rumore gaussiano di partenza ($\sigma^2=\eta=5$), infatti, detta n_x la componente di rumore sull'asse x, e considerando che il rumore ipotizzato è a media nulla e densità spettrale costante:

$$n_x = < n(t), \sqrt{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t) rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right) > = \int_0^T \sqrt{\frac{T}{2}} n(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) d\tau$$

$$E[n_x] = E\left[\int_0^T \sqrt{\frac{T}{2}} n(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) d\tau\right] = \int_0^T \sqrt{\frac{T}{2}} E[n(\tau)] \cos(2\pi f_0 \tau) d\tau = 0$$

$$Var[n_x] = E\left[\int_0^T \sqrt{\frac{T}{2}} n(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) d\tau \cdot \int_0^T \sqrt{\frac{T}{2}} n(\vartheta)\cos(2\pi f_0\vartheta) d\vartheta\right] =$$

$$= \int_0^T \int_0^T \frac{T}{2} E[n(\tau) n(\vartheta)] \cos(2\pi f_0 \tau)\cos(2\pi f_0 \vartheta) d\tau d\vartheta =$$

$$= \int_0^T \int_0^T \frac{T}{2} \eta \delta(\vartheta - \tau)\cos(2\pi f_0 \tau)\cos(2\pi f_0 \vartheta) d\tau d\vartheta = \int_0^T \frac{T}{2} \eta \cos^2(2\pi f_0 \tau) d\tau \approx \eta = \sigma^2$$

Analogamente, per la componente lungo l'asse y:

$$n_y = < n(t), \sqrt{\frac{T}{2}} \sin(2\pi f_0 t) rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right) > = \int_0^T \sqrt{\frac{T}{2}} n(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau) d\tau$$

$$E[n_y] = 0$$

$$Var[n_y] = \int_0^T \frac{T}{2} \eta \sin^2(2\pi f_0 \tau) d\tau \approx \eta = \sigma^2$$

Le regioni di decisione, nel caso in questione coincidono con i quadranti sul piano complesso.
La probabilità di errore condizionata alla trasmissione del simbolo $s_1=2+2j$ è dunque la seguente:

$$P_{e|s_1} = 1 - \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-2)^2+(y-2)^2}{2\sigma^2}} dxdy = 1 - \left(\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2\sigma^2}} dx\right)^2 = 1 - \left(\int_{-2}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx\right)^2 =$$

$$= 1 - \left(1 - \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx\right)^2 = 1 - \left(1 - \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx\right)^2 = 1 - \left(1 - \int_{\sqrt{\frac{4}{2\sigma^2}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt\right)^2 =$$

$$= 1 - \left[1 - \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\right)\right]^2$$

Tale valore, per simmetria, si trova anche per le probabilità di errore condizionate agli altri simboli trasmessi. Pertanto, essendo i simboli equiprobabili, esso rappresenta anche la probabilità di errore cercata.

<u>Esercizio n.5</u>

Si stabiliscano la frequenza di campionamento e le caratteristiche del filtro antialias necessario per campionare un segnale vocale senza distorcere i toni fino a 16 KHz.

Soluzione: si utilizzi un filtro rettangolare di da -16KHz a +16KHz di ampiezza unitaria, e si campioni a 32000 campioni al secondo.