Prova scritta di C*omunicazioni Elettriche* A.A. 2004-05
Caltanissetta, 16/09/2005 *Prof. V. Mancuso*

Traccia delle soluzioni

Esercizio n.1

Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale:

$$s(t)=\begin{cases}1 & t\in[-2;-1]\cup[1;2]\\ |t| & t\in[-1;1]\\ 0 & |t|>2\end{cases}$$

Si dica se il segnale è a banda limitata o meno.

Soluzione:

si consideri il segnale scritto nella forma: $s(t)=rect\left(\frac{t}{4}\right)-trg(t)\Rightarrow S(f)=4\cdot Sinc(4f)-Sinc^2(f)$

Il segnale è a durata strettamente limitata e a banda non limitata.

Esercizio n.2

Calcolare la forma del segnale ***y(t)*** che si ottiene filtrando un ingresso ***x(t)*** la cui trasformata di Fourier vale

$$X(f)=2\cdot rect\left(\frac{f}{3}\right)+3\cdot rect\left(\frac{f-7}{2}\right)+3\cdot rect\left(\frac{f+7}{2}\right)+5\cdot rect\left(\frac{f-10}{3}\right)+5\cdot rect\left(\frac{f+10}{3}\right)$$

considerando che il filtro è di tipo lineare e tempo-invariante e la sua risposta in frequenza vale:

$$H(f)=f^2\cdot rect\left(\frac{f}{4}\right)$$

Soluzione:

$$Y(f)=H(f)\cdot X(f)=2f^2\cdot rect\left(\frac{f}{3}\right)=-\frac{1}{2\pi^2}\cdot(j2\pi f)^2\cdot rect\left(\frac{f}{3}\right)$$

$$\Rightarrow y(t)=-\frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\left(F^{-1}\left\{rect\left(\frac{f}{3}\right)\right\}\right)=-\frac{3}{2\pi^2}\cdot\frac{d^2}{dt^2}Sinc(3t)=$$

$$=-\frac{3}{2\pi^2}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{3\pi t\cdot 3\pi\cdot\cos(3\pi t)-3\pi\cdot\sin(3\pi t)}{(3\pi t)^2}\right]=-\frac{3}{2\pi^2}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{\cos(3\pi t)}{t}-\frac{\sin(3\pi t)}{3\pi t^2}\right]=$$

$$=-\frac{3}{2\pi^2}\cdot\left[\frac{-3\pi t\cdot\sin(3\pi t)-\cos(3\pi t)}{t^2}-\frac{(3\pi t)^2\cos(3\pi t)-6\pi t\cdot\sin(3\pi t)}{(3\pi t^2)^2}\right]=$$

$$= -\frac{3}{2\pi^2}\cdot\left[-\frac{3\pi\cdot\sin(3\pi t)}{t}-\frac{\cos(3\pi t)}{t^2}-\frac{\cos(3\pi t)}{t^2}+\frac{6\cdot\sin(3\pi t)}{9\pi t^3}\right]=$$

$$= -\frac{3}{2\pi^2}\cdot\left[\frac{\sin(3\pi t)}{t}\left(\frac{2}{3\pi t^2}-3\pi\right)-2\cdot\frac{\cos(3\pi t)}{t^2}\right]=\left[\frac{27}{2}-\frac{3}{(\pi t)^2}\right]\cdot Sinc(3t)+\frac{3}{(\pi t)^2}\cdot\cos(3\pi t)$$

In alternativa, si può procedere per definizione:

$$y(t) = F^{-1}\{H(f)\cdot X(f)\} = F^{-1}\{H(f)\cdot X(f)\} = F^{-1}\left\{2f^2\cdot rect\left(\frac{f}{3}\right)\right\} = \int_{-3/2}^{3/2} 2f^2 e^{j2\pi ft}df =$$

$$=\left[f^2\frac{e^{j2\pi ft}}{j\pi t}\right]_{-3/2}^{3/2}-\int_{-3/2}^{3/2}2f\frac{e^{j2\pi ft}}{j\pi t}df = \frac{27}{2}Sinc(3t)-\left[f\frac{e^{j2\pi ft}}{(j\pi t)^2}\right]_{-3/2}^{3/2}+\int_{-3/2}^{3/2}\frac{e^{j2\pi ft}}{(j\pi t)^2}df =$$

$$=\frac{27}{2}Sinc(3t)+\frac{3\cdot\cos(3\pi t)}{(\pi t)^2}+\left[\frac{e^{j2\pi ft}}{2\cdot(j\pi t)^3}\right]_{-3/2}^{3/2} = \frac{27}{2}Sinc(3t)+\frac{3\cdot\cos(3\pi t)}{(\pi t)^2}+\frac{2j\cdot\sin(3\pi t)}{2\cdot(j\pi t)^3}=$$

$$=\frac{27}{2}Sinc(3t)+\frac{3\cdot\cos(3\pi t)}{(\pi t)^2}-\frac{3\cdot Sinc(3t)}{(\pi t)^2}=\left[\frac{27}{2}-\frac{3}{(\pi t)^2}\right]\cdot Sinc(3t)+\frac{3}{(\pi t)^2}\cdot\cos(3\pi t)$$

Esercizio n.3

Calcolare l'integrale di convoluzione ***c(t)*** fra i seguenti segnali:

$$a(t)=e^{-t}u(t)$$
$$b(t)=e^{-2t}u(t)$$

Soluzione:

$$c(t)=a(t)*b(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}u(\tau)\cdot e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau=\begin{cases}\int_0^t e^{-2t+\tau}d\tau & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow c(t)=e^{-2t+\tau}\Big|_0^t u(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$$

Alternativamente, si può operare nel dominio della frequenza, antitrasformando alla fine l'espressione di *A(f)B(f)* scomposta in fratti semplici.

Esercizio n.4

Si consideri un sistema di modulazione a radio-frequenza i cui simboli siano rappresentati dai seguenti valori complessi, che si ipotizzano essere indipendenti, stazionari ed equiprobabili:

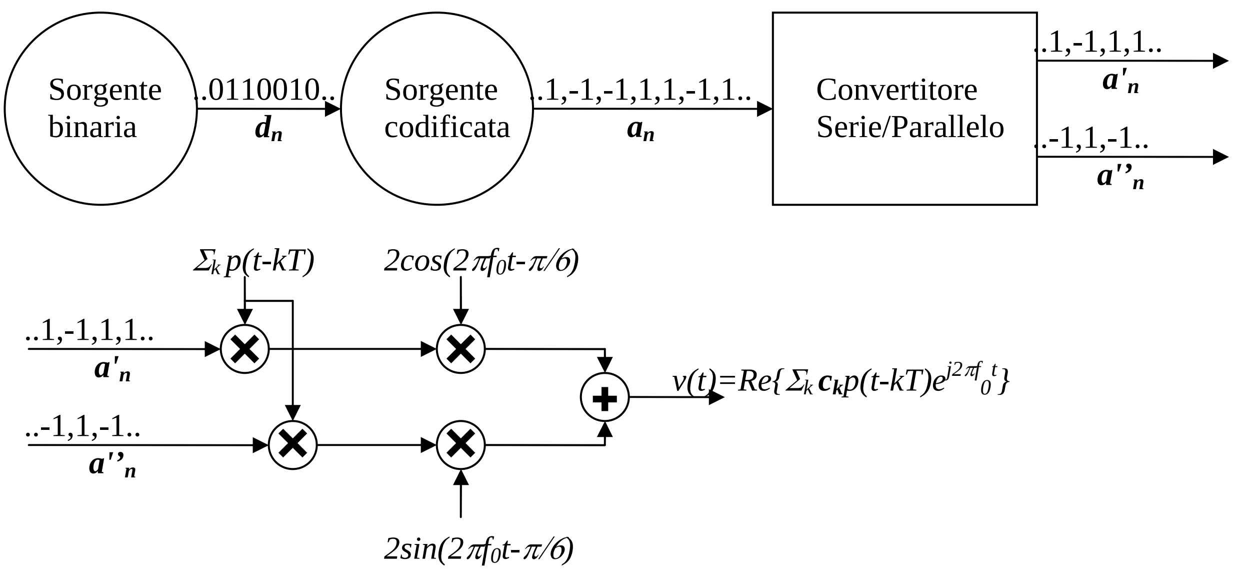
$$c_n \in \left\{\sqrt{3}+j;\quad -1+j\sqrt{3};\quad -\sqrt{3}-j;\quad 1-j\sqrt{3}\right\}$$

La frequenza portante della modulazione sia f_0*=1 MHz*, l'intervallo di simbolo *T=0,01 s*, e l'impulso di segnalazione sia di tipo rettangolare: $p(t) = rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$. Il segnale trasmesso a radio-frequenza avrà pertanto la seguente forma:

$$v(t) = \mathrm{Re}\left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, p(t - nT)\right] \cdot e^{2\pi f_0 t}\right\}$$

Si rappresenti graficamente lo schema del modulatore, a partire da una sorgente di dati binari $\boldsymbol{d_n}$ codificati in modalità bipolare in una sequenza $\boldsymbol{a_n}$.da cui poi si ricavino i simboli $\boldsymbol{c_n}$ ipotizzati.
Si calcoli inoltre la densità spettrale di potenza della trasmissione a radio-frequenza.

Soluzione:
il modulatore ha il solito schema di una PSK a quattro punti di modulo pari a 2, ma con portante ruotata in ritardo di 30° (in senso antiorario):



L'autocorrelazione dei dati vale:

$$R_c(k) = E\left[c_n^* \cdot c_{n+k}\right] = \begin{cases} E\left[|c_n|^2\right] = 4 & k = 0 \\ E\left[c_n^*\right] \cdot E\left[c_n\right] = 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$R_c(k) = 4 \cdot \delta(k)$$

Quindi la densità spettrale di potenza dei dati vale:

$$W_c(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_c(k) e^{-j2\pi kTf} = 4$$

La densità spettrale dell'inviluppo complesso è dunque:

$$W_w(f) = \frac{1}{T}|P(f)|^2 W_c(f) = 100 \cdot [0{,}01 \cdot Sinc(0{,}01 f)]^2 \cdot 4 = \frac{1}{25} Sinc^2\left(\frac{f}{100}\right)$$

Infine, la densità spettrale di potenza del segnale a radio frequenza si ottiene come segue:

$$W_v(f) = \frac{1}{4}\left[W_w(f - f_0) + W_w(-f - f_0)\right] = \frac{1}{100}\left[Sinc^2\left(\frac{f - 10^6}{100}\right) + Sinc^2\left(\frac{f + 10^6}{100}\right)\right]$$

Esercizio n.5

Si prenda in considerazione una modulazione ASK binaria caratterizzata da un intervallo di simbolo ***T=0,02 s*** e dai segnali s_0 e s_1 rispettivamente collegati ai simboli binari ***0*** e ***1*** come di seguito riportato:

$$\begin{cases} d = 0 \Rightarrow s_0(t) = 5 \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ d = 1 \Rightarrow s_1(t) = -5 \cdot \cos(2\pi f_0 t) \end{cases}$$

Nell'ipotesi che i segnali attraversino un canale ***AWGN***, e che il ricevitore adotti il criterio di Bayes per la rivelazione dei simboli trasmessi, si calcolino le probabilità di emissione dei bit ***0*** e ***1*** della sorgente, sapendo che:

a) il rumore introdotto dal canale è a media nulla e varianza $\sigma^2 = 9$
b) le regioni di decisione adottate sono (*r* sia la componente del segnale ricevuto secondo il versore di base dell'ASK definita sopra):

$$\begin{cases} d = 0 \leftrightarrow R_0 \equiv \left\{ r \in R \mid r > \frac{5}{3}\sqrt{\frac{T}{2}} \right\} \\ d = 1 \leftrightarrow R_1 \equiv \left\{ r \in R \mid r < \frac{5}{3}\sqrt{\frac{T}{2}} \right\} \end{cases}$$

Soluzione:
si applichi il criterio di Bayes, considerando che nel punto di separazione (*L*) delle due regioni di decisione le probabilità di errore pesate con le probabilità di emissione dei bit, devono essere uguali:

$$L = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$p_0 p_{e|0}(L) = p_1 p_{e|1}(L)$$

$$\Rightarrow p_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(L - 5\cdot\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2}{2\sigma^2}} = p_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(L + 5\cdot\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow p_0 e^{-\frac{\left(L - 5\cdot\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2}{2\sigma^2}} = (1 - p_0) e^{-\frac{\left(L + 5\cdot\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{p_0}{(1 - p_0)} = e^{-\frac{\left(L + 5\cdot\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2}{2\sigma^2} + \frac{\left(L - 5\cdot\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{10\cdot L}{\sigma^2}} = K$$

$$\Rightarrow p_0(1 + K) = K \Rightarrow p_0 = \frac{K}{1 + K} = \ldots = 0{,}4954$$

Esercizio n.6

Si enunci il teorema di Wiener-Khinchine per segnali determininati a potenza finita.

Soluzione: si veda il testo

$W(f) = F\{\gamma(\tau)\}$