



Université des Sciences et Technologies de Lille 1,
Ecole Doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur
Lille Nord-de-France

**Thèse pour obtenir le grade de
Docteur en Science de l'Université Lille 1**

présentée par **Saja BORGHOL**

le 15 septembre 2010

Discipline : **MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**

**MODÉLISATION MATHÉMATIQUE
DE LA CHARGE DE SURFACE DES SATELLITES
EN ORBITE BASSE**

Codirecteurs de thèse : Christophe BESSE et Thierry GOUDON

Membres du Jury

Christophe BESSE	Professeur	Université Lille 1	
Stéphane CORDIER	Professeur	Université Orléans	Rapporteur
Jean-Paul DUDON	Ingénieur Recherche	Thalès Alénia Space	
Thierry GOUDON	Directeur de Recherches à l'INRIA	Université Lille 1	
Claudia NEGULESCU	Maître de Conférences	Université Aix-Marseille 1	
Serge PIPERNO	Professeur	ENPC Paris	Rapporteur

RÉSUMÉ

On s'intéresse dans ce travail à la modélisation et la simulation numérique des phénomènes de charge auxquels sont sujets les satellites évoluant dans les orbites basses LEO (Low Earth Orbit) et polaires PEO (Polar Earth Orbit). Cette thèse fait suite à des études consacrées spécifiquement à l'environnement géostationnaire. Suivant l'orbite, les caractéristiques du plasma environnant changent et des modèles différents peuvent être exploités afin de décrire les interactions entre les particules chargées et les surfaces de l'engin spatial. Une bonne description de ces interactions est nécessaire afin de prévenir les phénomènes de charge électrique qui peuvent provoquer la perte de la mission. Les descriptions les plus complètes sont basées sur des équations de Vlasov-Boltzmann ou Vlasov-Fokker-Planck couplées aux équations de Maxwell. Le phénomène de charge est intimement lié aux conditions imposées sur les surfaces du satellite ; ces conditions non standards où interviennent des dérivées en temps du champ électrique font l'originalité de ces modèles.

Une analyse dimensionnelle des équations permet de dériver des hiérarchies de modèles et d'adopter certaines simplifications suivant les caractéristiques physiques du plasma. Dans le cas de l'orbite PEO, comme pour l'orbite GEO, une approche cinétique est proposée vu que le plasma n'est pas très collisionnel à ces altitudes. Le modèle est constitué de l'équation de Vlasov pour décrire l'évolution des particules, couplée à l'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique. Par contre, on suppose que le plasma LEO est collisionnel et un modèle bifluide est proposé. Il est constitué des équations d'Euler pour la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de l'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique. En fait, il est pertinent de considérer des versions stationnaires de ces équations, mais où la variable de temps intervient toujours via les termes de bord. Outre la dérivation de ces hiérarchies de modèles, on aborde plus précisément l'étude, au moins dans des situations simplifiées, de certaines propriétés mathématiques des modèles hydrodynamiques LEO et on propose des schémas numériques, basés sur des méthodes volumes finis et des stratégies de splitting, pour en permettre la simulation. En particulier, on introduit une définition des flux numériques pour l'hydrodynamique prenant en compte la formation de couche de Knudsen.

ABSTRACT

This work is devoted to the modeling and numerical simulations of the charging phenomena that spacecrafts evolving in LEO (Low Earth Orbit) and PEO (Polar Earth Orbit) atmospheres are subject to. The thesis follows studies concerned more specifically to the geostationary environment. Depending on the orbit, the characteristics of the surrounding plasma are changing and different models can be used to describe the interactions between the charged particles and the surfaces of the spacecraft. An accurate description of these interactions is necessary in order to prevent the electrical charge that might cause the loss of the mission. The most precise descriptions are based on Vlasov-Boltzmann or Vlasov-Fokker-Planck equations coupled to the Maxwell system. The charge phenomena is intimately related to the boundary conditions imposed on the surfaces of the spacecraft : the boundary conditions involve time derivative of the electric field which makes the originality of the model.

The dimension analysis of the equations leads to derive a hierarchy of models and allows to adopt several simplifications according to the physical characteristics of the plasma. For the PEO orbit, like for GEO, a kinetic approach has been proposed since the plasma is non collisional. It consists of the Vlasov equation for describing the particles, coupled to the Poisson equation for the electrostatic potential. By contrast, we assume that collisional effects are important for the LEO which leads to introduce a two-fluid model. It consists of the Euler equations for the conservation of mass, momentum, energy and the Poisson equation for the electrostatic potential. In fact, it is relevant to deal with stationary version of these equations, while the time variable still arises through the boundary terms. Beyond the derivation of hierarchies of models, we are more specifically interested in exhibiting, at least in simplified frameworks, some remarkable mathematical properties of the LEO hydrodynamic systems. We also design numerical schemes, based on finite volume methods and splitting strategies, to simulate the models. In particular we introduce a suitable definition of numerical fluxes for hydrodynamics that is intended to take into account the possible formation of Knudsen layers.

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements sont adressés tout d'abord à mes codirecteurs de thèse, Christophe BESSE et Thierry GOUDON pour avoir dirigé ce travail et pour m'avoir aidé à aller jusqu'au bout. Je n'oublierai jamais leurs qualités scientifiques, humaines et mentales qui ont contribué énormément à la progression de mes travaux de recherche.

Mes sincères remerciements sont également adressés à Jean-Paul DUDON, ingénieur à Thalès Alénia Space, pour sa confiance et ses conseils qu'il m'a accordé tout au long de ces années de travail.

Stéphane CORDIER, professeur à l'université d'Orléans, et Serge PIPERNO, professeur au ENPC, ont accepté de rapporter cette thèse. Leurs lectures attentives m'ont révélé certaines imprécisions, ce qui a permis d'améliorer mon travail. Je les remercie très sincèrement pour l'intérêt et le temps consacrés à ces travaux.

Je tiens à remercier également Claudia NEGULESCU, Maître de conférences à l'université Aix-Marseille 1, d'avoir examiné mon travail.

Merci à Ingrid LACROIX-VIOLET, Maître de conférences à l'université de Lille 1, pour ces coups de pouce, sa gentillesse et d'avoir participé à ma thèse.

Une attention toute spéciale s'adresse aux membres du laboratoire Paul Painlevé. Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous mes collègues pour les bons moments passés ensemble. Je pense en particulier à Houcine, Fethi, Manal, Basma, Mouzher, Qidi, Saleh, Youcef, Amandine, Chen, Wei, Alexis, Rola, Soumaya, Haydar, Ismail. Je remercie aussi Stéphane et Catherina pour leurs conseils précieux.

Je garde une place toute particulière pour ma famille mes deux frères Mahmoud et Mohamad, mes quatre soeurs Rasha, Rouba, Rola, Rana, ma tante Wahiba et mon oncle Abdel Fatah. Je voudrais leur exprimer toute ma profonde reconnaissance et je leur remercie du fond de mon coeur car ils m'ont constamment aidé, malgré la distance, par leur soutien moral et leurs encouragements pour achever cette thèse.

Je n'oublierai pas de remercier mes deux beaux frères Badra et Ayoubi pour leurs

soutiens. Je n'oublierai jamais ce que Rasha et Ayoubi m'ont offert de tranquillité durant mon accouchement et mon congé de maternité chez eux.

Je pense très fort à mon cadeau du ciel Rami, à tes beaux yeux bleus qui me reflètent plein de choses et qui me disent "tu me manque Maman", j'espère que tu me pardonnes pour mon absence....Je te promets de rattraper le temps perdu. Je remercie mon époux Malek avec qui j'ai partagé mes joies et mes soucis malgré la distance qui nous sépare.

Finalement, mille merci à ma maman Salam et mon papa Said pour leur soutien et leur encouragement. Je n'oublierai jamais ce que vous faites pour mon chouchou Rami durant mon absence.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	13
0.1 Première partie - Chapitre 1, 2 et 3 : Description d'un plasma, de la magnétosphère et des mécanismes de charge d'un satellite	14
0.2 Deuxième partie : Chapitre 4 et 5, Modélisation 3D des phénomènes de charges dans les orbites LEO et PEO	15
0.3 Troisième partie : Chapitre 6 et 7 : Modèles unidimensionnels du plasma LEO	18
I PHYSIQUE DES PLASMAS ET CHARGE D'UN SATELLITE	21
1 Plasma spatial environnant	23
1.1 Les plasmas	23
1.1.1 Interactions collectives	23
1.1.2 Interactions individuelles	23
1.2 Grandeurs fondamentales en physique des plasmas	24
1.2.1 Caractérisation des influences des interactions	24
1.2.2 Tables des paramètres du plasma	28
2 La magnétosphère	29
2.1 Introduction	29
2.2 Morphologie de la magnétosphère	30
2.3 L'ionosphère	34
2.4 La circulation magnétosphérique	34
3 Phénomène de charge d'un satellite	37
3.1 Les facteurs de charge	37
3.1.1 Charge absolue	39
3.1.2 Charge différentielle	39
3.1.3 Charge externe	40
3.2 Charge interne	41
3.3 Propriétés orbitales	41

II	MODÉLISATION	43
4	Mise en équations	45
4.1	Interactions plasma-satellite : phénomènes de bord	45
4.1.1	Interactions électrostatiques	46
4.1.2	Réémissions aux parois	51
4.2	Environnement plasmique : paramètres physiques	55
4.2.1	Modèles de charge dans les orbites basses (à 1400 km)	55
4.2.2	Caractéristiques du plasma LEO et PEO	55
4.3	Modèles cinétiques, modèles fluides	56
4.3.1	Equations cinétiques	56
4.3.2	Dérivation des équations fluides du plasma	58
4.3.3	Les équations fluides	58
5	Modèles pour les orbites LEO, PEO et analyse asymptotique	61
5.1	Grandeurs adimensionnées	61
5.2	Plasma d'orbite PEO : système de Vlasov-Poisson	63
5.2.1	Le système de Vlasov-Poisson	63
5.2.2	Système de Vlasov-Poisson adimensionné	64
5.2.3	Approximation pour le plasma d'orbite PEO	65
5.3	Plasma d'orbites LEO : modèles collisionnels et fluides	66
5.3.1	Limite quasi-neutre pour le modèle d'Euler-Poisson	66
5.3.2	Système d'Euler Poisson adimensionné	68
5.3.3	Passage à la limite formel pour $C' \gg 1$	68
5.3.4	Passage à la limite formelle pour $\eta' \rightarrow +\infty$	69
5.3.5	Autre adimensionnement du système d'Euler-Poisson	70
III	ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DU SYSTÈME D'EULER-POISSON 1D	73
6	Modèle simplifié 1D du phénomène de charge du satellite en orbites LEO	75
6.1	Introduction	76
6.2	L'évolution de la charge	77
6.3	Modélisation des ions et du potentiel aux bords du satellite	79
6.4	Modélisation du courant extérieur $J(t)$	80
6.5	Le modèle final	80
6.6	Problème de Cauchy pour le courant et comportement qualitatif	81
6.7	Problèmes aux limites pour la densité et le potentiel	86
6.7.1	Cas subsonique	88
6.7.2	Cas supersonique	95
6.8	Simulation numérique du modèle 1D	101
6.8.1	Présentation générale	101
6.8.2	Schéma pour le courant	102
6.8.3	Schéma pour la densité	102
6.8.4	Schéma pour le potentiel	103

6.8.5	Résultats numériques	103
6.9	Appendice du chapitre 6 : Preuves	106
6.9.1	Preuve de la proposition 6.1	106
6.9.2	Preuve de la proposition 6.3	107
6.9.3	Preuve de la proposition 6.4	108
6.9.4	Preuve de la proposition 6.5	109
7	Hydrodynamic Regimes, Knudsen Layer, Numerical Schemes : Definition of Boundary Fluxes	111
7.1	Description of the Objectives	111
7.2	Finite Volume Scheme for the Euler-Poisson System	112
7.3	A Simple Definition of Numerical Fluxes	114
7.4	Numerical Fluxes for Gas Dynamics Based on the Analysis of the Knudsen Layer	117
7.4.1	Hydrodynamic limits, entropy dissipation and boundary layer analysis	118
7.4.2	Finite Volume scheme and treatment of the boundary conditions . .	132
7.4.3	Numerical results	143
7.5	Linearized Analysis for the Euler-Poisson System	152
8	Annexe : Existence de solution supersonique d'un modèle hydrodynamique non isentropique en dimension 1	157
8.1	Introduction	157
8.2	Existence de solution supersonique	158
	Bibliographie	170

INTRODUCTION

Les problèmes de la charge et de la décharge des systèmes spatiaux par leur environnement est un fait scientifiquement établi : des satellites technologiques (ATS-5 1, DSP 2, SCATHA 3,4,CRRES 5) ont été spécialement instrumentés afin de quantifier ces phénomènes [LBB⁺94], [LBV⁺95], [DeF72] et [Miz83]. Comme de nombreux satellites ont été victimes d'anomalies de fonctionnement imputables à ces problèmes, beaucoup d'études et d'efforts ont été consentis pour garantir l'immunité des satellites contre le risque de charge et de décharge. Parmi les anomalies récentes, citons la panne survenue en 1994 au satellite Anik-E1 qui a subi une décharge électrostatique interne causée par un orage magnétique. On citera aussi le satellite Telstar qui perdit tous ses moyens de communications avec la Terre pendant plusieurs jours en 1997 [Ode00],[DD92],[JNA94]. Sur les satellites commerciaux, l'approche consiste à tolérer la charge et prévenir les effets électromagnétiques des décharges [DeF72].

Le mécanisme de charge dépend fortement des caractéristiques du plasma environnant et donc de l'altitude à laquelle évolue le satellite. La plupart des satellites évoluent en orbite géostationnaire mais pour certaines missions, il est important de considérer des altitudes basses ou les effets spécifiques de la traversée des cornets polaires [Gus85],[MKC82]. Des études en plasma ionosphérique ont prouvé le risque de charge et de décharge suite à l'immersion d'objets polarisés. Ainsi, la compréhension des mécanismes de charge et de décharge sur une orbite est donc une matière d'étude importante [Che74],[eAB94].

A ces orbites, les satellites baignent dans un mélange de particules libres et chargées, appelé plasma. Ainsi, la charge du satellite dépend essentiellement de l'environnement plasmique avec lequel il est mis en contact. Cette charge se fait par la collection des particules chargées de l'environnement plasmique. Le satellite est soumis à des courants d'électrons, des ions et des photons énergétiques de l'extrême ultraviolet. Ce sont là les principaux agents de la charge. Au cours de leur interaction avec la matière, les particules sont ralenties au point de pouvoir y être totalement absorbées. Comme il y a échange de charge avec le milieu extérieur, il y a charge du satellite.

De plus, à chaque orbite est associée une distribution d'énergie des différentes particules et un niveau de flux qui a une influence déterminante sur la charge des satellites. Par exemple dans les orbites basses, c'est la charge des surfaces extérieures du satellite qui

est prépondérante, alors qu'en orbite MEO (Medium Earth Orbit), c'est l'implantation de charges internes. Enfin, en orbite géostationnaire (GEO), les deux types de charges sont présentes. Ainsi les potentiels induits sont d'autant plus élevés que les énergies des particules rencontrées le sont également. L'énergie moyenne dans le plasma PEO (Polar Earth Orbit) se situe à 10KeV , et à 0.1eV dans le plasma LEO (Low Earth Orbit). De plus, la charge dépend aussi des propriétés des matériaux diélectriques utilisés en surface du satellite. La technologie et une conception appropriée du satellite pourront donc apporter des solutions au problème de la charge et de la décharge induite par l'environnement [LK],[LA95],[LSS], en s'appuyant sur un travail préalable de simulation.

La modélisation des phénomènes de charge du satellite dans l'environnement des orbites basses LEO et polaires PEO est présentée dans ce travail, extension des études menées plus précisément pour les orbites géostationnaires [Cha01, CY04].

La présente thèse est constituée de trois parties. La première partie porte sur la description de l'environnement plasmique et l'interaction du satellite avec le plasma environnant. La seconde partie traite de la modélisation 3D de la charge d'un satellite en orbites basses et polaires. La dernière partie porte sur une hiérarchie de modèles 1D étudiés théoriquement et numériquement.

Ce travail est réalisé en collaboration avec THALES ALENIA SPACE (Cannes) et l'INRIA Lille Nord Europe.

0.1 PREMIÈRE PARTIE - CHAPITRE 1, 2 ET 3 : DESCRIPTION D'UN PLASMA, DE LA MAGNÉTOSPHÈRE ET DES MÉCANISMES DE CHARGE D'UN SATELLITE

Dans la première partie de ce travail, les efforts de recherche sont concentrés sur une bonne explication et description de l'environnement plasmique et ses interactions avec le satellite.

Comme les satellites en vol se trouvent dans un mélange de particules libres et chargées, appelé plasma, nous rappelons quelques notions générales de la physique des plasmas (sa définition, son comportement collectif et les interactions régnant en son sein, la longueur de Debye, ses vitesses caractéristiques, . . .), qui seront utilisées au cours de ce travail de thèse. Ces éléments de rappel sont basés sur [Che74], [DV02] et [eAB94]. Ceci fera l'objet du chapitre 1.

Pour comprendre la provenance des particules issues du plasma qui interagissent avec les surfaces des satellites et qui contribuent ainsi à la modification de leur charge électrostatique, nous allons faire un aperçu de la magnétosphère dans le chapitre 2 permettant ainsi de se familiariser avec le vocabulaire technique de l'astrophysique.

Dans le chapitre 3, une description des phénomènes de charge d'un satellite est dé-

taillée afin de mieux comprendre l'interaction du satellite avec le plasma environnant.

0.2 DEUXIÈME PARTIE : CHAPITRE 4 ET 5, MODÉLISATION 3D DES PHÉNOMÈNES DE CHARGES DANS LES ORBITES LEO ET PEO

Dans cette partie, nous rappelons le contexte physique du problème. Nous décrivons les différentes interactions électrostatiques que l'on rencontre à la surface du satellite. Nous introduisons le modèle mathématique de Vlasov-Poisson permettant de décrire le plasma PEO. Nous rappelons aussi les résultats d'existence et d'unicité du système de Vlasov-Poisson que l'on trouve dans la littérature. Ensuite, nous adimensionnons ces équations afin de pouvoir simplifier au maximum le problème. Nous faisons apparaître un terme L/λ_d où L est la longueur caractéristique du satellite et λ_d la longueur de Debye. Comme dans un plasma magnétosphérique d'orbite PEO, la longueur de Debye est grande devant les dimensions du satellite, nous obtenons une équation de Vlasov stationnaire pour les ions et électrons et une charge d'espace négligeable. La résolution numérique d'un tel modèle cinétique se fait comme pour l'orbite géostationnaire [Cha01], [CY04].

Ensuite, nous proposons que la charge du satellite en orbite LEO soit modélisée par un modèle bifluide. Nous considérons un plasma constitué de deux espèces de particules : des électrons et des ions. Les différentes quantités dépendent de la position $x \in \mathbb{R}^3$ dans un domaine Ω , et du temps t . L'indice α vaut i, e respectivement pour les quantités relatives aux ions et aux électrons. Nous notons n_α la densité des particules, u_α la vitesse des particules et m_α la masse des particules. La charge des particules est donnée par qZ_α où $q > 0$ est la charge élémentaire. On a $Z_e = -1$, $Z_i \in \mathbb{N}^*$. Nous rappelons les équations d'Euler :

- Conservation du nombre de particules :
pour tout $t > 0$ et $\forall x \in \Omega$ et $\forall \alpha = i, e$, l'équation de conservation du nombre des particules est :

$$\partial_t n_\alpha(x, t) + \operatorname{div}(n_\alpha(x, t)u_\alpha(x, t)) = 0.$$

- Equation de bilan pour l'impulsion ¹ :
cette équation correspond au principe fondamental de la dynamique. Elle est donnée par :

$$m_\alpha \left[\partial_t n_\alpha u_\alpha + \operatorname{div}.(n_\alpha u_\alpha \otimes u_\alpha) \right] + \nabla_x p_\alpha = F_{vol},$$

pour tout $t > 0$, $\forall x \in \Omega$ et $\forall \alpha = i, e$, où p_α désigne la pression, et F_{vol} désigne les forces volumiques qui sont principalement les forces de nature électromagnétiques données par :

$$F = qZ_\alpha(E + u_\alpha \times B),$$

1. Pour a et $b \in \mathbb{R}^3$, $a \otimes b$ est la matrice $a_k b_l$ de dimension 3×3 , et pour A une matrice donnée, on définit le vecteur $\operatorname{div}.A$ dans \mathbb{R}^3 par ses composantes $\sum_{l=1}^3 \partial_l A_{kl}$.

où E désigne le champ électrique et B désigne le champ magnétique.

– Conservation de l'énergie :

l'énergie totale du système est la somme de la puissance des efforts et du taux de chaleur reçu par le système, soit :

$$\partial_t w_\alpha + \text{div.}(w_\alpha u_\alpha) + \text{div.}(p_\alpha u_\alpha + Q) = F,$$

où $w_\alpha = n_\alpha e_\alpha + \frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2$ désigne la densité d'énergie totale, e_α est l'énergie interne, et Q est le flux de chaleur extérieur.

La pression et l'énergie interne sont reliées à la température par :

$$p_\alpha = K_B n_\alpha T_\alpha, \quad n_\alpha e_\alpha = \frac{p_\alpha}{\gamma_\alpha - 1},$$

où γ_α est le rapport des chaleurs spécifiques.

Nous distinguons deux approches permettant de fermer le système en évitant le calcul de l'équation d'énergie. La première est celle isotherme, pour laquelle la température des particules est une donnée constante dans le plasma. La seconde est celle adiabatique dite aussi isentropique. Elle donne une relation entre la pression et la densité :

$$p_\alpha = C_\alpha n_\alpha^{\gamma_\alpha},$$

où C_α est une constante. Ce qui fera l'objet de la troisième partie.

Tout d'abord, on considère que le champ électrique E dérive d'un potentiel Φ *i.e.* $E = -\nabla\Phi$, et que $B = 0$. Ces équations de conservation seront couplées à l'équation de Poisson pour le calcul du potentiel électrostatique dans Ω^c l'extérieur de l'ouvert représentant le satellite :

$$-\epsilon_0 \Delta \Phi = e \left(n_i(t, x) - n_e(t, x) \right) \quad (0.1)$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide. En considérant que le satellite n'est recouvert que par au plus une couche de diélectrique, l'équation (0.1) est accompagnée de quatre conditions aux limites :

$$\partial_t \left(\epsilon_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} - \epsilon_0 \partial_{\gamma_n} \Phi \right) + \sigma_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} - J_{ext} \cdot \gamma_n = 0 \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \quad t \geq 0, \quad (0.2)$$

$$\int_{\Gamma_{c-v}} \left[\partial_t (-\epsilon_0 \partial_{\gamma_n} \Phi) - J_{ext} \cdot \gamma_n \right] d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \left[\partial_t \left(-\epsilon_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right) - \sigma_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right] d\gamma = 0, \quad (0.3)$$

$$\Phi(t, x) = \phi_{abs}(t) \text{ sur } \Gamma_{c-v}, \quad (0.4)$$

$$\Phi \rightarrow 0, \quad \|x\| \rightarrow \infty, \quad t \geq 0, \quad (0.5)$$

avec :

- ϵ_k , σ_k et d_k respectivement la permittivité, la conductivité et l'épaisseur du diélectrique.

- γ_n la normale pointant vers l'intérieur du satellite et du conducteur parfait.
- ϕ_{abs} le potentiel du conducteur parfait.
- J_{ext} la densité de courant à l'extérieur du satellite.
- Γ_{c-v} l'interface entre le conducteur et le vide.
- Γ_{c-d} l'interface entre le conducteur et les diélectriques.
- Γ_{d-v} l'interface entre les diélectriques et le vide.

Les conditions limites pour les quantités fluides sont précisées ultérieurement.

Une fois construit un modèle bifluide 3D nommé Euler-Poisson complet décrivant le plasma LEO considéré collisionnel, nous adimensionnons ces équations : en identifiant certains régimes asymptotiques nous pourrions simplifier le problème. Nous faisons apparaître ainsi le terme $\eta' = L/\lambda_d$ où L est la longueur caractéristique du satellite. Contrairement au plasma PEO, la longueur de Debye est ici petite devant les dimensions du satellite et on obtient des équations d'Euler stationnaires pour les ions et électrons avec des conditions aux limites instationnaires pour un temps caractéristique proposé par l'industriel qui est de l'ordre de $10s$ ou 10^2s . Ce temps de charge est petit par rapport au temps caractéristique d'évolution du fluide. On obtient alors :

$$\frac{-1}{\eta'^2} \Delta \Phi = n_i(t, x) - n_e(t, x), \text{ dans } \Omega^c, \quad (0.6)$$

$$\Phi(t, x) = \phi_{abs}(t) \text{ sur } \Gamma_{c-v}, \quad (0.7)$$

$$\partial_t \left(\epsilon_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right) + \sigma_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} = J_{ext} \cdot \gamma_n \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \quad (0.8)$$

$$\int_{\Gamma_{c-v}} J_{ext} \cdot \gamma_n d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \left[\partial_t \left(-\epsilon_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right) - \sigma_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right] d\gamma = 0, \quad (0.9)$$

$$\nabla \cdot (n_{e,i} u_{e,i}) = 0, \quad (0.10)$$

$$\nabla \cdot (n_i u_i \otimes u_i) + \nabla p_i = n_i u_i \times B - n_i \nabla \Phi, \quad (0.11)$$

$$\nabla p_e = -n_e u_e \times B + n_e \nabla \Phi, \quad (0.12)$$

$$\nabla \left[\left(\frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2} \right) u_i + p_i u_i \right] = -n_i u_i \nabla \Phi, \quad (0.13)$$

$$\nabla \left[\frac{p_e}{\gamma_e - 1} u_e + p_e u_e \right] = n_e u_e \nabla \Phi. \quad (0.14)$$

Ainsi l'évolution en temps du modèle est essentiellement dirigée par des termes différentiels intervenant dans les conditions aux bords pour le potentiel différentiel (voir les équations (0.8) et (0.9)).

Comme la longueur du satellite est plus grande que l'épaisseur du diélectrique, on s'intéresse par la suite à prendre le temps de la charge différentielle donné dans le code

SPARCS² qui est de l'ordre de $10^{-3}s$, on obtient ainsi les équations d'Euler pour les ions et les électrons suivantes :

$$\partial_t(n_{e,i}) + \nabla \cdot (n_{e,i}u_{e,i}) = 0, \quad (0.15)$$

$$\partial_t(n_i u_i) + \nabla \cdot (n_i u_i \otimes u_i) + \nabla p_i = n_i u_i \times B - n_i \nabla \Phi, \quad (0.16)$$

$$\nabla p_e = -n_e u_e \times B + n_e \nabla \Phi, \quad (0.17)$$

$$\partial_t \left[\frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2} \right] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2} \right) u_i + p_i u_i \right] = -n_i u_i \nabla \Phi, \quad (0.18)$$

$$\partial_t \left(\frac{p_e}{\gamma_e - 1} \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{p_e}{\gamma_e - 1} \right) u_e + p_e u_e \right] = n_e u_e \nabla \Phi, \quad (0.19)$$

$$\frac{-1}{\eta'^2} \Delta \Phi = n_i(t, x) - n_e(t, x), \text{ dans } \Omega^c, \quad (0.20)$$

avec les conditions aux limites instationnaires (0.7)-(0.9).

0.3 TROISIÈME PARTIE : CHAPITRE 6 ET 7 : MODÈLES UNIDIMENSIONNELS DU PLASMA LEO

L'ensemble du travail du chapitre 6 prendra comme point de départ un modèle mono-fluide décrivant un plasma LEO qui est basé sur les équations d'Euler stationnaires couplées à l'équation de Poisson pour le calcul du potentiel électrostatique. Nous considérons le plasma constitué des ions et la pression des particules donnée par une loi adiabatique

$$p(n) = n^\gamma$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques.

On considère un domaine borné caractérisé par L où $0 < L < \infty$. On assimile le satellite à un conducteur parfait recouvert d'une couche de diélectrique. La partie conductrice occupe l'intervalle $[0, h_c]$, le diélectrique $[-h_d, 0]$. La constante h_d représente l'épaisseur du diélectrique et h_c la largeur du conducteur. Le plasma occupe donc le domaine $]-L - h_d, -h_d[\cup]h_c, L + h_c[$ noté Ω .

Dans le domaine occupé par le plasma Ω , le système s'écrit :

$$\partial_x J = 0, \quad (0.21)$$

$$\partial_x \left(\frac{J^2}{n} + p(n) \right) = -n \partial_x \Phi, \quad (0.22)$$

$$-\frac{1}{\eta'^2} \partial_{xx}^2 \Phi = n - C, \quad (0.23)$$

où J représente la densité du courant et $\eta' = \frac{h_c}{\lambda_d}$ est le rapport de la largeur du conducteur et de la longueur de Debye. C est une fonction que l'on pourra par exemple supposer

2. SPACecRaft Software est un outil de simulation des phénomènes de charge des satellites. Il calcule les courants des ions et des électrons de la magnétosphère sur les surfaces du satellite avec un algorithme "back-trajectories" [Cha01, CBCY03].

constante égale à 1. Dans le cas d'un modèle bifluide, la variable C représente la densité des électrons.

On considère les conditions aux bords suivantes pour les densités

$$n(t, -h_d) = n_0^g, \quad n(t, h_c) = n_0^d, \quad n(t, L + h_c) = n(t, -L - h_d) = n_\infty, \quad (0.24)$$

où n_∞ est la densité du plasma donnée et que l'on pourra par exemple supposer égale à C en $-L - h_d$ et $L + h_c$. Pour le potentiel électrostatique, on a

$$\Phi(t, -L - h_d) = \Phi(t, L + h_c) = 0. \quad (0.25)$$

Le système d'Euler Poisson stationnaire (0.21)-(0.25) est complété par les équations

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \partial_t \partial_x \Phi(t, -h_d) + \frac{\epsilon_d}{h_d} \partial_t (\Phi(t, -h_d) - \phi_{abs}(t)) + \frac{\sigma_d}{h_d} (\Phi(t, -h_d) - \phi_{abs}(t)) &= J(t, -h_d), \\ \epsilon_0 \partial_t \partial_x (\Phi(t, -h_d) - \Phi(t, h_c)) &= J(t, -h_d) - J(t, h_c), \end{aligned}$$

qui déterminent $\Phi(t, -h_d)$ et $\phi_{abs}(t)$ avec ϵ_d et σ_d la permittivité et la conductivité du diélectrique.

Dans ce modèle 1D, nous ne passons pas à la limite quasi-neutre afin de conserver le couplage entre le plasma et le satellite. Ensuite, nous traitons théoriquement et numériquement le problème dans les deux régimes subsoniques et supersoniques en se basant sur [PV06] et [BD85].

Afin d'éviter les raideurs causées par le modèle d'Euler-Poisson stationnaire, nous traitons dans le chapitre 7, un modèle d'Euler-Poisson évolutif pour les ions. Dans ce modèle, les équations de conservation de la masse, de bilan d'impulsion et de l'énergie pour les ions sont couplées à l'équation de Poisson pour le champ électrique :

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = S(U), \quad (0.26)$$

avec $U = (n, J, w)$, $F(U) = \left(J, \left(\frac{J^2}{n} \right) + p(n), \frac{J}{n} (w + p(n)) \right)$, $S(U) = (0, -n \partial_x \Phi, -J \partial_x \Phi)$.

Les schémas numériques proposés sont en une dimension d'espace. A ce modèle, on associe un schéma numérique basé sur un splitting en temps. Tout d'abord, on résout la partie hyperbolique de (0.26), ce qui nous donne une solution intermédiaire \tilde{U} .

Ensuite, en faisant une mise à jour de cette solution dans le terme source, on obtient la solution à l'instant t^{k+1} . Ainsi, en utilisant le schéma de Godunov, le schéma splitting en temps est donné par :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i^{k+1} &= U_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+\frac{1}{2}}^k - F_{i-\frac{1}{2}}^k], \\ U_i^{k+1} &= \tilde{U}_i^{k+1} + \Delta t S(\tilde{U}_i^{k+1}), \end{aligned}$$

où $F_{i+\frac{1}{2}}^k = F(U_i^k, U_{i+1}^k)$ est le flux numérique de Godunov à l'instant t^k au point $x_{i+\frac{1}{2}}$ qui dépend des états U_i^k et U_{i+1}^k .

Le calcul du terme source $S(\tilde{U}_i^{k+1}) = (0, -\tilde{\rho}_i^{k+1} \partial_x \Phi^k, -\tilde{J}_i^{k+1} \partial_x \Phi^k)$ dépend de $\tilde{\rho}_i^{k+1}$, \tilde{J}_i^{k+1} et

est explicite en Φ . Dans l'équation de conservation de la masse, le terme source vaut zéro, de sorte que $\rho_i^{k+1} = \tilde{\rho}_i^{k+1}$. Le terme de force $-\partial_x \Phi^k$ est approché par différences finis,

$$-\partial_x \Phi^k = \frac{\Phi_{i+1}^k - \Phi_{i-1}^k}{2\Delta x}$$

où Φ_i^k est l'approximation du potentiel sur $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ à l'instant t^k au point x_i . Afin de définir les flux numériques aux bords, une étude sur les conditions aux bords pour les quantités fluides est présentée dans ce chapitre.

Comme première tentative, on suppose que les particules aux bords sont réfléchies d'une manière spéculaire (voir [VDBG10]). Ainsi, les flux de masse, quantité de mouvement et énergie sont uniquement déterminés par la trace sortante.

Et en approchant la trace sortante par $M_{n_0^k, u_0^k, T_0^k}$ une maxwellienne définie par les champs macroscopiques de la première maille du domaine de calcul, on détermine ainsi l'état fictif $U_{gh,0}$ défini à partir de l'état U_0^k dans la première maille du domaine. Puis on utilise cet état fictif pour évaluer les flux à l'interface.

Les résultats numériques indiquent que ces conditions aux limites pour le système hydrodynamique ne reproduisent pas aux mieux les conditions imposées au niveau cinétique. Ce qui nous incite à chercher des conditions aux limites du type Maxwell pour les quantités fluides afin d'atteindre notre but.

Première partie

PHYSIQUE DES PLASMAS ET CHARGE D'UN SATELLITE

PLASMA SPATIAL ENVIRONNANT

Sommaire

1.1 Les plasmas	23
1.1.1 Interactions collectives	23
1.1.2 Interactions individuelles	23
1.2 Grandeurs fondamentales en physique des plasmas	24
1.2.1 Caractérisation des influences des interactions	24
1.2.2 Tables des paramètres du plasma	28

1.1 LES PLASMAS

Un plasma est un gaz chargé électriquement. Il se compose donc d'ions et d'électrons libres.

Compte tenu de sa nature physique, les processus susceptibles de se produire en son sein peuvent être de deux ordres, des interactions de types collectives ou individuelles.

1.1.1 Interactions collectives

Les interactions collectives proviennent de la nature propre des particules. Du fait que celles-ci peuvent être chargées, il apparaît au sein du plasma des forces d'interaction à longue portée. Ce sont les forces électrostatiques. Aussi, le mouvement des particules chargées crée un courant qui induira un champ magnétique. Bien entendu, la création artificielle de telles forces électromagnétiques influence de la même manière le plasma.

1.1.2 Interactions individuelles

Les interactions individuelles, proviennent de la nature microscopique des particules composant le plasma ; celles-ci peuvent se classer sous le terme général de collisions. Les collisions binaires élastiques conservent le nombre des particules, la quantité de mouvement et l'énergie du système. La nature de ces collisions dépend essentiellement de la nature de la force d'interaction qui lie les particules. S'il y a collision entre deux particules chargées, ce sont les forces coulombiennes, si l'une des deux particules n'est pas chargée, nous parlerons d'interactions dues au mécanisme dit du dipôle induit, si les deux particules sont neutres nous utiliserons le modèle des sphères dures. Les collisions inélas-

tiques conduisent quant à elles à la création ou à la disparition de particules au sein du plasma. Parmi celles-ci, on citera en exemple, l'ionisation, la recombinaison ou l'échange de charges entre ions et neutres. Les deux premières interactions jouent un rôle important dans la création ou destruction des plasmas, et pour la dernière, affecte la mobilité des ions.

1.2 GRANDEURS FONDAMENTALES EN PHYSIQUE DES PLASMAS

Un plasma est globalement neutre, c'est-à-dire que, dans une petite portion d'espace, la densité de charge électrique est nulle. Que se passe-t-il si on déplace une charge électrique, de façon à ce que la densité de charge locale ne soit pas nulle ?

En fait, la densité de charge n'est jamais rigoureusement maintenue à 0, car les particules ne sont pas immobiles. Elles ont des vitesses désordonnées d'agitation thermique. La neutralité électrique subit continuellement des petites perturbations. Ces perturbations engendrent continuellement des oscillations de plasma.

En effet, la densité de charge crée un champ électrique. Ce dernier agit comme une force de rappel. Comme les électrons sont les particules les plus légères, ils ont la vitesse la plus élevée. Leur déplacement tend à annuler la densité de charge électrique. Ce faisant, ils acquièrent une vitesse et s'éloignent. Un nouveau champ électrique, symétrique du premier, se crée et les électrons font demi-tour. En conséquence, le plasma oscille.

On montre que la fréquence de cette oscillation est proportionnelle à la racine carrée de la densité d'électrons dans le plasma.

1.2.1 Caractérisation des influences des interactions

Les interactions décrites à la section 1.1 jouent un rôle plus ou moins important dans la compréhension des phénomènes à considérer. Pour chacune de ces interactions, on introduit un temps caractéristique d'interaction, et une longueur d'interaction caractéristique. Celles-ci dépendent des paramètres du plasma, telle que la densité des particules, et leur température.

Pour les collisions, le temps caractéristique apparaît plus souvent sous la forme de fréquence de collisions, la longueur caractéristique porte le nom de libre parcours moyen $\lambda_{\alpha\beta}$ pour une particule α en collision avec une particule β . Pour les interactions de types électrostatiques, nous parlerons de longueur de Debye et pour celles de type magnétique de rayon de Larmor.

Interactions électrostatiques et la longueur de Debye

La longueur de Debye apparaît comme la longueur critique d'interactions collectives. Sous l'action d'un champ extérieur ayant pour but d'écarter le plasma de sa neutralité naturelle, le plasma fera écran à celui-ci. L'action de ce champ ne se ressentira que sur une distance de l'ordre de la longueur de Debye. De même si on observe l'action électrostatique d'un ion sur l'ensemble des électrons qui l'entourent, le rayon de la sphère d'influence est

donné par cette même longueur. Cette longueur apparaît comme la longueur caractéristique d'interactions collectives électrostatiques ; nous verrons que son ordre de grandeur devant la taille du système à étudier joue un rôle important, tant dans le choix du modèle, que numériquement. Son expression est donnée par :

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 K_B T_e}{n_e e^2}}$$

où ϵ_0 est la perméabilité électrique du vide, e la charge électrique élémentaire, T_e la température électronique K_B la constante de Boltzmann, et n_e la densité électronique.

On introduit de plus le nombre de Debye, permettant de comparer cette distance avec la longueur caractéristique du système d'étude (L) :

$$N_D = \frac{\lambda_d}{L},$$

L sera par exemple une grandeur caractéristique du satellite.

Interactions d'ordre magnétique et rayon de Larmor

La dimension caractéristique du plasma permettant de juger de l'influence d'un champ magnétique extérieur au coeur du plasma est donnée par le rayon de Larmor ; cette longueur est définie comme le rayon de courbure des trajectoires des particules sous l'action d'un champ magnétique dont la nature est désignée ici par l'indice α :

$$\rho_{L\alpha} = m_\alpha \frac{v_{\perp\alpha}}{eB},$$

où m_α désigne la masse de la particule α , B caractérise l'intensité du champ magnétique, et $v_{\perp\alpha}$ est la vitesse de la particule α perpendiculaire à celui-ci, (ou la vitesse thermique soit $\sqrt{\frac{K_B T}{m_\alpha}}$ pour un plasma maxwellien).

On pourra introduire aussi le nombre de Larmor :

$$N_L = \frac{\rho_L}{L}.$$

Les phénomènes d'induction de champs magnétiques seront négligés dans la mesure où les particules ont une vitesse relativement faible.

Collisions binaires élastiques entre deux particules chargées

Les collisions ions-électrons, ions-ions ou électrons-électrons sont basées sur les interactions coulombiennes. Pour définir leurs fréquences, on commence par faire le calcul théorique de leurs sections efficaces de transfert de quantité de mouvement ($\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^c$).

En partant de la section efficace différentielle de Rutherford,

$$\sigma_{\alpha\beta}(\chi) = \left(\frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{8\pi\epsilon_0 \mu g^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi)},$$

où χ est l'angle de déviation, g la vitesse relative initiale des deux particules, Z_α le nombre de charge de la particule, μ la masse réduite des deux particules :

$$\mu = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \text{ avec } m_\alpha \text{ la masse de la particule } \alpha,$$

on a :

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^c = 2\pi \int_{\chi_{min}}^{\pi} \left(1 - \cos(\chi)\right) \sin(\chi) \sigma(\chi) d\chi = 4\pi \left(\frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu g^2}\right)^2 \ln(\Lambda),$$

où : $\ln(\Lambda)$ est le logarithme coulombien défini par : $\Lambda = \frac{4\pi\epsilon_0 \mu \bar{g}^2}{Z_\alpha Z_\beta e^2}$, χ_{min} la déviation minimale pour laquelle on a coupure de Debye, et \bar{g} la vitesse relative moyenne des 2 particules.

La fréquence caractéristique des collisions est alors donnée par :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \max(n_\alpha, n_\beta) \bar{g} \sigma_{\alpha\beta}^c.$$

Pour avoir la longueur caractéristique des collisions relativement au phénomène à observer, on divise la vitesse caractéristique V des particules à observer par cette fréquence :

$$L_{\alpha\beta} = \frac{V}{\gamma_{\alpha\beta}}.$$

Le libre parcours moyen est alors défini par :

$$\lambda_{\alpha\beta} = \frac{\bar{g}}{\gamma_{\alpha\beta}} = \frac{1}{\max(n_\alpha, n_\beta) \sigma_{\alpha\beta}^c}.$$

On pourra se référer à [eAB94] pour le détail des calculs.

Pour achever les calculs, on doit émettre une hypothèse sur les fonctions de distribution des particules pour calculer \bar{g}^2 . On supposera ici qu'elles sont maxwelliennes. On a alors :

$$\bar{g}^2 = 2 \left(\frac{K_B T_\alpha}{m_\alpha} + \frac{K_B T_\beta}{m_\beta} \right).$$

-Pour les collisions électrons-électrons, on a alors :

$$\mu = \frac{m_e}{2},$$

$$\bar{g}^2 = 4 \frac{K_B T_e}{m_e}.$$

-Pour les collisions ions-ions :

$$\mu = \frac{m_i}{2},$$

$$\bar{g}^2 = 4 \frac{K_B T_i}{m_i}.$$

-Pour les collisions électrons-ions :

$$\mu = m_e,$$

$$\bar{g}^2 = 2 \frac{K_B T_e}{m_e},$$

car $m_i \gg m_e$.

On définit aussi les nombres de Knudsen :

$$N_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{L}.$$

Collisions binaires élastiques avec au moins une particule neutre.

Les collisions élastiques entre deux particules neutres ou entre un ion et un neutre sont décrites ici par le modèle des sphères dures.

Les calculs des sections efficaces sont beaucoup plus simples dans ce cas :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{sd} = \pi D^2,$$

où D est le diamètre moléculaire (identique) des deux particules. Par exemple pour le Xénon, on a : $D = 3.42 \times 10^{-10} m$.

Et nous avons les mêmes définitions que précédemment pour les fréquences et les longueurs caractéristiques de collisions.

Collisions binaires élastiques entre un électron et un neutre.

Ce type de collisions est basé sur le principe du dipôle induit : au passage d'un électron, un neutre se polarise et crée autour de lui un moment dipolaire. En introduisant la polarisabilité du neutre Xénon ($\psi = 4.044 \times 10^{-24} cm^3$) le potentiel d'interaction est donné par :

$$-\frac{\psi e^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}.$$

La section efficace intégrée pour des électrons de température $2eV$ est donnée dans [eAB94] : $\sigma_{ne}^{dip} = 1 \times 10^{-20} m^{-3}$.

Collisions binaires inélastiques entre un ion et un neutre.

Pour les collisions inélastiques d'échange de charges, nous utilisons un modèle simplifié, et nous considérons que lorsque les deux particules collisionnent, elles échangent leurs rôles. Microscopiquement cela correspond à échanger leurs vecteurs vitesses. Ce type de collision affecte grandement la mobilité des ions, et peut être considéré comme un terme créant des ions lents. La section efficace différentielle de collisions nous est donnée dans [OHM⁺99] pour les collisions dans un plasma de Xénon.

Pour les collisions entre un atome (Xe) et un ion (Xe^+), Rapp et Francis [RF62] donnent :

$$\sigma_{ei}^{CEX} = \left(k_1 \ln(g) + k_2 \right)^2 \times 10^{-20} m^2,$$

où :

$$k_1 = -0.8821,$$

$$k_2 = 15.1262.$$

Pour les collisions entre un atome (Xe) et un ion (Xe^{++}), des mesures expérimentales [OHM⁺99] donnent :

$$\sigma_{ei}^{CEX} = \left(k_1 \ln(g) + k_2 \right)^2 \times 10^{-20} m^2,$$

où :

$$k_1 = -2.7038,$$

$$k_2 = 0.34069.$$

Les autres collisions seront négligées.

1.2.2 Tables des paramètres du plasma

La table 1.1 donne quelques constantes fondamentales. La table 1.2 présente les différentes fréquences du plasma, les longueurs et les vitesses caractéristiques.

Propriétés	Symboles	Valeurs en S.I
vitesse de la lumière	c	$3 \times 10^8 m/s$
constante de Boltzmann	K_B	$1.38 \times 10^{-23} j.K^{-1}$
masse d'électron	m_e	$9.1 \times 10^{-31} kg$
masse du proton	m_i	$1836m_e$
charge élémentaire	e	$1.6 \times 10^{-19} C$
constante diélectrique	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} F/m$
perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} H.m^{-1}$

TAB. 1.1 – Paramètres du plasma avec $\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ et $1eV = 1.16 \times 10^4 K$.

Propriétés	Symboles en S.I
libre parcours moyen entre électrons/ions	$\lambda_{ei} = \frac{1}{n\sigma_{ei}}$
fréquence du plasma électronique	$w_{pe} = \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2}$
fréquence du plasma ionique	$w_{pi} = \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_i} \right)^{1/2}$
fréquence de gyration électronique	$w_{ge} = \frac{eB}{m_e}$
fréquence de gyration ionique	$w_{gi} = \frac{eB}{m_i}$
fréquence de collision coulombienne	$\nu_{ei} = \frac{w_{pe} \ln \Lambda}{4\pi n \lambda_D^3}$
longueur de Debye	$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 K_B T}{ne^2} \right)^{1/2}$
rayon de gyration électronique	$r_{ge} = \frac{v_{the}}{w_{ge}}$
rayon de gyration ionique	$r_{gi} = \frac{V_i^{th}}{w_{gi}}$
vitesse thermique électronique	$V_e^{th} = \left(\frac{K_B T}{m_e} \right)^{1/2}$
vitesse thermique ionique	$V_i^{th} = \left(\frac{K_B T}{m_i} \right)^{1/2}$

TAB. 1.2 – Caractéristiques du plasma

LA MAGNÉTOSPHÈRE

Sommaire

2.1	Introduction	29
2.2	Morphologie de la magnétosphère	30
2.3	L'ionosphère	34
2.4	La circulation magnétosphérique	34

Comme le satellite interagit avec les particules du plasma environnant, on s'intéresse à comprendre la provenance de ces particules qui contribuent à la modification de la charge électrostatique par une étude de la magnétosphère.

2.1 INTRODUCTION

La magnétosphère terrestre a fait l'objet de recherches intenses depuis les années 70 pour deux raisons essentielles : d'une part, la magnétosphère est un très riche laboratoire de physique des plasmas. D'autre part, les perturbations de la magnétosphère, sous-orages et orages magnétosphériques qui correspondent aux phases de dissipation explosive d'énergie magnétique et qui affectent les régions de la magnétosphère, où les flux de particules énergétiques sont fortement intensifiés, provoquent des phénomènes électrodynamiques violents et destructeurs pour les activités humaines tant au sol (réseaux électriques,...) que dans l'espace (satellites,...). Ces objets spatiaux sont très sensibles à la ceinture de radiations qu'on décrira plus loin, aux structures magnétiques, ainsi qu'aux écoulements rapides de particules. L'énergie dissipée dans la haute atmosphère et la magnétosphère interne lors des sous-orages et orages magnétiques provient initialement du soleil [Jac]. Ce dernier émet des particules chargées dans le milieu interplanétaire. Elles forment le vent solaire qui est un plasma très conducteur et porteur de matière, de quantité de mouvement, d'énergie mécanique et aussi électromagnétique.

Les magnétosphères résultent de la rencontre du vent solaire avec des obstacles magnétisés. Elles ont toutes la même forme, la même structure alors que leur taille varie en fonction de l'intensité du moment magnétique de la planète. De plus, elles sont gigantesques par rapport à la planète qui en est à l'origine. Par exemple, l'échelle de la magnétosphère de la Terre est de l'ordre de 1000 rayons terrestres. Enfin, leurs dynamiques dépendent de la rotation de la planète et de la présence ou de l'absence d'une ionosphère qu'on décrira plus loin.

La magnétosphère terrestre est illustrée sur la figure 2.1. C'est l'ensemble des lignes de champ magnétique terrestre situées au-dessus de 800 à 1000 *km* d'altitude. Elle est plongée dans le vent solaire et déformée par celui-ci : sa forme est très allongée, comprimée du côté du soleil (côté jour) et étirée du côté nuit, un peu comme la queue d'une comète jusqu'à plus de 300000 *km*.

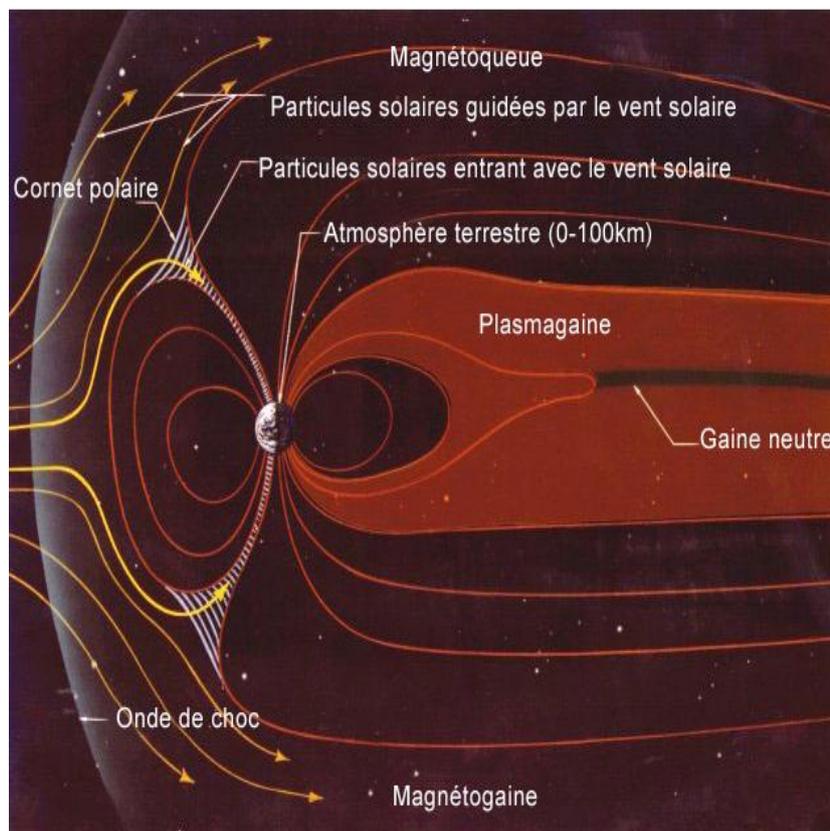


FIG. 2.1 – Magnétosphère [site]

De plus, c'est un milieu très dilué, moins dense encore que le milieu interplanétaire qui l'entoure. La magnétosphère est remplie de plasma qui interagit fortement avec le champ magnétique. Elle est séparée du vent solaire par une frontière de quelques centaines de kilomètres d'épaisseur : la magnétopause qui se trouve à environ 60000 *km*. En l'absence du vent solaire, le champ magnétique terrestre serait dipolaire. Du fait de la présence du vent solaire, les lignes de champ sont déformées et ont l'aspect montré ci-dessus (figure 2.1 [site]).

Dans la section suivante, on donnera la nomenclature des différentes régions de la magnétosphère présentées sur la figure 2.2.

2.2 MORPHOLOGIE DE LA MAGNÉTOSPHERE

Dans cette section, on décrit brièvement les différentes régions de la magnétosphère. Celles-ci sont schématiquement représentées sur la figure 2.2.

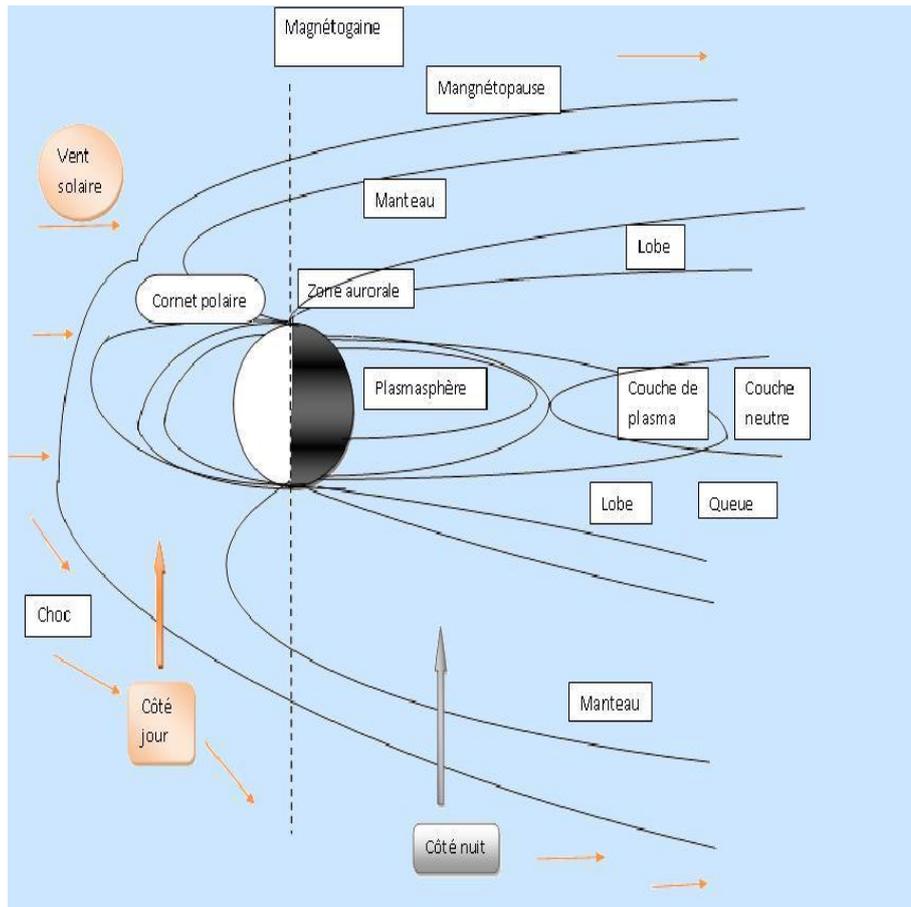


FIG. 2.2 – Régions de la magnétosphère

Côtés jour et nuit

On désigne par le côté jour l'ensemble des régions de la magnétosphère qui comprend les cornets polaires, tandis que le côté nuit est celui qui comprend les zones aurorales, les lobes, la couche de plasma, une partie de la magnétopause et du manteau.

Vent solaire

Le milieu interplanétaire est balayé par un vent de particules électriquement chargées qui proviennent du Soleil. Ce vent est un plasma très peu dense composé d'électrons, de protons et de noyaux d'Hélium. De plus, il est supersonique, il va plus vite que la vitesse des ondes qui s'y propagent (ondes acoustiques et ondes d'Alfvén, *i.e.* ondes de pression et de déformation des lignes de champ magnétique). Aussi, il est fluctuant, il est soumis à des sortes de tempêtes (éruptions solaires). Avant que le vent solaire ne se heurte à la magnétosphère, il est brutalement ralenti et chauffé par d'autres particules dans une région appelée le choc. La structure du choc en amont de la magnétosphère est assez complexe car les processus de diffusion de l'énergie (ralentissement du plasma et chauffage) sont liés à des processus électromagnétiques assez variés.

Queue

La queue est en aval de la planète par rapport à la direction de l'écoulement du vent solaire. C'est une région très vaste, et très étirée. Pour la Terre, elle s'étend jusqu'à plusieurs centaines de rayons terrestres, largement au delà de l'orbite de la lune (60 rayons terrestres).

Magnétopause

La magnétopause est la frontière entre la magnétosphère, dominée par le champ magnétique de la planète, et le milieu interplanétaire, dominé par le vent solaire. Imperméable, elle laisse cependant pénétrer une fraction des particules du vent solaire selon les caractéristiques de ce dernier. Le champ magnétique subit une discontinuité au travers de la magnétopause qui constitue donc une source d'accélération des particules.

Magnétogaine

La magnétogaine est une région du vent solaire au voisinage de la magnétosphère, située entre le choc (en aval du choc) et la magnétopause. C'est une région où le plasma est turbulent, on y mesure une grande agitation électromagnétique. Le plasma y est plus dense que dans le vent solaire en amont du choc. C'est là que le vent solaire s'écoule, principalement, en contournant la magnétosphère.

Couche de plasma

La couche de plasma est le principal réservoir de particules de la magnétosphère. Elle s'étend dans le plan médian de la queue. Son épaisseur est très variable selon l'activité magnétosphérique, allant de quelques centaines à la dizaine de milliers de kilomètres. La densité est de l'ordre de 0.1 à 1 par centimètre cube, la température est de l'ordre de 0.5 à 1keV pour les électrons, de 1 à 5keV pour les protons. Le champ magnétique y change de direction (au sud il est dirigé vers la queue, au nord, il est dirigé vers la planète). C'est une région très importante pour comprendre la dynamique à grande échelle de la magnétosphère.

Lobes

Les lobes sont deux régions situées dans la queue de la magnétosphère où le plasma est très peu dense (le moins dense de la magnétosphère, moins de $5 \cdot 10^{-3}$ particules par centimètre cube) et où le champ magnétique n'est pas du tout négligeable. La température est de l'ordre de 100eV pour les électrons et 300eV pour les protons. Les deux lobes (un au Nord, l'autre au Sud) entourent la couche de plasma.

Zones aurorales

Les zones aurorales sont des régions où l'on observe des aurores. Les aurores résultent de la luminescence de la haute atmosphère due à la désexcitation des molécules de l'atmosphère. Les molécules sont préalablement excitées par des électrons énergétiques provenant de la magnétosphère et "précipitées" vers l'atmosphère. Les zones aurorales constituent deux régions circulaires autour des pôles Nord et Sud.

Cornets polaires

Les cornets polaires sont deux régions de la magnétosphère dont les lignes de champ magnétiques se projettent sur la Terre très près des pôles magnétiques. A cause des déformations des lignes de champ magnétique dues à l'interaction entre le champ magnétique terrestre et le vent solaire, ils sont situés du côté jour de la magnétosphère. Il y en a un au Nord et un au Sud. La frontière de la magnétosphère, la magnétopause, n'a pas les mêmes propriétés au dessus des cornets polaires qu'ailleurs. En effet, des particules chargées issues du vent solaire peuvent entrer dans la magnétosphère en passant par les cornets polaires. Une fois entrée, cette matière n'est pas précipitée vers l'ionosphère, mais chassée vers la queue de la magnétosphère, en passant par une région appelée le manteau. C'est seulement après des pérégrinations assez complexes qu'une partie de cette matière se trouvera précipitée vers l'ionosphère pour "allumer" des aurores polaires.

Manteau

Le manteau est une région située dans la queue de la magnétosphère, sous la magnétopause, à l'extérieur des lobes. Il est composé d'un plasma d'origines solaire et ionosphérique en écoulement antisolaire. Ces particules ont pénétré la magnétosphère au niveau des cornets polaires. La température atteint le Kiloélectron-volt. De plus, il est plus dense que les lobes. On y mesure des flux de matière importants principalement dirigés dans la direction opposée à la planète et au Soleil ("tailward motion" en anglais).

Les ceintures de radiations, ou ceintures de Van Allen

Les ceintures de radiations se situent entre 2 et 10 rayons terrestres et sont peuplées de particules énergétiques ($E > 10keV$) qui dérivent autour de la Terre : les électrons vers l'Est et les ions vers l'Ouest. Les ceintures ont une dynamique complexe et sont fortement perturbées lors des sous-orages et orages magnétosphériques. La Terre possède deux régions où les particules sont piégées. La ceinture de radiation interne constituée de protons énergétiques produits par les collisions des ions du rayonnement cosmique avec l'atmosphère terrestre. Plus loin, il existe une grande région contenant les ions et les électrons de plus faible énergie.

Plasmasphère

La plasmasphère est une région de la magnétosphère qui est entraînée par la rotation

de la planète sur elle-même. On dit que le plasma y est en corotation. De plus, elle constitue un réservoir quasi-sphérique de plasma froid ($< 1eV$). Elle est composée de particules provenant de l'ionosphère de basse latitude. Dans le cas de la Terre, la plasmasphère n'est pas très étendue. Dans le cas de Jupiter (champ magnétique fort et rotation rapide de la planète), la plasmasphère est une région vaste.

Pour en savoir plus sur les aurores, les environnements planétaires, et la physique spatiale en général, on peut se référer à [Mot97] et [Bou].

2.3 L'IONOSPHERE

On présente dans cette section une brève description de l'ionosphère. Il est indispensable de bien connaître cette région car elle joue un rôle important dans l'étude des systèmes spatiaux. En effet, elle a une grande influence sur les signaux issus des satellites et spécialement ceux de positionnement (GPS). De plus, la qualité de communications radios dépend des couches conductrices formant l'ionosphère sur lesquelles se réfléchissent les ondes radios.

L'ionosphère est une région comprise entre 50km environ, où commence à apparaître une densité significative d'électrons thermiques, et une limite à haute altitude de l'ordre de quelques milliers de km où l'influence de l'atmosphère neutre devient totalement négligeable. La formation de l'ionosphère repose sur la présence d'une atmosphère neutre, qui va fournir les composantes susceptibles d'être ionisées, et sur l'existence de rayonnements photoniques, qui seront à même de créer des ions et des électrons libres à partir des atomes ou molécules neutres. Ces particules sont ultérieurement soumises à des réactions chimiques complexes et à des processus de transport qui interviennent de façon importante sur la constitution et l'évolution spatiale et temporelle de l'ionosphère. Pour plus de détails, on se référera à [Ber].

2.4 LA CIRCULATION MAGNÉTOSPHERIQUE

La figure 2.3 représente la circulation du plasma dans la magnétosphère. Les points rouges représentent le vent solaire. Ils s'écoulent en contournant la magnétosphère. Mais une partie rentre quand même par les cornets polaires. Une fois dans les cornets, ils pénètrent dans la magnétosphère (et ne font pas d'aurores) et se propagent (en bleu) sur le bord interne de la frontière : le manteau. Une partie du plasma finit par arriver dans les régions centrales de la queue (en vert) : dans la couche de plasma. Ici le plasma devient de plus en plus dense. On peut se référer à [Bou] pour plus de détails.

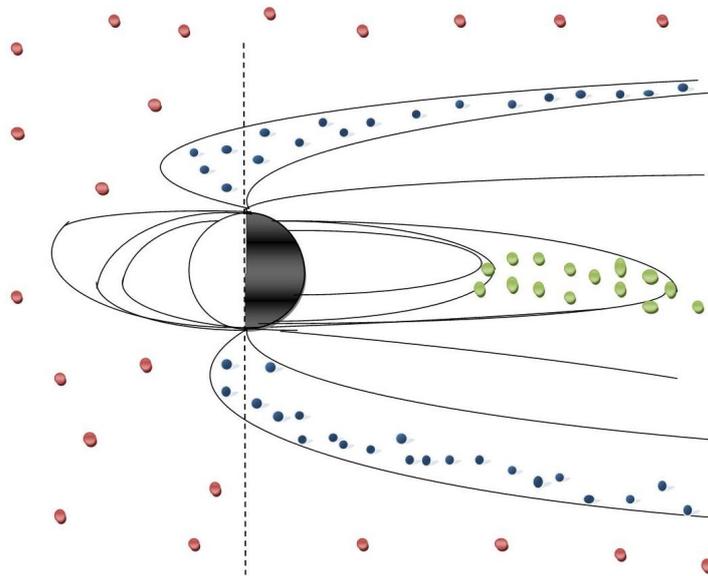


FIG. 2.3 – Ecoulement du plasma autour et dans la magnétosphère de la Terre

PHÉNOMÈNE DE CHARGE D'UN SATELLITE

Sommaire

3.1	Les facteurs de charge	37
3.1.1	Charge absolue	39
3.1.2	Charge différentielle	39
3.1.3	Charge externe	40
3.2	Charge interne	41
3.3	Propriétés orbitales	41

L'espace est un milieu agressif, tous les satellites subissent des perturbations de leur fonctionnement induites par l'environnement. On analyse plus particulièrement les anomalies et les pannes dont l'origine est l'électrisation des satellites. On distingue usuellement trois types d'interactions avec les particules chargées : les phénomènes de charge de surface par des électrons d'énergie moyenne de la gamme $10 - 200keV$, la charge interne par des électrons de plusieurs millions d'électronvolts, les événements singuliers dus aux protons de très forte énergie ou aux ions lourds.

La charge de satellite est devenue une question importante suite à des anomalies de fonctionnement des satellites au début des années 70, et surtout la perte complète du satellite DSCS 9431. Par conséquent, un grand programme a été conduit par la NASA et l' U.S. Air Force pour étudier le problème vers la fin des années 70. Citons par exemple, SCATHA qui a été lancé en janvier 1979 pour étudier la prise de charge d'un satellite en orbite géosynchrone proche, et CRRES qui a été lancé aussi en juillet 1990 dans une orbite géosynchrone .

Dans ce chapitre, on décrit les processus de charge des systèmes et matériaux dans l'environnement spatial. La compréhension de ces mécanismes est nécessaire pour opérer les bons choix de matériaux ou de dimensionnement qui permettent de limiter le risque de charge et de son corollaire toujours possible, la décharge et l'occurrence d'anomalies de fonctionnement.

3.1 LES FACTEURS DE CHARGE

La charge d'un objet (satellite) dépend essentiellement de l'environnement des particules chargées avec lesquelles il est mis en contact. De ce point de vue, l'environnement spatial est à la fois très structuré et soumis à des variations temporelles :

- les caractéristiques moyennes de l'environnement rencontré dépendent de la position (altitude, plan de l'orbite, position sur l'orbite).
- les caractéristiques extrêmes signifiant des valeurs limite d'énergie et de flux rencontrés ainsi que la possibilité d'induire des niveaux de charge élevés.

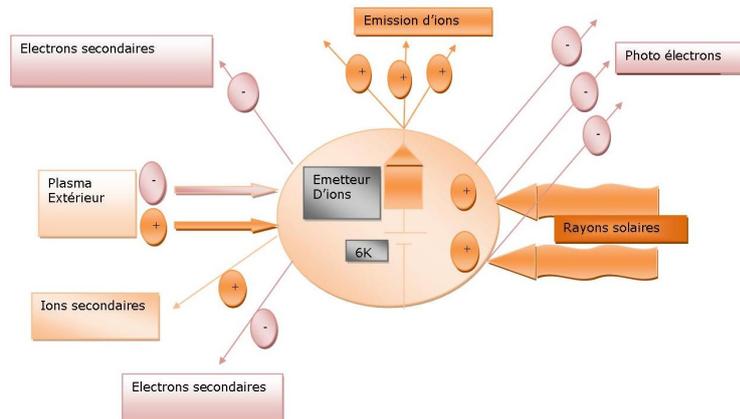


FIG. 3.1 – mécanismes de charge d'un satellite

La charge d'un satellite est déterminée par les collections simultanées de plusieurs courants correspondant aux particules présentes dans l'environnement : électrons, ions et photoélectrons générés par ultraviolet. Les électrons tendent à induire des potentiels négatifs, tandis que la collection d'ions et l'émission de photo électrons tendraient soit à induire des potentiels positifs, soit à modérer les valeurs des potentiels négatifs induits par les électrons. Un équilibre est atteint dépendant des "poids" respectifs de chaque type de particule (par poids, on entend énergie des particules et courants associés).

Sur la figure 3.1, on voit que sur un satellite, il arrive des électrons, des ions et des photons énergétiques de l'extrême ultraviolet. Ce sont là les principaux éléments de la charge. Au cours de leur interaction avec la matière, les particules sont ralenties au point de pouvoir y être totalement absorbées. Parce qu'il y a échange de charge avec le milieu extérieur, il y a charge du satellite.

Les potentiels induits sont d'autant plus élevés que les énergies des particules rencontrées le sont également. Des électrons de $1eV$ ont le pouvoir d'induire des potentiels de 1 Volts, et ainsi de suite, jusqu'à la possibilité d'induire des potentiels du Million de Volts. Pratiquement, les particules de l'environnement spatial présentent des distributions d'énergie, et la notion d'énergie moyenne est à considérer. L'énergie moyenne dans le plasma PEO se

situé à $10keV$, à $0.1eV$ dans le plasma LEO, à quelques dizaines de keV en période calme sur l'orbite géostationnaire en position jour, et à $12keV$ en période d'orage en position nuit. Les potentiels induits sont également déterminés par les intensités des courants associés à ces énergies. Sur l'orbite géostationnaire, les potentiels les plus élevés ne sont pas systématiquement constatés au niveau des énergies les plus élevées (côté jour), mais plus systématiquement côté nuit, en période d'orage où les forts courants (densités) deviennent alors disponibles.

Le courant total est constitué de celui des photons solaires induits, celui des photoélectrons émis par la surface du satellite, celui des électrons et celui des ions du plasma extérieur qui viennent heurter la surface du satellite, et celui des particules chargées émises par le satellite. L'équation d'équilibre pour la densité de courant sur la surface du satellite peut être écrite comme :

$$J_e + J_i + J_{pe} + J_{sec} + J_{back} + J_{art} = 0 \quad (3.1)$$

où les courants :

- J_e et J_i sont respectivement ceux des électrons et des ions du plasma extérieur,
- J_{pe} est le courant net de photoélectrons qui sont des électrons émis sous l'effet d'un rayonnement lumineux,
- J_{sec} est le courant net dû aux électrons secondaires (*i.e.* les électrons arrachés à la surface du satellite), produits par des électrons et des ions primaires énergétiques sur la surface du satellite,
- J_{back} est le courant des électrons ré-émis de la surface avec une certaine perte d'énergie (électrons back-scattering en anglais),
- J_{art} est un courant artificiel possible dû à un autre événement.

3.1.1 Charge absolue

Dans le plasma, un objet collectera des ions, mais surtout des électrons en plus grand nombre car, à énergie égale, les courants d'électrons (plus légers que les ions) sont plus élevés. Le satellite comporte nécessairement des zones positives et d'autres négatives par rapport au plasma. Un objet tout positif par rapport au potentiel du plasma ne recueillirait que des électrons, et tout négatif, que des ions. A l'équilibre, on aura un courant total nul, ce qui fixera la proportion des surfaces positives et négatives. Il en découle, puisque les courants d'ions sont plus petits, que la plus grande partie de l'objet sera négative par rapport au plasma, et qu'une petite partie positive suffira à collecter la quantité d'électrons nécessaires pour assurer l'équilibre. Ainsi, le corps du satellite développera un potentiel par rapport au plasma, potentiel qu'il est convenu d'appeler absolu. Ainsi, la charge absolue sera ce potentiel développé sur la structure du satellite, référence locale de masse électrique des équipements électriques. Elle ne jouera aucun rôle dans le déclenchement de la décharge.

3.1.2 Charge différentielle

Dans LEO, le potentiel induit par cet environnement est plus élevé que l'énergie moyenne du plasma LEO qui est de l'ordre de $0.1eV$. Ce potentiel s'imposera sur toute

surface suffisamment diélectrique. Cela signifie qu'il y aura une différence de potentiel entre la structure et tout diélectrique qui lui est attaché. Ainsi, on peut définir la charge différentielle comme étant la différence de potentiel entre un diélectrique et la structure du satellite. Les effets possibles de décharge causés par la charge différentielle (voir figure 3.2) peuvent perturber les opérations satellitaires.

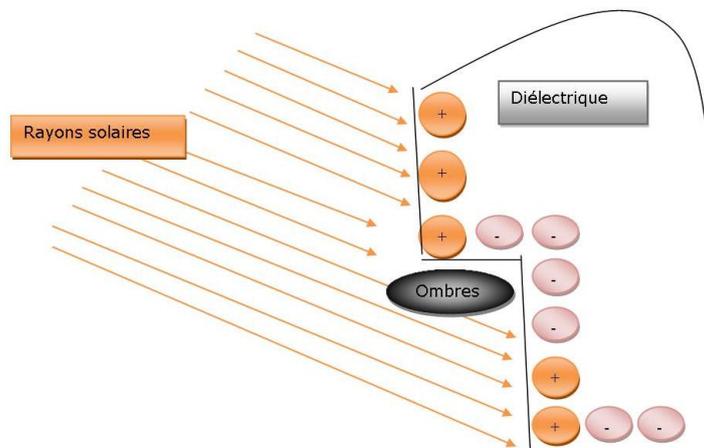


FIG. 3.2 – la charge différentielle

Quand le diélectrique est placé à l'extérieur du satellite, on parlera de charge externe, et dans le cas contraire de charge interne.

3.1.3 Charge externe

Un satellite baignant dans un plasma est soumis à un potentiel différent du plasma ambiant [Mar94]. Les particules chargées ont un certain parcours dans la matière avec laquelle elles interagissent, au terme duquel elles y sont complètement absorbées si le parcours est inférieur à l'épaisseur du matériel.

La figure 3.3 illustre la charge externe côté jour et côté nuit. Dans l'obscurité, la surface du satellite tend à se charger négativement par les électrons du plasma ambiant car les électrons se déplacent à des vitesses plus élevées que celles des ions grâce à leur légèreté [LA95]. Pour la charge externe, la surface se charge typiquement à l'énergie moyenne (dans l'eV) du courant extérieur. En orbite géosynchrone (GEO), les surfaces exposées au soleil se chargent positivement (à 2 ou 3 Volts) à cause de l'émission de photoélectrons par la surface du satellite; pendant les éclipses, on observe un potentiel négatif sur les

surfaces [Gar81]. Dans les orbites basses, les courants d'électrons sont les plus grands et les satellites tendent à être légèrement négatifs [RC92].

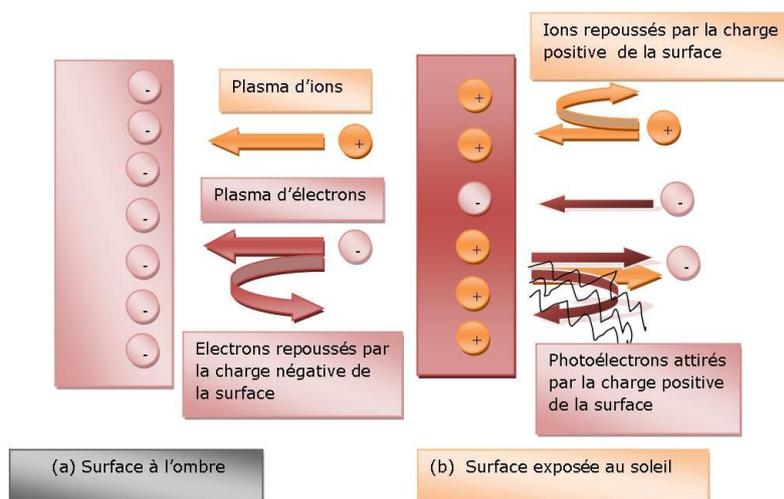


FIG. 3.3 – chargement des surfaces en cas d'obscurité et lumière

3.2 CHARGE INTERNE

Cette charge est produite par les particules les plus énergétiques (électrons ou protons) ayant traversé les parois les plus minces du satellite sans y être absorbées. Par exemple, les électrons piégés dans les ceintures de rayonnement de Van Allen de la terre.

3.3 PROPRIÉTÉS ORBITALES

Les orbites basses dites orbites LEO varient entre 100 et 2000 kilomètres d'altitude. Les orbites GEO sont à environ 36.000 kilomètres (ou à 6.6 RE où RE = 6378 km). Les caractéristiques physiques du plasma présentent des variations importantes suivant l'orbite considérée, comme le montrent le tableau 3.1 et la figure 3.4.

Les satellites en orbites polaires PEO peuvent rencontrer une autre population que des électrons faibles dans les zones des cornets polaires : les précipitations aurorales d'électrons. Dans ces régions, pendant des temps courts (quelques secondes ou dizaines de

Paramètre de plasma	GEO	LEO
Densité (m^{-3})	10^6	10^{11}
Température (eV)	10^3	0.2
Courant thermique d'électron (A/m)	10^{-6}	10^{-3}

TAB. 3.1 – Paramètres typiques de plasma pour LEO et GEO [MKC82]

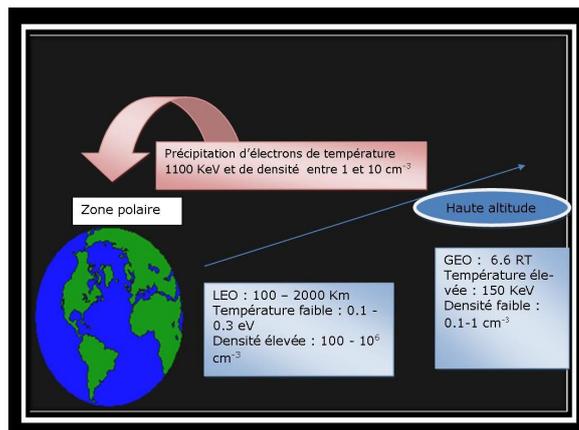


FIG. 3.4 – propriétés du plasma de l'espace

secondes) des courants d'électrons importants associés à des énergies de $10keV$ sont épisodiquement présents. Ces électrons ont le pouvoir d'induire des potentiels de plusieurs centaines de Volts. En fait, la précipitation des électrons, la position du satellite à l'ombre, la faible densité du plasma ambiant et la présence du satellite dans les cornets polaires sont des éléments essentiels à cet environnement. On pourra se référer à [JNA94] pour plus de détails.

Deuxième partie

MODÉLISATION

MISE EN ÉQUATIONS

Sommaire

4.1 Interactions plasma-satellite : phénomènes de bord	45
4.1.1 Interactions électrostatiques	46
4.1.2 Réémissions aux parois	51
4.2 Environnement plasmique : paramètres physiques	55
4.2.1 Modèles de charge dans les orbites basses (à 1400 km)	55
4.2.2 Caractéristiques du plasma LEO et PEO	55
4.3 Modèles cinétiques, modèles fluides	56
4.3.1 Equations cinétiques	56
4.3.2 Dérivation des équations fluides du plasma	58
4.3.3 Les équations fluides	58

4.1 INTERACTIONS PLASMA-SATELLITE : PHÉNOMÈNES DE BORD

La figure 4.1 représente un satellite de télécommunication. On voit que le satellite a une structure métallique composée de panneaux solaires et d'antennes paraboliques. Les différentes composantes du satellite sont recouvertes par différents matériaux diélectriques.

On considère le satellite comme une boîte métallique, assimilée à un conducteur parfait, recouverte de diélectriques. En interagissant avec le plasma environnant, le satellite reçoit un flot de particules chargées sous la forme d'un courant. Des particules s'implantent en surface, d'autres sont réémises et d'autres sont dirigées vers le conducteur parfait par conductivité. Le bilan de charges reçues n'étant nul qu'à l'équilibre, la charge électrostatique du satellite s'en trouve affectée.

Le satellite est composé d'un conducteur parfait qu'on représente par l'ouvert Ω_0 recouvert d'un nombre fini N_d de diélectriques d'épaisseur d_k , représentés par les ouverts $(\Omega_k)_{k=1..N_d}$.

On notera $\Omega = \bigcup_{k=0}^{N_d} \Omega_k$ l'ouvert représentant le satellite et Ω^c l'extérieur de celui-ci. Pour chaque diélectrique on notera ϵ_k et σ_k sa permittivité et sa conductivité électrique. On introduit :

$$-\Gamma = \bigcup_{k=0}^{N_d} \partial\Omega_k \text{ les interfaces entre les sous domaines,}$$

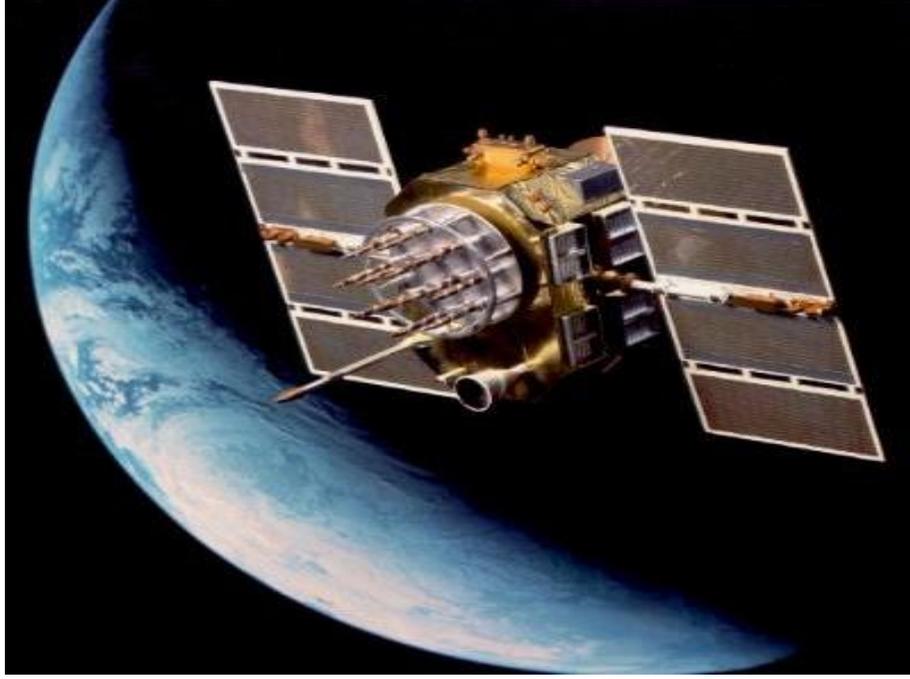


FIG. 4.1 – Photo d'un satellite [nav]

- $\Gamma_{c-v} = \Gamma \setminus \bigcap_{k=0}^{N_d} \partial\Omega_k$ l'interface entre le conducteur et le vide,
- $\Gamma_{c-d} = \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_{c-v}$ l'interface entre le conducteur et les diélectriques,
- $\Gamma_{d-v} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{c-v}$ l'interface entre les diélectriques et le vide,
- $\Gamma_{d-d} = \Gamma \setminus (\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega)$ les interfaces entre 2 diélectriques voisins.

On peut voir sur la figure 4.2 une illustration des notations données précédemment. Pour simplifier le dessin, on suppose que le satellite est une sphère, recouvert d'une couche de diélectriques.

4.1.1 Interactions électrostatiques

Dans cette partie, on rappelle les équations décrivant la prise de charge du satellite [Cha01]. En effet, les équations de Maxwell permettent de comprendre les mécanismes de prises de charge et de conductivité :

$$\begin{aligned}
 -\partial_t D + \operatorname{rot} H &= J, \\
 \operatorname{div} D &= \rho, \\
 \partial_t B + \operatorname{rot} E &= 0, \\
 \operatorname{div} B &= 0, \\
 D &= \epsilon E, \quad B = \mu H.
 \end{aligned}$$

E et H désignent les champs électrique et magnétique, D et B les déplacements électrique et magnétique. J et ρ sont les densités volumiques de courant et de charge électrique. ϵ et

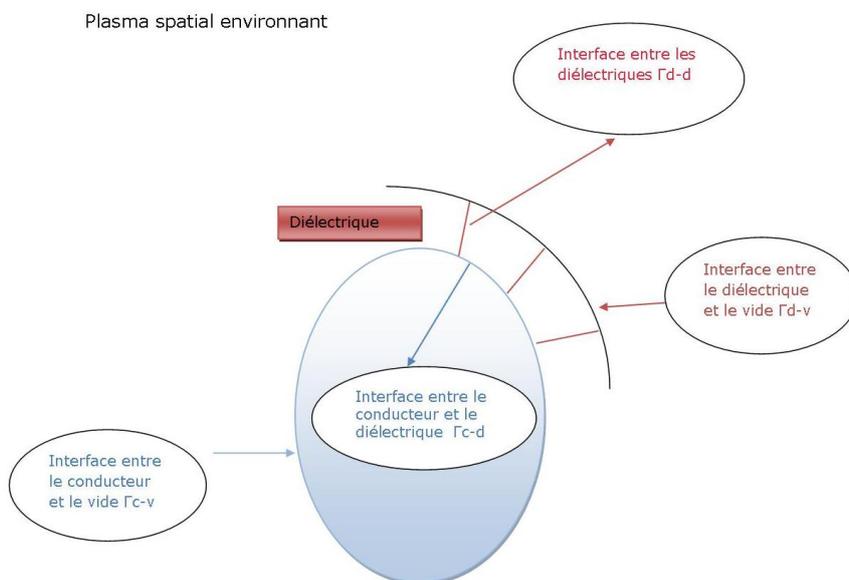


FIG. 4.2 – Frontières d'un satellite

μ sont respectivement la permittivité et la perméabilité électrique. Elles sont constantes pour chaque diélectrique.

On néglige les phénomènes d'induction, *i.e.* $\partial_t B = 0$. Donc E dérive d'un potentiel électrostatique Φ : $E = -\nabla\Phi$. En prenant la divergence de la première équation, les équations de Maxwell deviennent

$$\begin{aligned}
 -\partial_t \operatorname{div} D &= \operatorname{div} J, \\
 \operatorname{div} D &= \rho, \\
 \partial_t B &= 0, \\
 E &= -\nabla\Phi, \\
 B(t=0) &= B_0, \operatorname{div} B_0 = 0, \\
 D &= \epsilon E, \quad B_0 = \mu H_0,
 \end{aligned}$$

où H_0 est le champ magnétique constant correspondant au déplacement constant B_0 vérifiant $\operatorname{div} B_0 = 0$. Sachant que le champ magnétique constant n'intervient plus et que le champ électrique dérive d'un potentiel, on ne garde que les deux premières équations écrites sous la forme :

$$-\partial_t \rho = \operatorname{div} J, \quad (4.1)$$

$$-\operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) = \rho. \quad (4.2)$$

Tout d'abord, on décompose le courant J en trois contributions :

$$J = \begin{cases} J_{ext}, & \text{dans } \Omega^c, \\ J_\Gamma, & \text{dans } \partial\Omega_0, \\ J_k = \sigma_k E_k = -\sigma_k \nabla \Phi, & \text{dans } \Omega_k. \end{cases}$$

où J_{ext} désigne la densité de courant à l'extérieur du satellite, qui est régulière dans Ω^c et dans chaque Ω_k et nulle dans Ω_0 . Le courant de fuite J_k existe par conductivité vers le conducteur parfait. En outre, on néglige la conductivité surfacique entre deux diélectriques. La propriété fondamentale des conducteurs parfaits entraîne que le champ E est nul dans le conducteur. Le courant surfacique J_Γ existant à la surface du conducteur est nul en dehors de $\partial\Omega$ (voir remarque 4.1).

De plus, la charge se décompose aussi en trois contributions :

$$\rho = \begin{cases} \rho_{ext}, & \text{dans } \Omega^c, \\ \rho_\Gamma, & \text{dans } \partial\Omega_0, \\ \rho_k, & \text{dans } \Omega_k, \end{cases}$$

où ρ_{ext} est la charge du milieu extérieur, ρ_k la charge portée par le diélectrique qui sera nulle dans le cas où les diélectriques sont assez fins puisqu'il n'y aura pas accumulation de charge en volume, et ρ_Γ la charge portée par la surface Γ . Pour le choix de l'orientation des normales γ_n , on prend les normales pointant vers l'intérieur du satellite et du conducteur parfait.

En écrivant $\operatorname{div} D$ au sens des distributions, on a : $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \psi \operatorname{div} D dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} D \cdot \nabla \psi dx \\ &= - \int_{\Omega^c} D \cdot \nabla \psi dx - \sum_k \int_{\Omega_k} D \cdot \nabla \psi dx \\ &= \int_{\Omega^c} \psi \operatorname{div} D dx + \sum_k \int_{\Omega_k} \psi \operatorname{div} D dx - \int_\Gamma [D \cdot \gamma_n] \psi d\gamma, \end{aligned}$$

où $[\cdot]$ est le saut de la grandeur \cdot à travers la surface considérée. En tenant compte que $D = \epsilon_k E_k = -\epsilon_k \nabla \Phi$, on en déduit que :

$$\operatorname{div} D = [\epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi] \text{ dans chaque } \Omega_k \text{ et sur } \Gamma.$$

On procède de même pour $J = J_{ext} \delta_{\Omega^c} + J_\Gamma \delta_{\partial\Omega_0} + J_k \delta_{\Omega_k}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \psi \operatorname{div} J dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} J \cdot \nabla \psi dx \\ &= - \int_{\Omega^c} J_{ext} \cdot \nabla \psi dx - \int_{\partial\Omega_0} J_\Gamma \cdot \nabla \psi d\gamma - \sum_k \int_{\Omega_k} J_k \cdot \nabla \psi dx \\ &= \int_{\Omega^c} \psi \operatorname{div} J_{ext} dx + \int_{\partial\Omega_0} \operatorname{div}_\Gamma J_\Gamma \cdot \psi d\gamma + \sum_k \int_{\Omega_k} \psi \operatorname{div} J_k dx - \int_\Gamma [J \cdot \gamma_n] \psi d\gamma, \end{aligned}$$

où $\operatorname{div}_\Gamma J_\Gamma$ est la divergence surfacique de la densité de courant J_Γ .

En utilisant la relation $J_k = -\sigma_k \nabla \Phi$ dans Ω_k et $J = 0$ dans Ω_0 , on obtient :

$$\operatorname{div} J = \begin{cases} [J_k \cdot \gamma_n] = [\sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi], & \text{sur } \Gamma_{d-d}, \\ \operatorname{div} J_\Gamma - J_{ext} \cdot \gamma_n, & \text{sur } \Gamma_{c-v}, \\ J_k \cdot \gamma_n - J_{ext} \cdot \gamma_n = \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi - J_{ext} \cdot \gamma_n, & \text{sur } \Gamma_{d-v}, \\ \operatorname{div} J_\Gamma - J_k \cdot \gamma_n = \operatorname{div} J_\Gamma - \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi, & \text{sur } \Gamma_{c-d}. \end{cases}$$

De plus, en supposant que les diélectriques sont assez fins, la charge volumique dans les diélectriques devient négligeable et la dérivée du potentiel sur Γ_{c-d} et Γ_{d-v} est approchée par la différence finie

$$\partial_{\gamma_n} \Phi_{diel}(t, x) = \frac{\phi_{abs}(t) - \Phi(t, x)}{d_k}, \quad (4.3)$$

avec ϕ_{abs} le potentiel du conducteur parfait.

L'équation $-\partial_t \operatorname{div} D = \operatorname{div} J$ devient :

$$\partial_t(\epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} - \epsilon_0 \partial_{\gamma_n} \Phi) - J_{ext} \cdot \gamma_n + \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{d-v}, \quad (4.4)$$

$$\partial_t(-\epsilon_0 \partial_{\gamma_n} \Phi) + \operatorname{div}_\Gamma J_\Gamma - J_{ext} \cdot \gamma_n = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{c-v}, \quad (4.5)$$

$$\partial_t(-\epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel}) + \operatorname{div}_\Gamma J_\Gamma - \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{c-d}, \quad (4.6)$$

$$\partial_t(\epsilon_k - \epsilon_{k'}) \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} = (\sigma_k - \sigma_{k'}) \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel}, \quad \text{sur } \Gamma_{d-d}. \quad (4.7)$$

Ces équations font état de la prise de charge du satellite.

En négligeant les charges sur Γ_{d-d} car les surfaces des diélectriques sont minces et les particules n'ont pas assez d'énergie pour pénétrer à l'intérieur des diélectriques, on supprime l'équation (4.7).

De plus, sachant que la surface du conducteur Ω_0 est fermée, le courant J_Γ vérifie :

$$\int_{\partial \Omega_0} \operatorname{div}_\Gamma J_\Gamma = 0.$$

En intégrant les équations (4.5) et (4.6), on obtient :

$$\int_{\Gamma_{c-v}} [\partial_t(-\epsilon_0 \partial_{\gamma_n} \Phi) - J_{ext} \cdot \gamma_n] d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} [\partial_t(-\epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel}) - \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel}] d\gamma = 0. \quad (4.8)$$

De plus, on suppose qu'il n'y a pas de charge à l'intérieur des diélectriques et que

$$\int_{\Gamma_{d-v}} \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} d\gamma = \int_{\Gamma_{c-d}} \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} d\gamma. \quad (4.9)$$

Les équations à résoudre pour trouver les potentiels $\Phi(t, x)$ et $\phi_{abs}(t)$ sont

$$-\epsilon_0 \Delta \Phi = \rho \text{ dans } \Omega^c, \quad (4.10)$$

$$\partial_t(\epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} - \epsilon_0 \partial_{\gamma_n} \Phi) - J_{ext} \cdot \gamma_n + \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} = 0 \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \quad (4.11)$$

$$\int_{\Gamma_{c-v}} \partial_t(-\epsilon_0 \partial_{\gamma_n} \Phi) - J_{ext} \cdot \gamma_n d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} [\partial_t(-\epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel}) - \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel}] d\gamma = 0, \quad (4.12)$$

$$\Phi(t, x) = \phi_{abs}(t) \text{ sur } \Gamma_{c-v} \quad (4.13)$$

$$\Phi \rightarrow 0 \text{ à l'infini,} \quad (4.14)$$

avec des conditions initiales à $t = 0$ pour Φ et ϕ_{abs} sur Γ_{c-v} et où $\partial_{\gamma_n} \Phi_{diel}$ est donné par (4.3).

Donc le problème considéré est un système couplé pour les variables Φ et ϕ_{abs} . Il est aussi fermé. En effet, l'équation (4.12) est une équation scalaire de fermeture pour la détermination de ϕ_{abs} .

Remarque 4.1 *Pour prouver l'existence d'un courant surfacique J_Γ sur la surface du conducteur, on considère ici le satellite assimilé à un conducteur parfait Ω_0 , et on note le domaine extérieur Ω_0^c . Les champs électrique et magnétique totaux se décomposent en deux contributions et ceci est dû à une perturbation causée par la présence du satellite dans l'environnement plasmique :*

$$(E_T, H_T) = (E_i, H_i) + (E_d, H_d)$$

où

- E_T, H_T sont les champs électrique et magnétique totaux,
- E_i, H_i sont les champs électrique et magnétique incidents provenant d'une source incidente (ici la source est le vent solaire),
- E_d, H_d sont les champs électrique et magnétique diffractés qui sont réfléchis par la surface du satellite (voir figure 4.3).

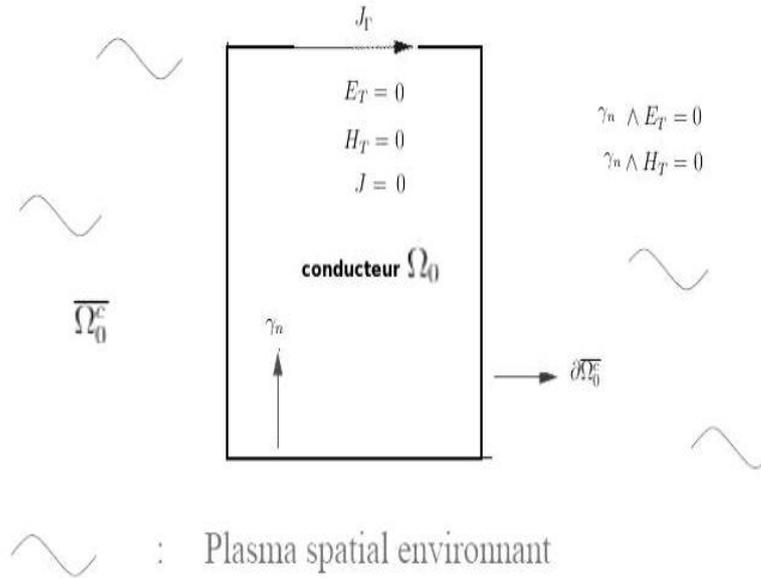


FIG. 4.3 – Perturbation des champs lors de la présence d'un conducteur dans un plasma

De plus, E_T et H_T obéissent aux équations de Maxwell :

$$\epsilon \partial_t E_T - \nabla \times H_T = 0, \quad (4.15)$$

$$\mu \partial_t H_T + \nabla \times E_T = 0. \quad (4.16)$$

En intégrant (4.15) au sens des distributions, on a $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$:

$$\epsilon \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t E_T \psi dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times H_T \psi dx = 0,$$

et comme $\mathbb{R}^3 = \Omega_0 \cup \overline{\Omega_0^c}$, on obtient

$$\epsilon \int_{\Omega_0} (\partial_t E_T - \nabla \times H_T) \psi dx + \epsilon \int_{\overline{\Omega_0^c}} (\partial_t E_T - \nabla \times H_T) \psi dx = 0. \quad (4.17)$$

Comme $E_T = 0$ dans Ω_0 , alors aucune onde ne sera transmise à l'intérieur du satellite. Ainsi

$$E_T = \begin{cases} E_d & \text{dans } \overline{\Omega_0^c}, \\ 0 & \text{dans } \Omega_0. \end{cases}$$

L'équation (4.17) devient

$$\epsilon \int_{\overline{\Omega_0^c}} (\partial_t E_T - \nabla \times H_T) \psi dx = 0. \quad (4.18)$$

En remplaçant E_T et H_T par leurs valeurs dans l'équation (4.18), on obtient

$$\epsilon \int_{\overline{\Omega_0^c}} \partial_t E_i \psi dx - \int_{\overline{\Omega_0^c}} \nabla \times H_i \psi dx + \epsilon \int_{\overline{\Omega_0^c}} \partial_t E_d \psi dx - \int_{\overline{\Omega_0^c}} \nabla \times H_d \psi dx = 0.$$

Comme $E_i = 0$ dans $\overline{\Omega_0^c}$,

$$- \int_{\partial\Omega_0} \gamma_n \times H_i \psi dx + \epsilon \int_{\overline{\Omega_0^c}} \partial_t E_d \psi dx - \int_{\overline{\Omega_0^c}} \nabla \times H_d \psi dx = 0,$$

et ainsi

$$\partial_t D_d - \nabla \times H_d = \gamma_n \times H_i \delta_{\partial\Omega_0},$$

avec $D_d = \epsilon E_d$. On obtient alors l'expression d'un courant surfacique J_Γ en posant,

$$J_\Gamma = \partial_t D_d - \nabla \times H_d = \gamma_n \times H_i \delta_{\partial\Omega_0}.$$

La figure 4.4 montre les résultats de la simulation du potentiel électrostatique sur un satellite de chez "Thalès Alenia Space".

4.1.2 Réémissions aux parois

La figure 4.5 présente les différents types de réémissions possibles que nous décrivons dans la suite.

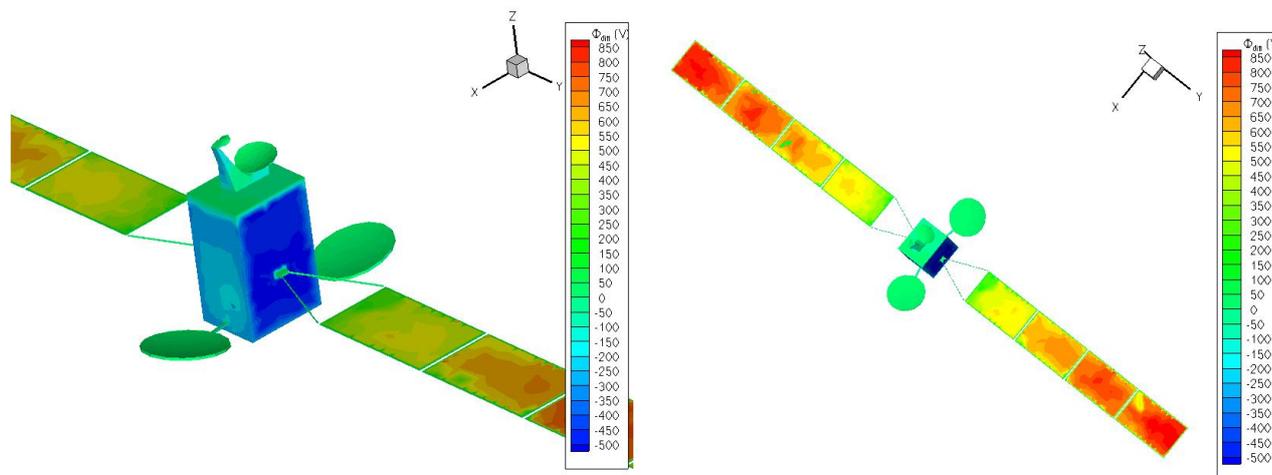


FIG. 4.4 – Simulation du potentiel différentiel sur un satellite

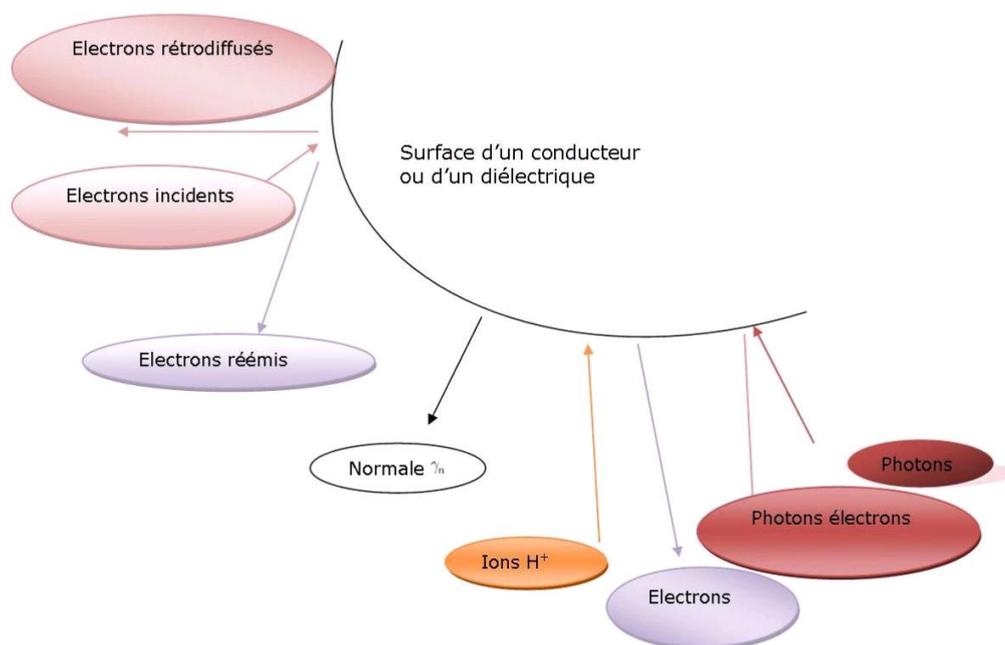


FIG. 4.5 – Réémissions aux parois d'un satellite

4.1.2.1 Emission secondaire électronique

Sous l'impact d'électrons incidents, des électrons dits secondaires sont réémis par la surface (diélectrique ou conductrice). On distingue généralement deux sortes de réémisions.

Dans le premier cas, les électrons sont diffusés de manière élastique ("backscattering") et possèdent une énergie proche de celle des électrons incidents. Ce sont des électrons rétrodiffusés.

Dans le deuxième cas, des électrons secondaires sont vraiment réémis par la surface. Ces derniers sont d'énergie faible (quelques eV) et correspondent aux électrons arrachés à la surface.

Les taux d'émissions secondaires, noté δ_{back} pour les électrons rétrodiffusés et δ_{sec} pour ceux vraiment réémis, dépendent de paramètres liés à la surface (type de matériau, état de surface, etc...), et sont définis comme suit.

La physique des modèles de la pénétration de l'électron est généralement exprimée en termes de la vitesse de l'électron incident et du libre parcours moyen λ de l'électron secondaire. Dans [LK], Laframboise et Kamitsuma ont analysé les propriétés d'un modèle (SEE) pour des matériaux donnés comme le téflon et l'or dans le cas où $\lambda \rightarrow 0$. Ainsi, le modèle (SEE) sera approché par une formule analytique simplifiée. Pour tout v tel que $v \cdot \gamma_n < 0$, on introduit la quantité scalaire :

$$\delta_{sec}(v) = e^2 \delta_m \frac{E_c}{E_m} \exp\left(-2\sqrt{\frac{E_c}{E_m}}\right) \exp\left(\beta_{sec}(E_c)(1 - \cos(\theta))\right),$$

où :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{m_e v^2}{2}, \\ \theta &= \langle v, \gamma_n \rangle, \\ \beta_{sec}(E_c) &= \exp\left(\xi(E_c) - \sqrt{(\xi(E_c))^2 + 0.0228}\right), \\ \xi(E_c) &= 0.2755 \left(\ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) - 1.658\right). \end{aligned}$$

avec E_m le niveau d'énergie cinétique pour lequel le taux δ_{sec} est maximal (noté alors δ_m).

De façon analogue, on définit :

$$\delta_{back}(v) = \left(A \exp(-C \cdot E_c)\right) \exp\left(\beta_{back}(Z)(1 - \cos(\theta))\right),$$

où :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{m_e v^2}{2}, \\ \theta &= \langle v, \gamma_n \rangle, \\ \beta_{back}(Z) &= e^2 Z^{-0.56875}, \end{aligned}$$

avec Z le numéro atomique du matériau composant la surface, et A, C des constantes dépendant du matériau.

On se référera à [LK] pour plus de détails sur ces coefficients. Suite aux critiques formulées par C.Berthou dans [Ber98], on pourra préférer utiliser les valeurs données dans [DD92].

On définit :

$$\begin{aligned}\Gamma^{out} &= \{(t, x, v) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^N, v \cdot \gamma_n > 0\}, \\ \Gamma^{inc} &= \{(t, x, v) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^N, v \cdot \gamma_n < 0\}.\end{aligned}$$

De plus, soient $\gamma^{inc, out}$ les opérateurs de trace de la distribution des particules f sur les bords *i.e.* $\gamma^{inc} f = f_{inc} \in L^1(\Gamma^{inc}, |v \cdot \gamma_n| dv d\sigma(x) dt)$ où $d\sigma(x)$ est la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$. De la même manière, on note $\gamma^{out} f = f_{out} \in L^1(\Gamma^{out}, |v \cdot \gamma_n| dv d\sigma(x) dt)$.

De plus, la distribution des particules sur la surface du satellite est définie pour tout v tel que $v \cdot \gamma_n < 0$ comme suit :

$$f_{inc}(t, x, v) = R(f_{out}) + \Phi^{data},$$

où $\Phi^{data} > 0$ est une fonction donnée dans $L^1(\Gamma^{inc}, |v \cdot \gamma_n| dv d\sigma(x) dt)$ et R est un opérateur linéaire décrivant le taux d'émission des particules. Ainsi, on obtient

$$f_{sec, back} = \delta_{sec, back}(v) \int_{v \cdot \gamma_n < 0} v \cdot \gamma_n f_{out}(t, x, v) dv.$$

Et pour le courant réémis $J_{sec, back}$, on obtient :

$$J_{sec, back} = \int_{v \cdot \gamma_n < 0} v f_{sec, back}(t, x, v) dv.$$

Remarque 4.2 Dans la suite du chapitre, on considère que les réémissions sont de type spéculaire pour les particules α . Dans ce cas, la condition aux limites sur la surface du satellite sera donnée par :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_n < 0, \quad f_\alpha(t, x, v) = \delta_{back} \left(v - 2(v \cdot \gamma_n) \gamma_n \right) f_\alpha \left(t, x, v - 2(v \cdot \gamma_n) \gamma_n \right),$$

où δ_{back} est le taux d'émission secondaire pour les électrons rétrodiffusés.

4.1.2.2 Emission secondaire ionique

Les ions ne pénètrent pas de la même façon que les électrons dans les matériaux car ils n'ont pas la même masse. Leurs trajectoires sont différentes.

Cependant, la loi d'émission d'électrons secondaires due à l'impact d'ions est similaire à celles données précédemment en négligeant cependant la dépendance angulaire pour tout v tel que $v \cdot \gamma_n < 0$:

$$\delta_{sec}(v) = \frac{2\delta_{im} \sqrt{\frac{E_c}{E_{im}}}}{1 + \frac{E_c}{E_{im}}},$$

où δ_{im} et E_{im} sont des constantes définies de façon analogue à l'émission secondaire électronique en section 4.1.2.1.

On trouvera l'expression des coefficients dans [LSS].

4.1.2.3 Photoémission

Exposées au rayonnement solaire, les surfaces émettent aussi des électrons appelés photoélectrons de faible énergie. Cette réémission est responsable d'un courant secondaire qui joue un rôle important dans le mécanisme de charge. Afin de simplifier le problème, on négligera cependant tout phénomène de réémission.

On se réfère à [Cha01] et [CY04] pour la prise en compte des effets de réémissions dans la résolution de Vlasov-Poisson dans un cadre $2D$ axisymétrique et en $3D$ respectivement.

4.2 ENVIRONNEMENT PLASMIQUE : PARAMÈTRES PHYSIQUES

4.2.1 Modèles de charge dans les orbites basses (à 1400 km)

Selon son altitude, l'activité géomagnétique ou sa position orbitale, un satellite peut baigner dans des plasmas de caractéristiques très différentes. Sur l'orbite géostationnaire, dans le secteur nuit, le plasma est peu dense (moins d'une particule par centimètre-cube) et très chaud (quelques dizaines de milliers d'électron-volts). Sur des orbites basses, l'élément essentiel de cet environnement pour les phénomènes de charges est le plasma ionosphérique froid et dense noté LEO (Low Earth Orbit).

Les zones aurorales constituent deux régions circulaires autour de pôles Nord et Sud. Dans ces zones notées PEO (Polar Earth Orbit), le plasma est moins dense qu'en LEO, car il n'y a pas assez d'activité solaire, et plus chaud. Les électrons énergétiques de température $1 - 10^2 keV$ sont précipités le long des lignes de champ magnétique de la magnétosphère externe.

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse plus précisément au cadre de ces orbites LEO et PEO, la modélisation des orbites GEO étant établie dans [Cha01, CY04].

4.2.2 Caractéristiques du plasma LEO et PEO

On considère que le plasma est globalement neutre, de densité n_0 à l'équilibre thermodynamique et composé essentiellement d'ions H^+ et d'électrons, de températures voisines $K_B T$. Les caractéristiques typiques du plasma dans les deux régions sont données dans la table 4.1.

Les nombres de Knudsen, de Debye et de Larmor peuvent être calculés en prenant comme longueur caractéristique celle typique d'un satellite, soit $10m$.

Propriétés	Symboles	Valeurs en S.I en LEO/PEO
densité	n	$10^{12}/10^9 m^{-3}$
température	T	$10^3/10^8 K$
libre parcours moyen entre électrons/ions	$\lambda_{ei} = \frac{1}{n\sigma_{ei}}$	$10^3/10^{26} m$
champ magnétique	B	$10^{-5} Tesla$
fréquence du plasma électronique	$w_{pe} = \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}\right)^{1/2}$	$10^8/10^6 s^{-1}$
fréquence du plasma ionique	$w_{pi} = \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_i}\right)^{1/2}$	$10^6/10^4 s^{-1}$
fréquence de gyration électronique	$w_{ge} = \frac{eB}{m_e}$	$10^6 s^{-1}$
fréquence de gyration ionique	$w_{gi} = \frac{eB}{m_i}$	$10^2 s^{-1}$
fréquence de collision coulombienne	$\nu_{ei} = \frac{w_{pe} n \Lambda}{4\pi n \lambda_D^3}$	$10^{-2}/10^2 s^{-1}$
longueur de Debye	$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 K_B T}{ne^2}\right)^{1/2}$	$\sqrt{10^{-5}}/\sqrt{10^3} m$
rayon de gyration électronique	$r_{ge} = \frac{V_e^{th}}{w_{ge}}$	$10^{-1}/10 m$
rayon de gyration ionique	$r_{gi} = \frac{V_i^{th}}{w_{gi}}$	$10^1/10^3 m$
vitesse thermique électronique	$V_e^{th} = \left(\frac{K_B T}{m_e}\right)^{1/2}$	$10^5/10^7 m.s^{-1}$
vitesse thermique ionique	$V_i^{th} = \left(\frac{K_B T}{m_i}\right)^{1/2}$	$10^3/10^5 m.s^{-1}$
nombre de Larmor pour les ions	$N_{Li} = \frac{r_{gi}}{10}$	$1/10^2$
nombre de Larmor pour les électrons	$N_{Le} = \frac{r_{ge}}{10}$	$10^{-2}/1$
nombre de Debye	$N_D = \frac{\lambda_D}{10}$	$\sqrt{10^{-7}}/\sqrt{10}$

TAB. 4.1 – Caractéristiques du plasma LEO et PEO

Compte tenu du tableau 4.1, on constate que le régime LEO est considérablement plus collisionnel que les régimes GEO et PEO. Même si le nombre de Knudsen n'est pas négligeable, nous adopterons pour cette orbite une description fluide qui permet d'avoir des simulations réalistes pour des temps de calcul réduits par rapport à une simulation cinétique. Dans un programme plus ambitieux, un tel code hydrodynamique pourrait donner un prédicteur pertinent pour des simulations microscopiques. Tandis qu'en PEO, ces nombres sont tellement grands que les interactions entre les particules seront négligées et on ne tiendra pas compte des collisions, comme pour les plasmas GEO où la densité du plasma est aussi faible, de sorte que les particules qui le composent ne se rencontrent que très rarement sur les échelles de temps étudiées. Dans ce cas, on trouvera un plasma dit non collisionnel. Par exemple, la magnétosphère est un plasma non-collisionnel chaud (lors des éruptions solaires, voir figure 4.6). Chaque volume dont les dimensions sont de l'ordre de la longueur de Debye contient un très grand nombre de particules. On verra ultérieurement ce qu'implique la petite longueur de Debye.

4.3 MODÈLES CINÉTIQUES, MODÈLES FLUIDES

4.3.1 Equations cinétiques

Pour décrire un plasma, on résout le système couplé des équations de Maxwell et des équations de mouvement des particules. On considère l'espace des phases (x, v) où x est le

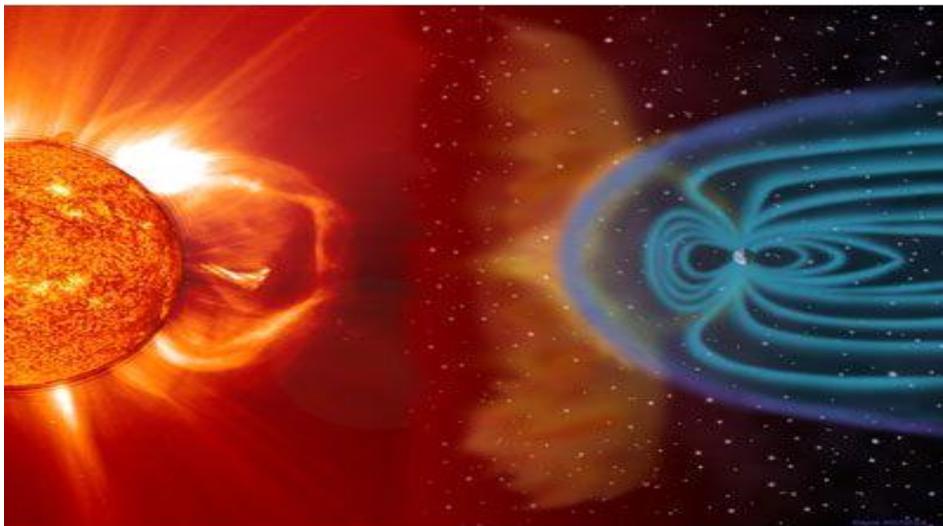


FIG. 4.6 – Eruption solaire [sitb]

vecteur position et v le vecteur vitesse. L'ensemble formé de N particules possède comme $3N$ degrés de liberté spatial et $3N$ degrés de liberté en vitesse. La distribution de ces particules est donnée par une fonction $f(t, x, v)$ déterminée par l'équation de Boltzmann :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} (E + v \times B) \cdot \nabla_v f = \partial_t f|_{coll}. \quad (4.19)$$

Si $f(t, x, v)$ est considérée localement comme une distribution maxwellienne :

$$f(t, x, v) = \frac{n}{(2\pi T)^{3/2}} \exp\left(\frac{-|v - u|^2}{2T}\right) \quad (4.20)$$

où n, T, u désignent respectivement la densité, la température et la vitesse du fluide, alors le terme de collisions à droite de l'équation (4.19) s'annule. Le terme à gauche de l'équation (4.19) est la dérivée totale par rapport au temps de $f(t, x, v)$ le long de la trajectoire définie par $(v, \frac{F}{m})$ où $F = q(E + v \times B)$ est la force de Lorentz. L'équation de Vlasov est une équation de Boltzmann non collisionnelle. Le terme de collision à droite dans (4.19) considère différents processus physiques et chimiques comme les réactions chimiques, l'ionisation ou la recombinaison, la friction, la diffusion et les échanges d'énergie.

4.3.2 Dérivation des équations fluides du plasma

Les équations fluides sont celles les plus utilisées pour la description d'un plasma non homogène. Elles sont obtenues de l'équation (4.19) systématiquement. On considère

$$\begin{aligned} n(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3v f(x, v, t) \text{ la densité,} \\ u(x, t) &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v v f(x, v, t) \text{ la vitesse du fluide,} \\ \Pi(x, t) &= m \int_{\mathbb{R}^3} d^3v (v - u)(v - u) f(x, v, t) \text{ le tenseur de pression,} \\ \varepsilon(x, t) &= \frac{1}{\gamma - 1} nT = \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v (v - u)^2 f(x, v, t) = Tr(\Pi) \text{ la densité d'énergie,} \end{aligned}$$

où $\gamma > 1$ est le rapport des chaleurs spécifiques. Avec ces notations, on définit :

$$p(x, t) = \frac{\gamma - 1}{2} Tr(\Pi) = \frac{\gamma - 1}{2} nT \text{ la pression scalaire.}$$

Ainsi, les équations fluides sont déterminées par les moments de l'équation de Boltzmann, *i.e.*

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3v v^i (\text{Equ. Boltzmann}) \text{ pour tout } i \in \{0, 1, 2\}.$$

Pour le terme de collision dans (4.19), on définit :

$$\begin{aligned} Q^n(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \partial_t f|_{coll}, \\ Q^p(x, t) &= m \int_{\mathbb{R}^3} d^3v (v - u) \partial_t f|_{coll}, \\ Q^E(x, t) &= \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v (v - u)^2 \partial_t f|_{coll}. \end{aligned}$$

4.3.3 Les équations fluides

Afin d'évaluer les moments de l'équation de Boltzmann, on calcule le moment d'ordre 0 de cette équation.

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3v \left(\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{F}{m} \cdot \nabla_v f \right) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \partial_t f|_{coll}.$$

Le premier terme de cette équation devient

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3v \partial_t f = \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} d^3v f = \partial_t n(x, t).$$

Le second terme est

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3v v \cdot \nabla_x f = \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \nabla_x (v f) = \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d^3v v f = \nabla_x \cdot (un).$$

Enfin le troisième terme donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \frac{F}{m} \cdot \nabla_v f &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \frac{F_i}{m} \cdot \partial_{v_i} f \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^2} d^2v \left[\frac{F_i}{m} f \right]_{v_i=-\infty}^{v_i=\infty} - \sum_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \frac{f}{m} \partial_{v_i} F_i. \end{aligned}$$

Puisque $f = 0$ pour $v_i = +\infty$ et $-\infty$ et $\partial_{v_i} F_i = 0$, alors $\int_{\mathbb{R}^3} d^3v \frac{F}{m} \nabla_v f = 0$. Le terme de collision de l'équation de Boltzmann se réduit à Q^n , et par suite le moment d'ordre 0 de l'équation de Boltzmann devient

$$\partial_t n(x, t) + \nabla \cdot (nu) = Q^n. \quad (4.21)$$

C'est l'équation de continuité de la densité du nombre des particules avec un terme source dans le second membre de l'équation. Le terme source décrit la production ou la disparition de masse au cours des réactions chimiques, l'ionisation ou la recombinaison. De la même manière, le moment d'ordre 1 de l'équation de Boltzmann et celui d'ordre 2 donnent les équations du moment et de l'énergie :

$$\partial_t (mnu) = -\nabla \cdot (mnu \otimes u) - \nabla \cdot \Pi + qn(E + u \times B) + uQ^n + Q^p,$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} mnu^2 \right) &= -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\gamma - 1} pu + \frac{1}{2} mnu^2 u + \Pi \cdot u + Q \right) \\ &\quad + qnu \cdot E + \frac{1}{2} u^2 Q^n + u \cdot Q^p + Q^E, \end{aligned}$$

où Q désigne le flux de chaleur $Q(x, t) = \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v (v - u)(v - u)^2 f(x, v, t)$. On remarque que ces équations ne sont pas fermées sauf si on considère que la fonction de distribution est une maxwellienne (voir 4.20).

MODÈLES POUR LES ORBITES LEO, PEO ET ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Sommaire

5.1	Grandeurs adimensionnées	61
5.2	Plasma d'orbite PEO : système de Vlasov-Poisson	63
5.2.1	Le système de Vlasov-Poisson	63
5.2.2	Système de Vlasov-Poisson adimensionné	64
5.2.3	Approximation pour le plasma d'orbite PEO	65
5.3	Plasma d'orbites LEO : modèles collisionnels et fluides	66
5.3.1	Limite quasi-neutre pour le modèle d'Euler-Poisson	66
5.3.2	Système d'Euler Poisson adimensionné	68
5.3.3	Passage à la limite formel pour $C' \gg 1$	68
5.3.4	Passage à la limite formelle pour $\eta' \rightarrow +\infty$	69
5.3.5	Autre adimensionnement du système d'Euler-Poisson	70

5.1 GRANDEURS ADIMENSIONNÉES

Pour réaliser l'analyse asymptotique des modèles sous-jacents aux orbites LEO (Low Earth Orbit) et PEO (Polar Earth Orbit), il est nécessaire d'adimensionner les systèmes. Pour cela, on introduit le choix suivant de grandeurs caractéristiques :

- n_0 la densité du plasma,
- V_i^{th} la vitesse thermique ionique,
- L la longueur du satellite,
- f_0 la fonction de distribution caractéristique.

On s'intéresse au temps caractéristique t_0 de charge du satellite qui est de l'ordre de 10 ou $10^2 s$, et soit J_0 le courant donné par $\frac{\epsilon_0 \Phi_0}{L t_0}$. Soient d et σ l'épaisseur et la conductivité caractéristique des diélectriques.

Les énergies sont de l'ordre de l'énergie cinétique ionique. Ceci implique que les températures sont de l'ordre de $T_0 = \frac{m_i (V_i^{th})^2}{K_B}$. Enfin, l'énergie potentielle électrique dans le plasma est de l'ordre de l'énergie thermique. L'ordre de grandeur du potentiel est alors donné par $\Phi_0 = \frac{m_i (V_i^{th})^2}{e}$ le potentiel thermique. Les grandeurs p_0 et Φ_0 sont définis par $p_0 = K_B n_0 T_0$ et $\Phi_0 = \frac{K_B T_0}{e} = \frac{m_i (V_i^{th})^2}{e}$ avec $T_0 = T_e = T_i$.

On introduit ainsi les variables et inconnues adimensionnées :

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{v}{V_i^{th}}, \quad \bar{f}_\alpha(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) = \frac{f_\alpha(t, x, v)}{f_0}, \quad \bar{g}_\alpha(\bar{v}) = \frac{g_\alpha(v)}{f_0}, \\ \bar{n}_i &= \frac{n_i}{n_0}, \quad \bar{n}_e = \frac{n_e}{n_0}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{V_i^{th}}, \quad \bar{u}_e = \frac{u_e}{V_i^{th}}, \\ \bar{x} &= \frac{x}{L}, \quad \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{T}_{i,e} = \frac{T_{i,e}}{T_0}, \quad \bar{p}_{i,e} = \frac{p_{i,e}}{p_0}, \\ \bar{d}_k &= \frac{d_k}{d}, \quad \bar{\epsilon}_k = \frac{\epsilon_k}{\epsilon_0}, \quad \bar{\sigma}_k = \frac{\sigma_k}{\sigma},\end{aligned}$$

ainsi que les constantes sans dimension :

$$\epsilon = \frac{m_e}{m_i}, \quad C' = \frac{t_0}{\frac{L}{V_i^{th}}}, \quad \beta = \frac{t_0}{w_{gi}^{-1}}, \quad \eta' = \frac{L}{\lambda_d}, \quad \alpha = \frac{t_0}{\tau}, \quad \nu = \frac{L}{d}, \quad \tau' = \frac{\sigma t_0}{\epsilon_0}.$$

Leurs valeurs sont données dans le tableau 5.1 et pour un diélectrique d'épaisseur $10\mu m$ et $t_0 = 10s$ ou 10^2s proposés par l'industriel. On verra plus loin qu'un autre choix du temps caractéristique est possible. Il s'agit du temps de charge différentielle qui est de l'ordre de $10^{-3}s$. Dans le cas des orbites LEO, ceci conduira à un modèle évolutif pour les quantités fluides. Nous optons pour ce choix de temps de charge car la longueur du satellite est plus grande que l'épaisseur du diélectrique et pour éviter la présence du temps comme paramètre du modèle traité. Ceci empêche que l'évolution en temps du modèle soit dirigée par des termes différentiels intervenant dans les conditions aux bords pour le potentiel différentiel.

Propriétés	Symboles	Valeurs pour $t_0 = 10s$ LEO/PEO	Valeurs pour $t_0 = 10^2s$ LEO/PEO
rapport de temps de charge du satellite sur le temps parcouru avec une vitesse V_i^{th}	C'	$10^3/10^5$	$10^4/10^6$
rapport de masse	ϵ	10^{-4}	10^{-4}
rapport de temps de charge sur la période de gyration ionique	β	10^3	10^4
rapport de longueur caractéristique du satellite sur l'épaisseur du diélectrique	ν	10^6	10^6
	τ'	10^{-1}	1
rapport de temps de charge sur le temps de relaxation	α	1	10
rapport du longueur du satellite sur la longueur de Debye	η'	$10^3/\sqrt{10}$	$10^3/\sqrt{10}$

TAB. 5.1 – Valeurs des constantes sans dimension en LEO et PEO

5.2 PLASMA D'ORBITE PEO : SYSTÈME DE VLASOV-POISSON

5.2.1 Le système de Vlasov-Poisson

On considère dans cette section le cas où la dynamique des particules (ions et électrons) obéit à une équation de Vlasov et où le potentiel électrostatique est donné par l'équation de Poisson.

En fait, pour les plasmas chauds, quand il est possible de négliger les collisions binaires entre les particules (tel est le cas ici), celles-ci n'interagissent plus que par l'intermédiaire du champ électrique $E(t, x) = -\nabla\Phi(t, x)$ qui est défini d'une manière auto-consistante car le champ magnétique est supposé constant.

L'équation cinétique correspondante est l'équation de Vlasov :

$$\forall x \in \Omega^c, \forall v \in \mathbb{R}^3, \forall t \geq 0, \\ \partial_t f_\alpha(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f_\alpha(t, x, v) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (E + v \times B) \cdot \nabla_v f_\alpha(t, x, v) = 0, \quad (5.1)$$

où α représente l'ion ou l'électron.

L'équation (5.1) traduit la conservation de la fonction de distribution f_i des ions (resp. fonction de distribution f_e des électrons) le long des trajectoires des ions (resp. des électrons) soumises au champ électrique $E(t, x)$.

Ici, v désigne la vitesse des particules, x est la variable d'espace et t la variable de temps. $q_\alpha = ek_\alpha$ avec k_α égal à 1 pour l'ion et -1 pour l'électron.

En négligeant les effets de réémissions, la condition aux limites sur la surface du satellite est donnée par :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_n < 0, \quad f_\alpha(t, x, v) = 0,$$

où γ_n est la normale entrante au satellite.

Remarque 5.1 *Dans le cas où les effets de réémissions sont pris en compte, la condition aux limites sur la surface du satellite sera donnée d'après la section 4.1.2.1.*

L'équation (5.1), couplée à l'équation de Poisson ci-dessous constitue l'équation fondamentale de la physique des plasmas PEO.

On rappelle l'équation de Poisson déjà donnée à la section 4.1.1 :

$$-\epsilon_0 \Delta \Phi = e \left(n_i(t, x) - n_e(t, x) \right) \text{ dans } \Omega^c, \quad (5.2)$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide.

n_e et n_i désignent les densités d'électrons et d'ions et ont pour expression :

$$n_\alpha(t, x) = \int_{v \in \mathbb{R}^3} f_\alpha(t, x, v) dv.$$

L'équation (5.2) est accompagnée de quatre conditions aux limites :

$$\partial_t \left(\epsilon_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} - \epsilon_0 \partial_{\gamma_n} \Phi \right) + \sigma_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} - J_{ext} \cdot \gamma_n = 0 \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

$$\int_{\Gamma_{c-v}} \left[\partial_t (-\epsilon_0 \partial_{\gamma_n} \Phi) - J_{ext} \cdot \gamma_n \right] d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \left[\partial_t \left(-\epsilon_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right) - \sigma_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right] d\gamma = 0, \quad (5.4)$$

$$\Phi(t, x) = \phi_{abs}(t) \text{ sur } \Gamma_{c-v}, \quad (5.5)$$

$$\Phi \rightarrow 0, \quad \|x\| \rightarrow \infty, \quad t \geq 0. \quad (5.6)$$

où d_k est l'épaisseur du diélectrique.

O.Chanrion a montré l'existence de solution du problème (5.2)-(5.6) dans un cadre 1D dans [Cha01].

On va voir qu'après adimensionnement des équations, une des simplifications de la modélisation en orbite PEO consiste à négliger la charge d'espace.

Dans [BD85], C.Bardos et P.Degond ont prouvé l'existence d'une solution régulière pour tout temps aux équations de Vlasov-Poisson en dimension 3, pourvu que les données initiales soient localisées et assez petites. Une propriété de dispersion a été établie dans le but de prouver l'existence d'une solution régulière de l'équation de Vlasov-Poisson.

Dans [Pfa92], K.Pfaffelmoser a montré l'existence de solutions classiques globales aux équations de Vlasov-Poisson en dimension 3 pour des données initiales quelconques.

R.Diperna et P.L.Lions, dans [DL90], ont fait l'étude des équations de Vlasov en dimension quelconque. Ils ont par ailleurs établi des résultats de stabilité forte et faible ainsi que des résultats d'existence de solutions globales.

F.Poupaud a montré dans [Pou90] l'existence de solutions à un problème aux limites pour le système Vlasov-Poisson dans le cas stationnaire en utilisant des sur-solutions qui permettent dans le cas de forces répulsives de contrôler la concentration des particules.

P.L Lions et B. Perthame ont étudié dans [LP90] le système Vlasov-Poisson dans un cadre 3D. Ils ont montré que la borne sur les moments d'ordre supérieur à 3 est préservée pour les solutions régulières des équations de Vlasov-Poisson.

5.2.2 Système de Vlasov-Poisson adimensionné

Le système de Vlasov-Poisson (5.1)-(5.6) adimensionné s'écrit : $\forall \bar{x} \in \Omega^c, \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \bar{t} \geq 0$,

$$\frac{1}{C'} \partial_{\bar{t}} \bar{f}_i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) + \bar{v} \nabla_{\bar{x}} \bar{f}_i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) - \nabla_{\bar{x}} \bar{\Phi} \nabla_{\bar{v}} \bar{f}_i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) - \frac{\beta}{C'} (\bar{v} \times \bar{B}) \nabla_{\bar{v}} \bar{f}_i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) = 0,$$

$$\lim_{\|\bar{x}\| \rightarrow +\infty} \bar{f}_i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) = \bar{g}_i(\bar{v}), \quad \bar{t} \geq 0$$

$$\bar{f}_i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) = 0, \quad \bar{x} \in \partial\Omega, \quad \bar{v} \in \mathbb{R}^3; \quad \bar{v} \cdot \gamma_n < 0, \quad \bar{t} \geq 0,$$

$$\frac{1}{C'} \partial_{\bar{t}} \bar{f}_e(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) + \bar{v} \nabla_{\bar{x}} \bar{f}_e(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) + \frac{1}{\epsilon} \nabla_{\bar{x}} \bar{\Phi} \nabla_{\bar{v}} \bar{f}_e(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) - \frac{\beta}{C'} (\bar{v} \times \bar{B}) \nabla_{\bar{v}} \bar{f}_e(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{\|\bar{x}\| \rightarrow +\infty} \bar{f}_e(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) &= \bar{g}_e(\bar{v}) \quad , \\ \bar{f}_e(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) &= 0, \quad \bar{x} \in \partial\Omega, \quad \bar{v} \in \mathbb{R}^3; \quad \bar{v} \cdot \gamma_n < 0, \quad \bar{t} \geq 0, \\ -\frac{1}{\eta'^2} \Delta_{\bar{x}} \bar{\Phi}(\bar{t}, \bar{x}) &= \left(\bar{n}_i(\bar{t}, \bar{x}) - \bar{n}_e(\bar{t}, \bar{x}) \right), \\ \partial_{\bar{t}} \left(\nu \bar{\epsilon}_k \frac{\bar{\phi}_{abs} - \bar{\Phi}}{\bar{d}_k} - \partial_{\gamma_n} \bar{\Phi} \right) &+ \tau' \nu \bar{\sigma}_k \frac{\bar{\phi}_{abs} - \bar{\Phi}}{\bar{d}_k} - \bar{J}_{ext} \cdot \gamma_n = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{d-v}, \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_{c-v}} \left[\partial_{\bar{t}} (-\partial_{\gamma_n} \bar{\Phi}) - \bar{J}_{ext} \cdot \gamma_n \right] d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \left[\partial_{\bar{t}} \left(-\nu \bar{\epsilon}_k \frac{\bar{\phi}_{abs} - \bar{\Phi}}{\bar{d}_k} \right) - \nu \tau' \bar{\sigma}_k \frac{\bar{\phi}_{abs} - \bar{\Phi}}{\bar{d}_k} \right] d\gamma = 0,$$

$$\bar{\Phi}(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{\phi}_{abs}(\bar{t}), \quad \text{sur } \Gamma_{c-v},$$

$$\bar{\Phi} \rightarrow 0, \quad \|x\| \rightarrow \infty, \quad \forall \bar{t} \geq 0,$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{n}_{i/e}(\bar{t}, \bar{x}) &= \int_{\bar{v} \in \mathbb{R}^3} \bar{f}_{i/e}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) d^3 \bar{v}, \\ \bar{J}_{i/e}(\bar{t}, \bar{x}) &= \int_{\bar{v} \in \mathbb{R}^3; \bar{v} \cdot \gamma_n < 0} k_{i/e} \bar{v} \bar{f}_{i/e}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) d^3 \bar{v}. \end{aligned}$$

5.2.3 Approximation pour le plasma d'orbite PEO

On remarque d'après le tableau 5.1, que pour le plasma magnétosphérique en orbite PEO, le temps de charge du satellite est à peu près le même que la période de gyration ionique, et qu'ils sont tous les deux très petits devant le temps de parcours des particules le long du satellite avec la vitesse thermique ionique. Donc le paramètre $\frac{1}{C'}$ est négligeable *i.e.* très petit devant 1. Dans le but de simplifier les équations, on passe formellement à la limite lorsque le paramètre $\frac{1}{C'}$ tend vers zéro.

On obtient alors une équation de Vlasov stationnaire vis-à-vis du plasma pour les ions et les électrons et une charge d'espace négligeable : $\forall \bar{x} \in \Omega^c, \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \bar{t} \geq 0$,

$$\begin{aligned} \bar{v} \nabla_{\bar{x}} \bar{f}_i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) - \nabla_{\bar{x}} \bar{\Phi} \nabla_{\bar{v}} \bar{f}_i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) &= 0, \\ \lim_{\|\bar{x}\| \rightarrow +\infty} \bar{f}_i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) &= \bar{g}_i(\bar{v}), \quad \bar{t} \geq 0, \quad \bar{v} \in \mathbb{R}^3, \\ \bar{f}_i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) &= 0, \quad \bar{x} \in \partial\Omega, \quad \bar{v} \in \mathbb{R}^3; \quad \bar{v} \cdot \gamma_n < 0, \quad \bar{t} \geq 0, \end{aligned}$$

$$\bar{v} \nabla_{\bar{x}} \bar{f}_e(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) + \frac{1}{\epsilon} \nabla_{\bar{x}} \bar{\Phi} \nabla_{\bar{v}} \bar{f}_e(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) = 0,$$

$$\lim_{\|\bar{x}\| \rightarrow +\infty} \bar{f}_e(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) = \bar{g}_e(\bar{v}), \quad \bar{t} \geq 0, \quad \bar{v} \in \mathbb{R}^3,$$

$$\bar{f}_e(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) = 0, \quad \bar{x} \in \partial\Omega, \quad \bar{v} \in \mathbb{R}^3; \quad \bar{v} \cdot \gamma_n < 0, \quad \bar{t} \geq 0,$$

$$\Delta_{\bar{x}} \bar{\Phi}(\bar{t}, \bar{x}) = 0,$$

$$\partial_{\bar{t}} \left(\nu \bar{\epsilon}_k \frac{\bar{\phi}_{abs} - \bar{\Phi}}{\bar{d}_k} - \partial_{\gamma_n} \bar{\Phi} \right) + \tau' \nu \bar{\sigma}_k \frac{\bar{\phi}_{abs} - \bar{\Phi}}{\bar{d}_k} - \bar{J}_{ext} \cdot \gamma_n = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{d-v},$$

$$\int_{\Gamma_{c-v}} \left[\partial_{\bar{t}} (-\partial_{\gamma_n} \bar{\Phi}) - \bar{J}_{ext} \cdot \gamma_n \right] d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \left[\partial_{\bar{t}} \left(-\nu \bar{\epsilon}_k \frac{\bar{\phi}_{abs} - \bar{\Phi}}{\bar{d}_k} \right) - \nu \tau' \bar{\sigma}_k \frac{\bar{\phi}_{abs} - \bar{\Phi}}{\bar{d}_k} \right] d\gamma = 0,$$

$$\bar{\Phi}(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{\phi}_{abs}(\bar{t}), \quad \text{sur } \Gamma_{c-v},$$

$$\bar{\Phi} \rightarrow 0, \quad \|x\| \rightarrow \infty, \quad \forall \bar{t} \geq 0,$$

Remarque 5.2 *Le temps caractéristique de charge du satellite est petit devant les temps caractéristiques des particules. Pour le mouvement des particules, on devra donc résoudre les équations de Vlasov mais en régime stationnaire.*

Ces équations adimensionnées sont valables aussi dans le cas où la longueur de Debye est grande devant les dimensions du satellite pour un plasma magnétosphérique en orbite géostationnaire conformément à la thèse d'O.Chanrion [Cha01] et celle de M.Chane Yooke [CY04], où la charge d'espace est négligeable et l'équation de Laplace permet de calculer le potentiel électrostatique.

5.3 PLASMA D'ORBITES LEO : MODÈLES COLLISIONNELS ET FLUIDES

Dans le cadre de la charge en orbite LEO, on introduit ici un nouveau modèle. Dans cette partie, on considère un modèle de type fluide pour décrire le mouvement des particules, on supposera pour cela que le plasma est collisionnel. En effet, comme dans la thèse de Chanrion [Cha01], on verra que le libre parcours moyen est très grand devant les dimensions du satellite pour le plasma en orbite PEO, par contre, il est petit en orbite LEO. Ce qui nous mène à traiter un modèle cinétique pour le plasma PEO comme en GEO, mais un modèle fluide pour le plasma LEO.

5.3.1 Limite quasi-neutre pour le modèle d'Euler-Poisson

Le modèle de départ est l'équation de Vlasov couplée à l'équation de Poisson :

$$\partial_t f_\alpha(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f_\alpha(t, x, v) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (-\nabla_x \Phi(t, x) + v \times B) \cdot \nabla_v f_\alpha(t, x, v) = \partial_t f_\alpha|_{coll}$$

où x , v , m_α , f_α sont respectivement la position, la vitesse, la masse et la fonction de répartition des particules, t est le temps, Φ le potentiel électrostatique et q_α la charge.

$\partial_t f_\alpha|_{coll}$ est l'opérateur de collisions qui conserve la masse, la quantité de mouvement des particules et l'énergie. On a :

$$\begin{aligned}\int_v \partial_t f_\alpha|_{coll} &= 0, \\ \int_v v \partial_t f_\alpha|_{coll} &= 0, \\ \int_v v^2 \partial_t f_\alpha|_{coll} &= 0.\end{aligned}$$

Pour le calcul des moments, on pourra se référer à la section 4.3.

On rappelle que $m_{i,e}$, $n_{i,e}$, $u_{i,e}$, $T_{i,e}$ sont respectivement la masse, la densité, la vitesse et la température des particules ioniques (variables indicées par i), et électroniques (variables indicées par e), et que les densités d'énergie totale sont définies par :

$$w_i = \frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{m_i n_i u_i^2}{2}, \quad w_e = \frac{p_e}{\gamma_e - 1} + \frac{m_e n_e u_e^2}{2}$$

où $\gamma_i > 1$ et $\gamma_e > 1$ sont les rapports des chaleurs spécifiques ioniques et électroniques. Les lois de pressions sont données par la loi des gaz parfaits :

$$p_{i,e} = n_{i,e} K_B T_{i,e}$$

où K_B est la constante de Boltzmann.

Ainsi en calculant les trois premiers moments de l'équation de Vlasov, compte tenu des relations de conservations du terme de collisions, on obtient le système d'Euler pour les ions avec second membre :

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i u_i) = 0, \quad (5.7)$$

$$m_i [\partial_t n_i u_i + \nabla \cdot (n_i u_i \otimes u_i)] + \nabla p_i = e n_i (-\nabla \Phi + u_i \times B) - k n_e n_i (u_i - u_e), \quad (5.8)$$

$$\partial_t w_i + \nabla \cdot (w_i u_i + p_i u_i) = e n_i u_i (-\nabla \Phi + u_i \times B) - k n_e n_i u_i (u_i - u_e), \quad (5.9)$$

où k est le taux des collisions électrons-ions.

De même, pour les électrons, on a :

$$\partial_t n_e + \nabla \cdot (n_e u_e) = 0, \quad (5.10)$$

$$m_e [\partial_t n_e u_e + \nabla \cdot (n_e u_e \otimes u_e)] + \nabla p_e = -e n_e (-\nabla \Phi + u_e \times B) - k n_e n_i (u_e - u_i), \quad (5.11)$$

$$\partial_t w_e + \nabla \cdot (w_e u_e + p_e u_e) = -e n_e u_e (-\nabla \Phi + u_e \times B) - k n_e n_i u_e (u_e - u_i), \quad (5.12)$$

avec des conditions limites pour $n_{i,e}$, $u_{i,e}$ et $w_{i,e}$ que l'on va préciser ultérieurement. Les termes $k n_{e/i} n_{i/e} (u_{i/e} - u_{e/i})$ s'obtiennent à partir du terme de friction Q^P (voir 4.3), qui correspond à l'échange du moment entre les particules. De même, les termes $k n_{e/i} n_{i/e} u_{i/e} (u_{i/e} - u_{e/i})$ s'obtiennent à partir du terme Q^E (voir 4.3), qui correspond à l'échange de l'énergie interne.

Pour le couplage par l'équation de Poisson, on se reporte à la section 4.1.1. En considérant que le satellite n'est recouvert que par au plus une couche de diélectrique, on obtient :

$$-\epsilon_0 \Delta \Phi = e \left(n_i(t, x) - n_e(t, x) \right) \text{ dans } \Omega^c. \quad (5.13)$$

Le système (5.7)-(5.13) est complété des quatre conditions aux limites (5.3)-(5.6). On va voir qu'après adimensionnement des équations, un paramètre mesurant le rapport de la longueur du satellite sur celle de Debye apparaît dans l'équation de Poisson adimensionnée et il est très petit, ce qui montre par passage à la limite formelle, que le plasma LEO est quasi-neutre.

5.3.2 Système d'Euler Poisson adimensionné

En omettant les barres au dessus des variables et après adimensionnement, le système d'Euler-Poisson (5.7)-(5.13) s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t(n_{e,i}) + C' \nabla \cdot (n_{e,i} u_{e,i}) &= 0, \\ \partial_t(n_i u_i) + C' \left(\nabla \cdot (n_i u_i \otimes u_i) + \nabla p_i \right) &= \beta n_i u_i \times B - C' n_i \nabla \Phi - \alpha K n_e n_i (u_i - u_e), \\ \epsilon [\partial_t(n_e u_e) + C' \nabla \cdot (n_e u_e \otimes u_e)] + C' \nabla p_e &= -\beta n_e u_e \times B + C' n_e \nabla \Phi - \alpha K n_e n_i (u_e - u_i), \\ \partial_t \left[\frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2} \right] + C' \nabla \cdot \left[\left(\frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2} \right) u_i + p_i u_i \right] &= -C' n_i u_i \nabla \Phi - \alpha K n_e n_i u_i (u_i - u_e), \\ \partial_t \left[\frac{p_e}{\gamma_e - 1} + \epsilon \frac{n_e u_e^2}{2} \right] + C' \nabla \cdot \left[\left(\frac{p_e}{\gamma_e - 1} + \epsilon \frac{n_e u_e^2}{2} \right) u_e + p_e u_e \right] &= C' n_e u_e \nabla \Phi - \alpha K n_e n_i u_e (u_e - u_i), \\ \frac{-1}{\eta'^2} \Delta \Phi &= n_i(t, x) - n_e(t, x), \text{ dans } \Omega^c, \\ \Phi(t, x) &= \phi_{abs}(t), \text{ sur } \Gamma_{c-v}, \\ \partial_t(\nu \epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} - \partial_{\gamma_n} \Phi) + \tau' \nu \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} - J_{ext} \cdot \gamma_n &= 0, \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \\ \int_{\Gamma_{c-v}} \left[\partial_t(-\partial_{\gamma_n} \Phi) - J_{ext} \cdot \gamma_n \right] d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \left[\partial_t \left(-\nu \epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} \right) - \nu \tau' \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} \right] d\gamma &= 0 \end{aligned}$$

avec $\partial_{\gamma_n} \Phi_{diel}(t, x) = \frac{\phi_{abs} - \Phi(t, x)}{d_k}$ le terme correspondant au champ électrique régnant à l'intérieur des diélectriques d'épaisseur d_k .

Les lois d'état adimensionnées sont données par :

$$w_e = \frac{p_e}{\gamma_e - 1} + \epsilon \frac{n_e u_e^2}{2}, \quad w_i = \frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2}, \quad p_{i,e} = n_{i,e} T_{i,e}.$$

5.3.3 Passage à la limite formel pour $C' \gg 1$

En orbite LEO, le temps caractéristique de charge du satellite est plus grand que celui des particules traversant le satellite avec la vitesse thermique ionique, alors $C' \gg 1$. (Voir le tableau 5.1). De plus, le paramètre α est très petit devant C' et β si l'on se réfère au tableau 5.1.

On simplifie les équations de la section 5.3.2 en passant formellement à la limite lorsque $C' \gg 1$, on obtient alors :

$$\nabla \cdot (n_{e,i} u_{e,i}) = 0, \quad (5.14)$$

$$\nabla \cdot (n_i u_i \otimes u_i) + \nabla p_i = n_i u_i \times B - n_i \nabla \Phi, \quad (5.15)$$

$$\nabla p_e = -n_e u_e \times B + n_e \nabla \Phi, \quad (5.16)$$

$$\nabla \left[\left(\frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2} \right) u_i + p_i u_i \right] = -n_i u_i \nabla \Phi, \quad (5.17)$$

$$\nabla \left[\frac{p_e}{\gamma_e - 1} u_e + p_e u_e \right] = n_e u_e \nabla \Phi, \quad (5.18)$$

$$\frac{-1}{\eta'^2} \Delta \Phi = n_i(t, x) - n_e(t, x), \text{ dans } \Omega^c, \quad (5.19)$$

$$\Phi(t, x) = \phi_{abs}(t) \text{ sur } \Gamma_{c-v}, \quad (5.20)$$

$$\partial_t \left(\epsilon_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right) + \sigma_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} = J_{ext} \cdot \gamma_n \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \quad (5.21)$$

$$\int_{\Gamma_{c-v}} J_{ext} \cdot \gamma_n d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \left[\partial_t \left(-\epsilon_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right) - \sigma_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right] d\gamma = 0. \quad (5.22)$$

5.3.4 Passage à la limite formelle pour $\eta' \rightarrow +\infty$

De plus, la longueur de Debye est petite devant la longueur caractéristique du satellite, alors $\eta' \gg 1$. (Voir le tableau 5.1).

On simplifie les équations obtenues à la section 5.3.3 en passant formellement à la limite lorsque $\eta' \rightarrow +\infty$, on obtient alors :

$$n_i(t, x) = n_e(t, x) \text{ dans } \Omega^c, \quad (5.23)$$

$$\Phi(t, x) = \phi_{abs}(t) \text{ sur } \Gamma_{c-v}, \quad (5.24)$$

$$\partial_t \left(\epsilon_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right) + \sigma_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} = J_{ext} \cdot \gamma_n \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \quad (5.25)$$

$$\int_{\Gamma_{c-v}} J_{ext} \cdot \gamma_n d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \left[\partial_t \left(-\epsilon_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right) - \sigma_k \frac{\phi_{abs} - \Phi}{d_k} \right] d\gamma = 0, \quad (5.26)$$

$$\nabla \cdot (n_{e,i} u_{e,i}) = 0, \quad (5.27)$$

$$\nabla \cdot (n_i u_i \otimes u_i) + \nabla p_i = n_i u_i \times B - n_i \nabla \Phi, \quad (5.28)$$

$$\nabla p_e = -n_e u_e \times B + n_e \nabla \Phi, \quad (5.29)$$

$$\nabla \left[\left(\frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2} \right) u_i + p_i u_i \right] = -n_i u_i \nabla \Phi, \quad (5.30)$$

$$\nabla \left[\frac{p_e}{\gamma_e - 1} u_e + p_e u_e \right] = n_e u_e \nabla \Phi. \quad (5.31)$$

Ces équations traduisent en particulier la quasi-neutralité [CG00, CG]. Le potentiel est implicitement déterminé par cette contrainte. On peut alors déterminer le potentiel Φ de manière explicite par l'équation elliptique suivante :

$$2\nabla \cdot (n \nabla \Phi) = \Delta(p_e - p_i) - \nabla^2 \cdot (n u_i \otimes u_i) + \nabla \cdot [(n u_e + n u_i) \times B] \quad (5.32)$$

où $n = n_i = n_e$. En effet, en prenant la divergence de (5.29) - (5.28), on obtient l'équation (5.32).

Les conditions limites traduisent la variation temporelle de la différence de potentiel (D.D.P) sur Γ_{d-v} en fonction des courants. D'autre part, le temps caractéristique de charge du satellite est grand devant les temps caractéristiques des particules. On devra donc résoudre les équations d'Euler mais en régime stationnaire.

Contrairement à O.Chanrion et M.Chane Yooke qui ont résolu l'équation de Laplace pour le potentiel électrique en orbite géostationnaire à cause de la grande longueur de Debye, ici on est amené à traiter la quasi-neutralité [CG00, CG] du plasma LEO à cause de la petitesse de la longueur de Debye.

5.3.5 Autre adimensionnement du système d'Euler-Poisson

Dans cette section, on choisit les mêmes grandeurs adimensionnées que celles définies à la section 5.1, mais on s'intéresse à un temps caractéristique t_0 différent de celui proposé par l'industriel. Comme la longueur du satellite est plus grande que l'épaisseur du diélectrique, il est plus légitime de prendre $t_0 = \frac{\epsilon_0 \Phi_0}{J_0 d}$ le temps de charge différentielle qui est de l'ordre de $\sqrt{10^{-5}}$ pour un diélectrique d'épaisseur $d = 10\mu m$. On donne dans le tableau 5.2 les valeurs des constantes sans dimension trouvées à la section 5.1 pour un diélectrique d'épaisseur $10\mu m$ et $t_0 = \sqrt{10^{-5}}s$.

Propriétés	Symboles	Valeurs en LEO
rapport de temps de charge du satellite sur le temps parcouru avec une vitesse V_i^{th}	C'	1
rapport de masse	ϵ	10^{-4}
rapport de temps de charge sur la période de gyration ionique	β	$\sqrt{10}$
rapport de longueur caractéristique du satellite sur l'épaisseur du diélectrique	ν	10^7
	τ'	10^{-5}
rapport de temps de charge sur le temps de relaxation	α	$\sqrt{10^{-5}}$
rapport du longueur du satellite sur la longueur de debye	η'	10^3

TAB. 5.2 – Valeurs des constantes sans dimension en LEO

5.3.5.1 Passage à la limite formelle quand $\alpha \rightarrow 0$:

Le paramètre α est petit si l'on se réfère au tableau 5.2. De plus, l'épaisseur du diélectrique est assez petite devant la longueur du satellite, donc $\nu \gg 1$.

On simplifie les équations trouvées à la section 5.3.2 en passant formellement à la limite

lorsque $\alpha \rightarrow 0$ et $\nu \rightarrow +\infty$, on obtient alors :

$$\partial_t(n_{e,i}) + \nabla \cdot (n_{e,i} u_{e,i}) = 0, \quad (5.33)$$

$$\partial_t(n_i u_i) + \nabla \cdot (n_i u_i \otimes u_i) + \nabla p_i = n_i u_i \times B - n_i \nabla \Phi, \quad (5.34)$$

$$\nabla p_e = -n_e u_e \times B + n_e \nabla \Phi, \quad (5.35)$$

$$\partial_t \left[\frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2} \right] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2} \right) u_i + p_i u_i \right] = -n_i u_i \nabla \Phi, \quad (5.36)$$

$$\partial_t \left(\frac{p_e}{\gamma_e - 1} \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{p_e}{\gamma_e - 1} \right) u_e + p_e u_e \right] = n_e u_e \nabla \Phi, \quad (5.37)$$

$$\frac{-1}{\eta'^2} \Delta \Phi = n_i(t, x) - n_e(t, x), \text{ dans } \Omega^c, \quad (5.38)$$

$$\Phi(t, x) = \phi_{abs}(t), \text{ sur } \Gamma_{c-v}, \quad (5.39)$$

$$\partial_t(\epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel}) + \tau' \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} - J_{ext} \cdot \gamma_n = 0, \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \quad (5.40)$$

$$- \int_{\Gamma_{c-v}} J_{ext} \cdot \gamma_n d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \left[\partial_t \left(-\epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} \right) - \tau' \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} \right] d\gamma = 0. \quad (5.41)$$

5.3.5.2 Passage à la limite formelle pour $\eta' \rightarrow +\infty$

De plus, la longueur de Debye est petite devant la longueur caractéristique du satellite, alors $\eta' \gg 1$. (Voir le tableau 5.2).

On simplifie les équations (5.33)-(5.41) en passant formellement à la limite lorsque $\eta' \rightarrow +\infty$ et on obtient alors :

$$\partial_t(n_{e,i}) + \nabla \cdot (n_{e,i} u_{e,i}) = 0, \quad (5.42)$$

$$\partial_t(n_i u_i) + \nabla \cdot (n_i u_i \otimes u_i) + \nabla p_i = n_i u_i \times B - n_i \nabla \Phi, \quad (5.43)$$

$$\nabla p_e = -n_e u_e \times B + n_e \nabla \Phi, \quad (5.44)$$

$$\partial_t \left[\frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2} \right] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{p_i}{\gamma_i - 1} + \frac{n_i u_i^2}{2} \right) u_i + p_i u_i \right] = -n_i u_i \nabla \Phi, \quad (5.45)$$

$$\partial_t \left(\frac{p_e}{\gamma_e - 1} \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{p_e}{\gamma_e - 1} \right) u_e + p_e u_e \right] = n_e u_e \nabla \Phi, \quad (5.46)$$

$$n_i(t, x) = n_e(t, x), \text{ dans } \Omega^c, \quad (5.47)$$

$$\Phi(t, x) = \phi_{abs}(t), \text{ sur } \Gamma_{c-v}, \quad (5.48)$$

$$\partial_t(\epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel}) + \tau' \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} - J_{ext} \cdot \gamma_n = 0, \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \quad (5.49)$$

$$- \int_{\Gamma_{c-v}} J_{ext} \cdot \gamma_n d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \left[\partial_t \left(-\epsilon_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} \right) - \tau' \sigma_k \partial_{\gamma_n} \Phi_{diel} \right] d\gamma = 0. \quad (5.50)$$

Encore une fois ces équations traduisent en particulier la quasi-neutralité [CG00, CG]. En reformulant la contrainte (5.47) comme une contrainte de divergence nulle pour le courant :

$$\nabla \cdot (n u_e - n u_i) = 0 \quad (5.51)$$

où $n = n_i = n_e$, nous pourrions déterminer le potentiel Φ de manière explicite par l'équation elliptique suivante :

$$\nabla \cdot (n \nabla \Phi) = \nabla \cdot (n u_i \times B) - \nabla \cdot (\partial_t n u_e) - \Delta p_i - \nabla^2 \cdot (n u_i \otimes u_i). \quad (5.52)$$

En effet, en dérivant par rapport au temps l'équation (5.51) et en utilisant l'équation (5.43), on obtient l'équation (5.52).

D'autre part, on devra ici résoudre les équations d'Euler mais en régime instationnaire pour les ions et quasi-stationnaire pour les électrons.

Troisième partie

ETUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DU SYSTÈME D'EULER-POISSON 1D

MODÈLE SIMPLIFIÉ 1D DU PHÉNOMÈNE DE CHARGE DU SATELLITE EN ORBITES LEO

Sommaire

6.1	Introduction	76
6.2	L'évolution de la charge	77
6.3	Modélisation des ions et du potentiel aux bords du satellite	79
6.4	Modélisation du courant extérieur $J(t)$	80
6.5	Le modèle final	80
6.6	Problème de Cauchy pour le courant et comportement qualitatif	81
6.7	Problèmes aux limites pour la densité et le potentiel	86
6.7.1	Cas subsonique	88
6.7.2	Cas supersonique	95
6.8	Simulation numérique du modèle 1D	101
6.8.1	Présentation générale	101
6.8.2	Schéma pour le courant	102
6.8.3	Schéma pour la densité	102
6.8.4	Schéma pour le potentiel	103
6.8.5	Résultats numériques	103
6.9	Appendice du chapitre 6 : Preuves	106
6.9.1	Preuve de la proposition 6.1	106
6.9.2	Preuve de la proposition 6.3	107
6.9.3	Preuve de la proposition 6.4	108
6.9.4	Preuve de la proposition 6.5	109

Une partie de ce travail est reprise dans l'article “ On hydrodynamic models for LEO spacecraft charging”, écrit en collaboration avec C. Besse, T. Goudon, I. Violet (Lille) et J.-P. Dudon (Thales), paru dans “Some Problems on Nonlinear Hyperbolic Equations

and Applications”, The French-Chinese Summer Institute on Applied Mathematics held at Fudan University, Shanghai, September 1-21, 2008. Edited by Ta-Tsien Li, Yue-Jun Peng, Bopeng Rao. Series in Contemporary Applied Mathematics, CAM15, World Scientific, 2010.

6.1 INTRODUCTION

Un modèle simplifié en dimension 1 est présenté dans ce chapitre. Les simulations numériques portées par ce modèle en 1D nous donnent des idées plus précises sur notre problème physique. Ce qui va nous permettre plus tard d’étendre les simulations à des dimensions plus élevées [VDBG10].

Pour parvenir aux résultats numériques, on considère un domaine borné caractérisé par L où $0 < L < \infty$. On assimile le satellite à un conducteur parfait recouvert d’une couche de diélectrique. La partie conductrice occupe l’intervalle $[0, h_c]$, le diélectrique $[-h_d, 0]$. La constante h_d représente l’épaisseur du diélectrique et h_c la largeur du conducteur. Le plasma occupe donc le domaine $] -L - h_d, -h_d[\cup] h_c, L + h_c[$ noté Ω (voir figure 6.1).

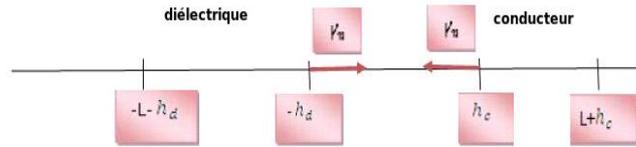


FIG. 6.1 – Représentation 1-D du problème

On considère ici le système d’Euler Poisson stationnaire uni-dimensionnel trouvé à la section 5.3.3 du chapitre 5 quand le paramètre C' est très grand, et pour une espèce : les ions. On suppose que la pression p est une fonction croissante de la densité d’ions n , donnée par :

$$p(n) = n^\gamma \text{ (cas adiabatique) ,}$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques.

Dans le domaine occupé par le plasma Ω , le système s’écrit :

$$\partial_x J = 0, \tag{6.1}$$

$$\partial_x \left(\frac{J^2}{n} + p(n) \right) = -n \partial_x \Phi, \tag{6.2}$$

où J représente la densité du courant et Φ le potentiel électrostatique. Ce dernier est donné dans Ω par l’équation de Poisson

$$-\frac{1}{\eta^2} \partial_{xx}^2 \Phi = n - C, \tag{6.3}$$

où $\eta' = \frac{h_c}{\lambda_d}$ est le rapport de la largeur du conducteur et de la longueur de Debye et C est une fonction que l'on pourra par exemple supposer constante égale à 1. Dans le cas d'un modèle bifluide, la variable C représente la densité des électrons.

On considère les conditions aux bords suivantes pour les densités

$$n(t, -h_d) = n_0^g, n(t, h_c) = n_0^d, n(t, L + h_c) = n(t, -L - h_d) = n_\infty, \quad (6.4)$$

où n_∞ est la densité du plasma donnée et que l'on pourra par exemple supposer égale à C en $-L - h_d$ et $L + h_c$. Pour le potentiel électrostatique, on obtient

$$\Phi(t, -L - h_d) = \Phi(t, L + h_c) = 0. \quad (6.5)$$

Aux bords du satellite, on suppose les densités connues indépendantes du temps et strictement positives. Il reste donc à écrire les conditions limites pour le potentiel en $-h_d$ et h_c . Elles nous permettront de relier le comportement du plasma dans chacun des intervalles $I_1 = (-L - h_d, -h_d)$ et $I_2 = (h_c, L + h_c)$.

A cette fin, on introduit un potentiel de référence Φ_{ref} indépendant du temps qui correspond au potentiel créé par un obstacle occupant la région $(-h_d, h_c)$. La charge de référence est fixée à 1V et Φ_{ref} est définie par :

$$\partial_{xx}^2 \Phi_{ref} = 0, \quad (6.6)$$

$$\Phi_{ref}(-h_d) = \Phi_{ref}(h_c) = 1, \Phi_{ref}(L + h_c) = \Phi_{ref}(-L - h_d) = 0. \quad (6.7)$$

De plus, le potentiel ne dépend que du temps à l'intérieur du conducteur parfait *i.e.* dans $[0, h_c]$. On note $\phi_{abs}(t)$ et on appelle potentiel absolu ce potentiel qui reste à déterminer. Puis en écrivant $\Phi(t, x) = \phi_{abs}(t)\Phi_{ref}(x) + \Phi'(t, x)$, on définit la différence de potentiel Φ' . Par (6.3) et (6.6), on déduit que Φ' satisfait dans Ω et pour tout $t > 0$:

$$-\frac{1}{\eta'^2} \partial_{xx}^2 \Phi'(t, x) = n - C, \quad (6.8)$$

avec les conditions aux bords pour Φ' :

$$\Phi'(t, L + h_c) = \Phi'(t, -L - h_d) = 0, \quad (6.9)$$

$$\Phi'(t, h_c) = 0, \quad (6.10)$$

$$\Phi'(t, -h_d) = \Phi(t, -h_d) - \phi_{abs}(t). \quad (6.11)$$

Il nous reste à définir des équations pour déterminer $\phi_{abs}(t)$ et $\Phi(t, -h_d)$.

6.2 L'ÉVOLUTION DE LA CHARGE

Proposition 6.1 *On définit respectivement ϵ_d, σ_d et ϵ_0 comme étant la permittivité, la conductivité du diélectrique et la permittivité du vide. Le système d'Euler Poisson stationnaire (6.1)-(6.5) complété par les équations*

$$\epsilon_0 \partial_t \partial_x \Phi(t, -h_d) + \frac{\epsilon_d}{h_d} \partial_t (\Phi(t, -h_d) - \phi_{abs}(t)) + \frac{\sigma_d}{h_d} (\Phi(t, -h_d) - \phi_{abs}(t)) \quad (6.12)$$

$$= J(t, -h_d),$$

$$\epsilon_0 \partial_t \partial_x (\Phi(t, -h_d) - \Phi(t, h_c)) = J(t, -h_d) - J(t, h_c), \quad (6.13)$$

qui déterminent $\Phi(t, -h_d)$ et $\phi_{abs}(t)$, permet de décrire les phénomènes de charge du satellite en dimension 1.

Démonstration: Voir appendice section 6.9.

Remarques asymptotiques :

Soient K_B la constante de Boltzmann, m la masse des ions et T leur température. Soient $\delta = \frac{h_d}{h_c}$, $V_i^{th} = \sqrt{\frac{K_B T}{m}}$ la vitesse thermique des ions, $\Phi_0 = \frac{m(V_i^{th})^2}{e}$ le potentiel caractéristique où $e > 0$ est la charge élémentaire. On introduit la valeur typique de la densité n_0 , et on définit $\lambda_d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 K_B T}{n_0 e}}$ la longueur de Debye, $J_0 = en_0 V_i^{th}$ le courant caractéristique et $\tau_0 = \frac{\epsilon_0 \Phi_0}{J_0 h_d}$ le temps typique de la charge différentielle. On définit les quantités adimensionnées :

$$\bar{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \bar{J} = \frac{J}{J_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{h_c}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau_0},$$

$$\bar{n} = \frac{n}{n_0}, \quad \bar{C} = \frac{C}{n_0}.$$

Ainsi les équations (6.12) et (6.13) deviennent (en omettant les barres) :

$$\frac{\epsilon_0 \Phi_0}{J_0 h_d} \delta \partial_t \partial_x \Phi(t, -h_d) + \frac{\epsilon_0 \Phi_0}{J_0 h_d} \frac{\epsilon_d}{\epsilon_0} \partial_t (\Phi(t, -h_d) - \phi_{abs}(t))$$

$$+ \frac{\sigma_d \epsilon_0 \Phi_0}{\epsilon_0 J_0 h_d} (\Phi(t, -h_d) - \phi_{abs}(t)) = J(t, -h_d), \quad (6.14)$$

$$\frac{\epsilon_0 \Phi_0}{J_0 h_d} \delta \partial_t \partial_x (\Phi(t, -h_d) - \Phi(t, h_c)) = J(t, -h_d) - J(t, h_c). \quad (6.15)$$

Dans le cas où $\tau_0 = \frac{\epsilon_0 \Phi_0}{J_0 h_d}$, les équations (6.14), (6.15) et (6.3) deviennent :

$$\delta \partial_t \partial_x \Phi(t, -h_d) + \frac{\epsilon_d}{\epsilon_0} \partial_t (\Phi(t, -h_d) - \phi_{abs}(t)) + \frac{\sigma_d \tau_0}{\epsilon_0} (\Phi(t, -h_d) - \phi_{abs}(t)) = J(t, -h_d),$$

$$\delta \partial_t \partial_x (\Phi(t, -h_d) - \Phi(t, h_c)) = J(t, -h_d) - J(t, h_c),$$

$$\frac{-1}{\eta'^2} \partial_{xx}^2 \Phi(t, x) = n - C. \quad (6.16)$$

En tenant compte de la finesse de la couche du diélectrique, on s'intéresse au cas $0 < \delta \ll 1$. En négligeant les termes en δ , les équations déterminant $\Phi(t, -h_d)$ et $\phi_{abs}(t)$ deviennent alors :

$$J(t, -h_d) = J(t, h_c), \quad (6.17)$$

$$C_d \partial_t (\Phi(t, -h_d) - \phi_{abs}(t)) + S_d (\Phi(t, -h_d) - \phi_{abs}(t)) = J(t, -h_d) \quad (6.18)$$

où $C_d = \frac{\epsilon_d}{\epsilon_0}$ et $S_d = \frac{\sigma_d \tau_0}{\epsilon_0}$ sont respectivement la capacité et la conductance adimensionnées du diélectrique.

Récapitulons le modèle 1D qui décrit l'évolution de la charge externe du satellite. Le système d'Euler stationnaire (6.1) - (6.2) complété par l'équation de Poisson (6.16)

nous permet de calculer la densité, et le potentiel pour tout $x \in \Omega$ et $t > 0$ avec comme conditions aux bords :

$$\Phi(t, -L - h_d) = \Phi(t, L + h_c) = 0,$$

$$\Phi(t, h_c) = \phi_{abs}(t) \text{ et } \Phi(t, -h_d)$$

pour le potentiel. Dans celles-ci, les quantités $\phi_{abs}(t)$ et $\Phi(t, -h_d)$ sont déterminées implicitement par les équations (6.17) et (6.18).

Dans la section suivante, on souhaite déterminer une équation elliptique qui nous permette de calculer la densité et d'identifier le régime dans lequel on se trouve (supersonique ou subsonique). On cherche également une équation permettant le calcul du courant $J(t, x) = J(t, -h_d) = J(t, h_c)$ et enfin des équations permettant de calculer explicitement $\phi_{abs}(t)$ et $\Phi(t, -h_d)$.

Remarque 6.2 Dans la cas où $\tau_0 = 10$ ou 10^2 , et comme $\frac{\epsilon_0 \Phi_0}{J_0 h_d} \ll \tau_0$ et $\delta \ll 1$, alors les équations (6.14) et (6.15) donnent

$$J(t, -h_d) = J(t, h_c) = 0,$$

ce qui nous donnent des solutions raides. C'est pour cela qu'on s'intéresse à un modèle 1D où le temps caractéristique τ_0 est celui de la charge différentielle du diélectrique.

6.3 MODÉLISATION DES IONS ET DU POTENTIEL AUX BORDS DU SATELLITE

Dans cette partie, on cherche une équation elliptique permettant de calculer la densité ionique n . On détermine aussi les équations calculant les potentiels aux bords du satellite ϕ_{abs} et $\Phi(t, -h_d)$.

Proposition 6.3 Soient n_0^g, n_0^d et n_∞ des constantes strictement positives. Soit ϵ_0 la permittivité du vide et η' la grandeur trouvée dans la section 6.2. Connaissant le courant J , le problème de Dirichlet pour n est :

$$-\partial_{xx}^2 F_J(n) + \eta'^2 (n - C) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (6.19)$$

$$n(t, -h_d) = n_0^g, \quad n(t, h_c) = n_0^d, \quad (6.20)$$

$$n(t, L + h_c) = n(t, -L - h_d) = n_\infty, \quad (6.21)$$

où

$$F_J(n) = \frac{J^2}{2n^2} + h(n) \text{ avec}$$

$$h(n) = \int_n^{n_\infty} \frac{p'(y)}{y} dy \text{ l'enthalpie du système.}$$

$\phi_{abs}(t)$ et $\Phi(t, -h_d)$ seront données explicitement par :

$$\phi_{abs}(t) = F_J(n_\infty) - F_J(n_0^d), \quad (6.22)$$

$$\Phi(t, -h_d) = F_J(n_\infty) - F_J(n_0^g). \quad (6.23)$$

Démonstration: Voir appendice section 6.9.

Proposition 6.4 *Que l'on soit dans le cas d'un régime subsonique ou d'un régime supersonique, l'équation (6.19) est elliptique.*

Démonstration: Voir appendice section 6.9.

6.4 MODÉLISATION DU COURANT EXTÉRIEUR $J(t)$

On s'intéresse dans cette partie à trouver une équation différentielle permettant de calculer le courant J .

Proposition 6.5 *Soient n_0^g, n_0^d des constantes strictement positives et J_0 le courant à l'instant initial t_0 . Soient S_d et C_d les caractéristiques du diélectrique. On pose $\sigma = \frac{S_d}{C_d}$ et on obtient deux configurations différentes :*

1. si $n_0^g = n_0^d$ alors $J(t) = 0 \forall t > 0$,
2. si $n_0^g \neq n_0^d$: alors $J(t)$ vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$J'(t) + \frac{\sigma J(t)}{2} = \frac{s}{J(t)} + \beta, \quad (6.24)$$

$$J(t = t_0) = J_0, \quad (6.25)$$

avec

$$s = \frac{\sigma \gamma}{\gamma - 1} \frac{(n_0^{g\gamma-1} - n_0^{d\gamma-1}) n_0^{d^2} n_0^{g^2}}{n_0^{g^2} - n_0^{d^2}} > 0,$$

et

$$\beta = \frac{n_0^{d^2} n_0^{g^2}}{C_d (n_0^{g^2} - n_0^{d^2})}.$$

Démonstration: Voir appendice 6.9.

6.5 LE MODÈLE FINAL

L'équation elliptique :

$$-\partial_{xx}^2 F_J(n) + \eta'^2 (n - C) = 0, \quad (6.26)$$

complétée par les conditions aux limites

$$n(t, -h_d) = n_0^g, \quad n(t, h_c) = n_0^d, \quad n(t, L + h_c) = n(t, -L - h_d) = n_\infty, \quad (6.27)$$

où $F_J(n)$ et $h(n)$ sont donnés dans la proposition 6.3, nous permet, si on connaît J à l'instant t , de calculer la densité en tout point de Ω .

Le potentiel électrostatique est calculé par l'équation de Poisson complétée par les conditions limites suivantes :

$$-\frac{1}{\eta'^2} \partial_{xx}^2 \Phi = n - C \text{ dans } \Omega, \quad (6.28)$$

$$\Phi(t, L + h_c) = \Phi(t, -L - h_d) = 0, \quad (6.29)$$

$$\Phi(t, h_c) = \phi_{abs}(t) \text{ et } \Phi(t, -h_d), \quad (6.30)$$

avec $\eta' = \frac{h_c}{\lambda_d}$ le rapport de la largeur du conducteur et de la longueur de Debye. Les potentiels $\phi_{abs}(t)$ et $\Phi(t, -h_d)$ sont eux-mêmes donnés par les équations :

$$\phi_{abs}(t) = F_J(n_\infty) - F_J(n_0^d), \quad (6.31)$$

$$\Phi(t, -h_d) = F_J(n_\infty) - F_J(n_0^g). \quad (6.32)$$

Enfin, le courant est donné par le problème de Cauchy :

$$J'(t) + \frac{\sigma J(t)}{2} = \frac{s}{J(t)} + \beta, \quad (6.33)$$

$$J(t = t_0) = J_0, \quad (6.34)$$

avec s et β donnés dans la proposition 6.5.

6.6 PROBLÈME DE CAUCHY POUR LE COURANT ET COMPORTEMENT QUALITATIF

Dans cette section, on étudie l'existence de la solution J du problème de Cauchy (6.33) - (6.34).

Proposition 6.6 *Soient n_0^g, n_0^d deux constantes strictement positives et J_0 le courant à l'instant initial t_0 . On suppose $t_0 = 0$. Soit $J_0 \in U$ un ouvert de \mathbb{R}^* . Le problème de Cauchy (6.33) - (6.34) admet une solution maximale globale définie sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans \mathbb{R}^* de classe C^1 . On définit*

$$J_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 2\sigma s}}{\sigma} > 0, \quad J_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 2\sigma s}}{\sigma} < 0.$$

Suivant la valeur de J_0 , on distingue les cas suivants :

1. Si $J_0 > J_1$, le courant $J(t)$ est une fonction positive, décroissante qui converge vers J_1 à l'infini.
2. Si $0 < J_0 < J_1$, le courant $J(t)$ est une fonction positive, croissante qui converge vers J_1 à l'infini.
3. Si $J_0 < J_2$, le courant J est une fonction négative, croissante qui converge vers J_2 à l'infini.
4. Si $J_2 < J_0 < 0$, le courant J est une fonction négative, décroissante qui converge vers J_2 à l'infini.

Démonstration: Soit $f(J) = \frac{s}{J} + \beta - \frac{\sigma J}{2}$. Comme $\beta^2 + 2\sigma s$ est positif, l'équation $-\frac{\sigma J^2}{2} + \beta J + s = 0$ admet deux racines distinctes

$$J_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 2\sigma s}}{\sigma} > 0, \quad J_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 2\sigma s}}{\sigma} < 0.$$

Ainsi J_1 et J_2 sont les solutions stationnaires du problème de Cauchy (6.33) - (6.34). On

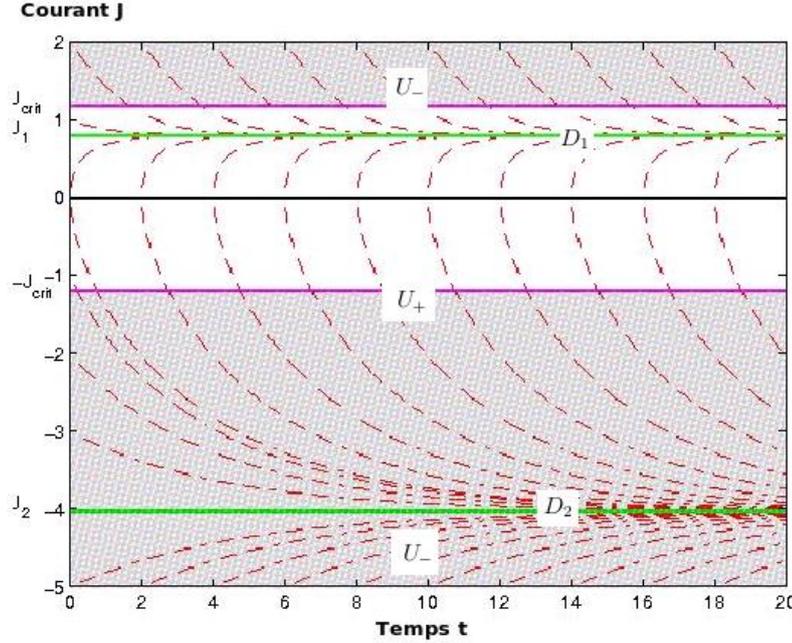


FIG. 6.2 – Répartition de U

a ainsi une partition de U (voir figure 6.2) :

$$U = U_+ \cup U_- \cup \Gamma_0 \text{ où}$$

$$U_+ = \{M \in U; f(M) > 0\} = \{M \in U; J_2 < J < 0 \text{ ou } 0 < J < J_1\},$$

$$U_- = \{M \in U; f(M) < 0\} = \{M \in U; J < J_2 \text{ ou } J > J_1\},$$

$$\Gamma_0 = D_1 \cup D_2 \text{ est la courbe donnée par } \{(t, J) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^*, f(J) = 0\}$$

avec D_1 et D_2 les droites d'équations $J(t) = J_1$ et $J(t) = J_2$.

De plus,

$$f: \quad U \subset \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J \mapsto f(J) = \frac{s}{J} + \beta - \frac{\sigma J}{2},$$

est une fonction de classe C^∞ sur U .

Comme f est de classe C^1 sur toute boule $\overline{B}(J_0, r)$ contenue dans U où r est un réel

strictement positif, alors f est localement lipschitzienne sur U .

En effet, pour tout $x, y \in \overline{B}(J_0, r)$, on a :

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 f'(x+ty)y dt. \quad (6.35)$$

Comme f' est continue sur le compact $\overline{B}(J_0, r)$, elle est bornée, et il existe une constante M strictement positive telle que

$$\|f'\| \leq M.$$

On obtient ainsi

$$\|f(x+y) - f(x)\|_{\mathbb{R}} \leq M \int_0^1 y dt = M\|y\|_{\mathbb{R}^2}$$

ce qui montre que f est localement lipschitzienne sur U .

Alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une solution maximale J du problème de Cauchy (6.33) - (6.34) définie sur $[0, T[$ à valeurs dans U de classe C^1 où $T > 0$.

Comportement de la solution suivant la valeur J_0 :

On remarque que

$$J(t)J'(t) = J(t) \left(\frac{s}{J(t)} + \beta - \frac{\sigma J(t)}{2} \right) = \frac{-\sigma J^2(t)}{2} + \beta J(t) + s. \quad (6.36)$$

Soit $P(J)$ la parabole d'équation $\frac{-\sigma J^2}{2} + \beta J + s = 0$, on remarque que :

- $P(J) > 0$ correspond à la région U_+ où $J_2 < J < J_1$ (voir figure 6.3).
- $P(J) < 0$ correspond à la région U_- où $J < J_2$ ou $J > J_1$ (voir figure 6.3).

Suivant la valeur de J_0 , on distingue les cas suivants :

1. Si $J_0 > J_1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme l'existence d'une solution classique maximale J du problème de Cauchy (6.33) - (6.34) définie sur $[0, T[$ à valeurs dans U .

On sait que J_1 est une solution constante de l'équation (6.33). Par l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait que les graphes des trajectoires de $t \rightarrow J_1$ et $t \rightarrow J(t)$ ne se coupent pas. Comme $J_0 > J_1$, on en déduit que le graphe de J est au dessus de celui de J_1 , d'où

$$J(t) > J_1 \quad \forall t \in [0, T[. \quad (6.37)$$

Comme $P(J)$ est négatif pour $J > J_1$, on en déduit d'après (6.37) que J est décroissante. De plus, $J(t)$ est minorée par J_1 .

On va montrer que $J(t)$ est définie sur \mathbb{R}^+ .

En effet, si $T < +\infty$, d'après ce qui précède, $J(t)$ admet une limite $l_T \in [J_1, +\infty[$ quand $t \rightarrow T$. On note

$$l_T = \lim_{t \rightarrow T} J(t).$$

On prolonge J par continuité en T en posant $J(T) = l_T$. Comme $J'(t) = f(J(t))$ sur $[0, T[$, on voit que J' converge en T , donc le prolongement de J est dérivable en

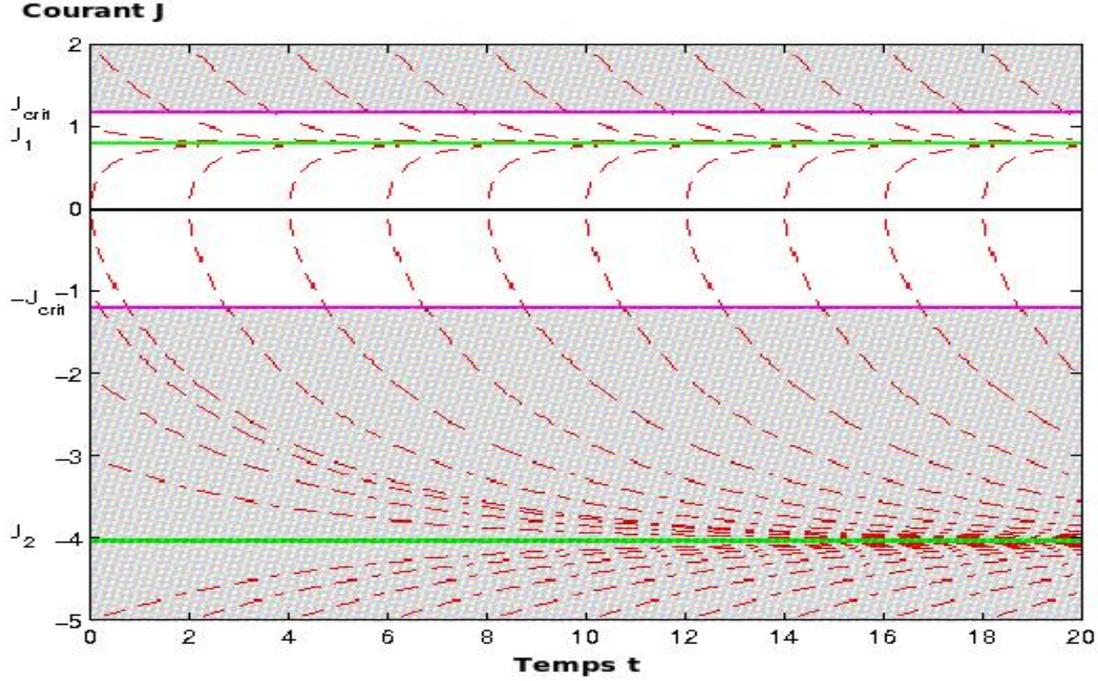


FIG. 6.3 – Portrait de phase du courant J pour $n_0^d = 1.9, n_0^g = 1.1, n_\infty = 1, C = 1, \gamma = 1.4, S_d = 1.13$ et $C_d = 3$

T et $J'(T) = f(J(T))$.

Ainsi prolongée, J est solution du problème de Cauchy $J' = f(J)$ sur $[0, T]$ avec la condition initiale $J(0) = l_T$. Or d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une fonction ψ définie sur un intervalle ouvert I centré en T , solution de $J' = f(J)$ et vérifiant $\psi(T) = l_T = J(T)$.

Comme J et ψ coïncident en l_T , l'unicité du problème de Cauchy garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne que $J = \psi$ sur $[0, T] \cap I$. Donc la fonction définie sur $[0, T] \cup I$ par

$$t \mapsto J(t) \text{ si } t \in [0, T], \quad t \mapsto \psi(t) \text{ si } t \in I \setminus [0, T],$$

est solution de $J' = f(J)$ sur un intervalle contenant strictement $[0, T[$. Ceci est absurde car J est une solution maximale. Donc $T = +\infty$.

On va calculer maintenant la limite de $J(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$. D'après ce qui précède, $J(t)$ converge vers une limite l quand $t \rightarrow +\infty$. D'après (6.36), on sait que la limite de $J'(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$ existe, soit l' cette limite.

Comme J est de classe C^1 , d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$J(t + 1) - J(t) = J'(t_c) \text{ avec } t < t_c < t + 1.$$

Par passage à la limite on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} J'(t_c) = 0.$$

Par unicité de la limite on a donc $l' = 0$. Alors $\frac{-\sigma l^2}{2} + \beta l + s = 0$ donne $l = J_1$. D'où

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} J(t) = J_1.$$

2. Si $0 < J_0 < J_1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme l'existence d'une solution classique maximale J du problème de Cauchy (6.33)-(6.34) définie sur $[0, T[$ à valeurs dans U .

J_1 est solution constante de l'équation (6.33), alors le graphe de J sera toujours au dessous de J_1 . Donc

$$J(t) < J_1 \quad \forall t \in [0, T[. \quad (6.38)$$

Maintenant, on va montrer que pour tout $t \in [0, T[$ on a $J(t) \geq J_0$.

En effet, en raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe un temps $t_1 \in]0, T[$ tel que $J(t_1) < J_0$. On va montrer que $J(t)$ est strictement croissante sur $[0, \delta[$ pour δ suffisamment petit.

Par continuité de J , on sait que pour δ assez petit, on a

$$J_1 > J(t) > \frac{J_0}{2} \quad \text{pour tout } 0 \leq t < \delta. \quad (6.39)$$

Comme $P(J)$ est positif pour $0 < J < J_1$, on en déduit d'après (6.39) que J est strictement croissante sur $[0, \delta]$. En particulier, il existe une constante $h > 0$ tel que $J(\delta) = J_0 + h$.

De plus $J(\delta) = J_0 + h > J_0$ et $J(t_1) < J_0$, par continuité de J , il existe un temps $t_2 \in [\delta, t_1]$ tel que $J(t_2) = J_0$.

Donc on a $J(t_0) = J_0$ et $J(t_2) = J_0$, par le théorème de Rolle, il existe un temps $t_3 \in]0, t_2[$ tel que $J'(t_3) = 0$. Cela implique $P(J(t_3)) = 0$ et donc $J(t_3) = J_1$ ou $J(t_3) = J_2$.

Comme $J(t_3) < J_1$ d'après (6.38), $J(t_3) = J_2$.

Or la fonction constante $t \rightarrow J_2$ est solution du problème de Cauchy (6.33) avec la condition initiale $J(t_3) = J_2$.

Par l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que $J(t)$ est constante pour tout $t \in [0, T[$, et égale à J_2 , ce qui est une contradiction car $J(t_0) = J_0 \neq J_2$.

On déduit de ce qui précède que

$$J(t) \geq J_0 \quad t \in [0, T[.$$

D'où

$$0 < J(t) < J_1 \quad t \in [0, T[. \quad (6.40)$$

Comme $P(J)$ est positif pour $0 < J < J_1$, on en déduit d'après (6.40) que J est croissante. De plus, $J(t)$ est majorée par J_1 . Donc elle admet une limite en T .

En raisonnant comme précédemment, on peut démontrer $T = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} J(t) = J_1$.

On raisonne de façon analogue pour $J < 0$.

Pour $J_0 < J_2$, on montre que J est croissante et converge vers J_2 à l'infini. De plus, il existe une solution maximale J du problème de Cauchy (6.33)-(6.34) définie sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans $] -\infty, J_2[$ de classe C^1 .

Et pour $J_2 < J_0 < 0$, on montre que J est décroissante et converge vers J_1 à l'infini. De plus, il existe une solution maximale J du problème de Cauchy (6.33)-(6.34) définie sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans $]J_2, 0[$ de classe C^1 . \square

6.7 PROBLÈMES AUX LIMITES POUR LA DENSITÉ ET LE POTENTIEL

La densité $n(t, x)$ est déterminée par (6.26), qui est paramétrisée par la variable de temps, via la définition du courant $J(t)$ donnée par (6.33). Néanmoins, bien que J soit globalement défini, ceci ne suffit pas à assurer le caractère bien posé de (6.26) en raison de possibles changements de type dans cette équation.

Définition 6.7 *Quand le couple (n, J) vérifie $F'_J(n) > 0$, on dit que le régime est subsonique. Quand le couple (n, J) vérifie $F'_J(n) < 0$, on dit que le régime est supersonique.*

On a :

$$\partial_n F_J(n) = -\frac{J^2}{n^3} + \frac{p'(n)}{n} > 0 \Leftrightarrow n^2 p'(n) > J^2. \quad (6.41)$$

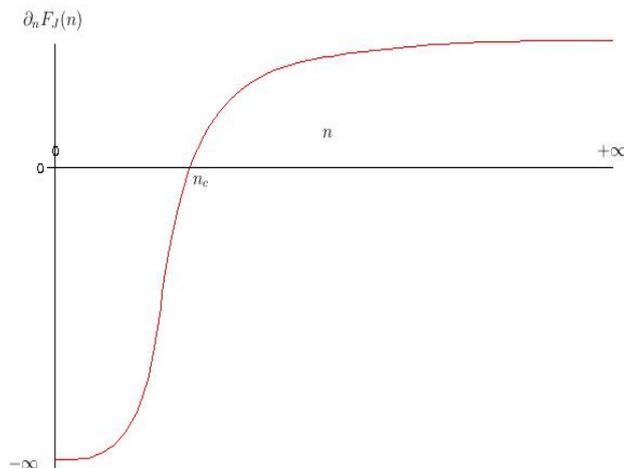
On en déduit l'existence et l'unicité de $n_c = n_c(J) \geq 0$ tel que $\partial_n F_J(n) > 0 \quad \forall n > n_c$ (voir figure 6.4.)

En effet, pour $|J| > 0$ fixé, l'application $n \rightarrow g(n) = n^2 p'(n)$ est croissante, or (6.41) donne $g(n) > J^2$, d'où $n > n_c$ avec $n_c = g^{-1}(J^2)$.

Le point minimal n_c de l'application $n \rightarrow F(n, J)$ définie par

$$J \rightarrow n_c(J) = g^{-1}(J^2)$$

est une fonction croissante de J .

FIG. 6.4 – Représentation de $\partial_n F_J(n)$ pour $|J| = 1$

En effet, Si $J_a < J_b$ on obtient par (6.41) :

$$g(n) = n^2 p'(n) > J_b^2 > J_a^2.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $g^{-1}(J_b^2) < g^{-1}(J_a^2)$.

Par définition de $n_c(J_a)$, on a $\partial_n F_{J_a} > 0 \forall n > n_c(J_a)$, or

$$\partial_n F_{J_a} > \partial_n F_{J_b} > 0 \forall n > n_c(J_b)$$

avec $n_c(J_b) < n_c(J_a)$, ce qui contredit la minimalité de $n_c(J_a)$. De plus, on a que $n_c(J = 0) = 0$.

L'analyse du problème conduit à définir un courant critique J_c , défini par les données $n_0^g, n_0^d, n_\infty, C(x)$ du problème, tel que si $|J| < J_c$, alors l'écoulement est subsonique. Plus précisément, on pose

$$\underline{C} = \inf_{x \in \Omega} C(x) \text{ et } \overline{C} = \sup_{x \in \Omega} C(x)$$

et J_c est défini par

$$n_c(J_c) = \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C}),$$

ce qui correspond à

$$J_c = \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C}) \sqrt{\gamma \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C})^{\gamma-1}}.$$

En effet, le courant critique J_c au-dessous duquel il y aura un écoulement subsonique, satisfait l'équation suivante :

$$g^{-1}(J^2) = \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C})$$

i.e. $J^2 = g(\min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C}))$, d'où

$$J^2 = \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C})^2 p'(\min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C})),$$

et comme $p'(n) = \gamma n^{\gamma-1}$, on obtient $J = \pm J_c$ avec $J_c = \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C}) \sqrt{\gamma \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C})^{\gamma-1}}$.

6.7.1 Cas subsonique

Existence de solutions

Dans cette partie, on prouve l'existence des solutions subsoniques pour le modèle final trouvé à la section 6.5 dans le cas où n_0^g, n_0^d et n_∞ sont choisis de telle manière qu'on aura pour $0 < J < J_1 < J_c$ et $0 > J > -J_c > -J_1$, un écoulement subsonique.

Le problème (6.26) - (6.27) paramétré par $J \in \mathbb{R}^*$ va nous permettre de calculer la densité $n(t, \cdot)$ dans Ω . Puis $n(t, \cdot)$ connue, les potentiels aux bords $\phi_{abs}(t)$ et $\Phi(t, -h_d)$ sont donnés par les équations (6.31) et (6.32) respectivement. Ensuite, le potentiel $\Phi(t, \cdot)$ sera calculé par le système (6.28)-(6.30).

On fait les hypothèses suivantes :

- $\Omega = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 = (-L - h_d, -h_d)$ et $I_2 = (h_c, L + h_c)$,
- $J \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ où $T > 0$ et $C \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$,
- la pression $p = p(n) = n^\gamma$ satisfait à chaque instant et pour tout $x \in \Omega$ la propriété suivante :

$$n \mapsto n^2 p'(n) \text{ est strictement monotone de } [0, +\infty[\text{ dans } [0, +\infty[.$$

Lemme 6.8 *Il existe $(\phi_{abs}, \Phi(\cdot, -h_d)) \in C^1([0, T], \mathbb{R}) \times C^1([0, T], \mathbb{R})$ solutions des équations :*

$$\phi_{abs}(t) = F_J(n_\infty) - F_J(n_0^d), \tag{6.42}$$

$$\Phi(t, -h_d) = F_J(n_\infty) - F_J(n_0^g). \tag{6.43}$$

Ceci montre l'ellipticité de l'équation (6.26) pour $n \geq n^* > n_c$. Pour plus de détails, on se réfère à [DM90].

Théorème 6.9 [DM90] *On suppose que le courant J vérifie*

$$n_0^g, n_0^d, n_\infty, \inf_{x \in \Omega} C(x) > n_c(J). \tag{6.44}$$

Alors il existe un temps $T > 0$ et $(n, \Phi) \in C^1([0, T]; H^1(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega}))$ solution du problème (6.26) - (6.30) tel que

$$\min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C}) < n(t, x) < \max(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \overline{C}) \tag{6.45}$$

où

$$\underline{C} = \inf_{x \in \Omega} C(x) \text{ et } \overline{C} = \sup_{x \in \Omega} C(x).$$

Dans le cas où $0 < J < J_1 \leq J_c$ ou $0 < J_1 \leq J < J_c$ (respectivement $-J_c < J_2 \leq J < 0$ ou $-J_c \leq J < J_2 < 0$), alors $(n, \Phi) \in C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega}))$.

Démonstration: La preuve du théorème 6.9 est basée sur le théorème de Schauder et la reformulation suivante de (6.26) [DM90] :

$$\partial_x \left(\frac{p'(n)}{n} - \frac{J^2}{n^3} \right) \partial_x n = \eta'^2 (n - C). \quad (6.46)$$

Puisque $|J| < J_c$ alors il existe $T > 0$ tel que $J \in C^1([0, T], \mathbb{R})$. Tout d'abord, on montre l'existence de $(n(t, \cdot), \Phi(t, \cdot))$ solution du problème (6.26) - (6.30) dans I_1 pour $t \in [0, T]$.

On introduit l'ensemble convexe fermé B :

$$B = \{\rho \in C(\overline{I_1}) : \underline{n} \leq \rho(x) \leq \bar{n} \text{ pour tout } x \in \overline{I_1}\}$$

où

$$\underline{n} = \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C}), \text{ et } \bar{n} = \max(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \overline{C}).$$

De plus, on définit l'opérateur de point fixe

$$T : B \rightarrow C(\overline{I_1}), \quad T(\rho) = n(t, \cdot),$$

où $n(t, \cdot)$ résout le problème linéaire suivant dans I_1 :

$$\partial_x(\partial_\rho F_J(\rho) \partial_x n) = \eta'^2 (\rho - C), \quad (6.47)$$

$$n(t, -h_d) = n_0^g, \quad n(t, -L - h_d) = n_\infty. \quad (6.48)$$

Tout d'abord, on résout le problème (6.47)-(6.48) dans I_1 . En effectuant un changement de variable $\tilde{n} = n - n|_{\partial I_1}$ où

$$n|_{\partial I_1} = \left(\frac{-L - (x + h_d)}{-L} \right) n_0^g + \left(\frac{x + h_d}{-L} \right) n_\infty$$

la densité aux bords de I_1 , on a $\tilde{n} \in H_0^1(I_1)$. Pour prouver que le problème suivant

$$\partial_x(\partial_\rho F_J(\rho) \partial_x \tilde{n}) = \eta'^2 (\rho - C) + \left(\frac{n_0^g - n_\infty}{L} \right) \partial_x(\partial_\rho F_J(\rho)), \quad (6.49)$$

$$\tilde{n}(t, -h_d) = 0, \quad \tilde{n}(t, -L - h_d) = 0. \quad (6.50)$$

admet une unique solution $\tilde{n} \in H_0^1(I_1)$, on introduit pour tout $z \in H_0^1(I_1)$ la forme bilinéaire

$$a(\tilde{n}, z) = \int_{I_1} \partial_\rho F_J(\rho) \partial_x \tilde{n} \partial_x z dx \quad \forall \tilde{n} \in H_0^1(I_1)$$

qui est continue sur $H_0^1(I_1) \times H_0^1(I_1)$, en effet, comme $\partial_\rho F_J(\rho)$ est continûment différentiable et $\partial_\rho F_J(\rho) > 0$ pour tout $\rho \in B$, alors il existe une constante $C_0 > 0$ tel que

$$|a(\tilde{n}, z)| \leq C_0 \|\tilde{n}\|_{H_0^1(I_1)} \|z\|_{H_0^1(I_1)}.$$

Soit la fonctionnelle

$$l(z) = \eta'^2 \int_{I_1} (C - \rho) z dx + \left(\frac{n_0^g - n_\infty}{L} \right) \int_{I_1} \partial_x(\partial_\rho F_J(\rho)) \partial_x z dx.$$

$l(\cdot)$ est linéaire et continue sur $H_0^1(I_1)$. En effet, comme $C \in C(\overline{I_1})$ et $\partial_\rho F_J(\rho)$ est continûment différentiable avec $\partial_\rho F_J(\rho) > 0$ pour tout $\rho \in B$, alors il existe une constante $C'_0 > 0$ qui dépend de η' et de \bar{n} tel que

$$|l(z)| \leq C'_0 \|z\|_{H_0^1(I_1)}.$$

Puisque $\partial_\rho F_J(\rho)$ est continûment différentiable et $\partial_\rho F_J(\rho) > 0$ pour tout $\rho \in B$, alors il existe une constante $\alpha > 0$ tel que $\partial_\rho F_J(\rho) \geq \alpha$. Ainsi,

$$\begin{aligned} a(z, z) &= \int_{I_1} \partial_\rho F_J(\rho) (\partial_x z)^2 dx \\ &\geq \alpha \|\partial_x z\|_{L^2(I_1)}^2, \quad \forall z \in H_0^1(I_1). \end{aligned}$$

Donc $a(\cdot, \cdot)$ est coercive. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution $\tilde{n} \in H_0^1(I_1)$ tel que

$$a(\tilde{n}, z) = l(z), \quad \forall z \in H_0^1(I_1)$$

i.e. \tilde{n} vérifie (6.49). Or $n = \tilde{n} + n|_{\partial I_1}$, alors $n \in H^1(I_1)$. Ainsi, l'application T est bien définie.

On montre maintenant que $T(B)$ est un ensemble compact dans $C(\overline{I_1})$.

En écrivant la formulation faible de l'équation (6.47) et en prenant comme fonction test $n - n|_{\partial I_1}$, on obtient :

$$\int_{I_1} \partial_\rho F_J(\rho) \partial_x n \partial_x (n - n|_{\partial I_1}) dx = \int_{I_1} \eta^2 (C - \rho) (n - n|_{\partial I_1}) dx.$$

Comme $\partial_\rho F_J(\rho) \geq \alpha$, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha \int_{I_1} |\partial_x (n - n|_{\partial I_1})|^2 dx &\leq \left\| \eta^2 \int_{I_1} (C - \rho) (n - n|_{\partial I_1}) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{I_1} \partial_\rho F_J(\rho) \partial_x n|_{\partial I_1} \partial_x (n - n|_{\partial I_1}) dx \right\| \\ &\leq C_1 \|C\|_{L^\infty(I_1)} \|n - n|_{\partial I_1}\|_{L^2(I_1)} + C_2 \|\rho\|_{L^\infty(I_1)} \|n - n|_{\partial I_1}\|_{L^2(I_1)} \\ &\quad + \alpha \|\partial_x n|_{\partial I_1}\|_{L^2(I_1)} \|\partial_x (n - n|_{\partial I_1})\|_{L^2(I_1)} \\ &\leq C_3 \|n - n|_{\partial I_1}\|_{L^2(I_1)} + \alpha \|\partial_x n|_{\partial I_1}\|_{L^2(I_1)} \|\partial_x (n - n|_{\partial I_1})\|_{L^2(I_1)}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|\partial_x (n - n|_{\partial I_1})\|_{L^2(I_1)} \leq C_4$$

où C_4 est une constante indépendante de ρ . Ce qui montre que n est bien borné dans $H^1(I_1)$, or l'injection $H^1(I_1)$ dans $C(\overline{I_1})$ est continue et compacte, alors $T(B)$ sera un ensemble compact dans $C(\overline{I_1})$.

Finalement, T est bien continue. En effet, soient $\rho_1, \rho_2 \in B$, en écrivant la formulation faible de l'équation (6.47) pour $n_1 = T(\rho_1)$ et $n_2 = T(\rho_2)$, on obtient

$$\int_{I_1} \partial_{\rho_1} F_J(\rho_1) \partial_x n_1 \partial_x z dx = \int_{I_1} \eta'^2 (C - \rho_1) z dx, \quad (6.51)$$

$$\int_{I_1} \partial_{\rho_2} F_J(\rho_2) \partial_x n_2 \partial_x z dx = \int_{I_1} \eta'^2 (C - \rho_2) z dx. \quad (6.52)$$

En faisant la différence de (6.51) et (6.52), et en prenant comme fonction test $n_1 - n_2 \in H_0^1(I_1)$ dans l'équation ainsi obtenue, on obtient :

$$\int_{I_1} \left(\partial_{\rho_1} F_J(\rho_1) \partial_x n_1 - \partial_{\rho_2} F_J(\rho_2) \partial_x n_2 \right) \partial_x (n_1 - n_2) dx = \int_{I_1} \eta'^2 (\rho_2 - \rho_1) (n_1 - n_2) dx$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{I_1} \partial_{\rho_1} F_J(\rho_1) \left(\partial_x (n_1 - n_2) \right)^2 dx &= \int_{I_1} \eta'^2 (\rho_2 - \rho_1) (n_1 - n_2) dx + \\ &\quad \int_{I_1} \left(\partial_{\rho_1} F_J(\rho_1) - \partial_{\rho_2} F_J(\rho_2) \right) \partial_x n_2 \partial_x (n_1 - n_2) dx. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $\partial_n F_J(\rho)$ est uniformément continue et qu'elle est strictement positive, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha \|\partial_x (n_1 - n_2)\|_{L^2(I_1)}^2 &\leq C_5 \|(\rho_2 - \rho_1)\|_{C(I_1)} \|n_1 - n_2\|_{L^2(I_1)} + \\ &\quad C_6 \|(\rho_2 - \rho_1)\|_{C(I_1)} \|n_2\|_{H^1(I_1)} \|\partial_x (n_1 - n_2)\|_{L^2(I_1)} \\ &\leq C_7 \|(\rho_2 - \rho_1)\|_{C(I_1)} \|\partial_x (n_1 - n_2)\|_{L^2(I_1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante $C_8 > 0$ qui dépend seulement de \bar{n} et \underline{n} tel que

$$\|T(\rho_1) - T(\rho_2)\|_{C(I_1)} \leq C_8 \|(\rho_1 - \rho_2)\|_{C(I_1)}.$$

Alors, d'après le théorème de Schauder, il existe $n \in H^1(I_1)$ solution du problème (6.26)-(6.30) telle que $\underline{n} \leq n \leq \bar{n}$ où $\underline{n} = \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C})$ et $\bar{n} = \max(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \bar{C})$.

Le potentiel $\Phi(t, \cdot) \in H^1(I_1)$ est l'unique solution du problème

$$\partial_{xx} \Phi(t, x) = \eta'^2 (-\rho(t, x) + C) \in C(\bar{I}_1),$$

d'après le lemme 6.10, $\Phi(t, \cdot) \in C^2(\bar{I}_1)$.

De même on prouve l'existence de $(n(t, \cdot), \Phi(t, \cdot))$ dans $H^1(I_2) \times C^2(\bar{I}_2)$. \square

Régularité des solutions

L'analyse de régularité repose sur le lemme suivant

Lemme 6.10 [DM90] Soit $\theta \in (0, 1)$ et $a \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ avec $a > 0$, alors il existe un $k(\Omega, \partial\Omega, \theta, a)$ tel que $\forall f \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ et $u_D \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$, il existe une solution $u \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$ du problème

$$\begin{aligned} \partial_x(a\partial_x u) &= f \\ u - u_D &\in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

tel que $\|u\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} < k(\|u_D\|_{C^{2,\theta}(\overline{\Omega})} + \|f\|_{C^{0,\theta}(\overline{\Omega})})$.

Comme l'équation (6.26) s'écrit sous la forme suivante

$$\partial_x(\partial_n F_J(n) \partial_x n) = \eta^2 (n - C) \in C(\overline{\Omega})$$

avec $\partial_n F_J(n) > 0$ en régime subsonique, une application directe du lemme 6.10 montre que

$$n(t, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Unicité sous condition de petitesse sur les courants

On prouve un résultat d'unicité pour les courants assez petits.

Lemme 6.11 [DM90] Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème 6.9, il existe pour tout J tel que $|J| < J_c$, une unique solution n du problème (6.26)-(6.27) tel que

$$n(t, x) > n_c(J) \quad \forall x \in \Omega. \tag{6.53}$$

Démonstration: Soient n_1 et n_2 deux solutions du problème (6.26) - (6.27) dans I_1 tel que $n_i(x) > n_c(J) \quad \forall i = 1, 2$.

En prenant la différence entre les équations on obtient

$$\partial_{xx} (a(x) e) - e = 0 \tag{6.54}$$

où $e(x) = \eta^2(n_2 - n_1)(x)$ et $a(x) = \int_0^1 \partial_n F_J \left(n_1(x) + v(n_2(x) - n_1(x)) \right) dv$. Et $ae \in H_0^1(\overline{I_1})$.

En multipliant l'équation (6.54) par ae et en faisant une intégration par parties on obtient

$$\int_{I_1} |(ae)_x|^2 dx + \int_{I_1} a(e)^2 dx = 0,$$

comme a est strictement positive alors $e = 0$, ce qui donne l'unicité de $n(t, \cdot)$ en régime subsonique pour tout J . □

Remarque 6.12 La condition (6.53) traduit la petitesse des courants.

D'où le théorème suivant :

Théorème 6.13 (Existence et régularité des solutions subsoniques) Soient n_0^d, n_0^g et n_∞ des réels positifs et $\underline{n} = \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C})$ et $\bar{n} = \max(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \bar{C})$ deux constantes positives.

Alors, il existe une constante $J_c > 0$ tel que pour tout courant vérifiant $|J| < J_c$, il existe (n, Φ) dans $C^1([0, T]; C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega}))$ unique solution du problème (6.26)-(6.30) tel que pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\underline{n} \leq n(t, \cdot) \leq \bar{n} \quad (\text{écoulement subsonique}).$$

Plus précisément, dans le cas où $0 < J < J_1 \leq J_c$ ou $0 < J_1 \leq J < J_c$ (respectivement $-J_c < J_2 \leq J < 0$ ou $-J_c \leq J < J_2 < 0$), alors $(n, \Phi) \in C^1(\mathbb{R}^+; C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega}))$.

Conditions suffisantes garantissant le caractère subsonique pour tout temps

Dans cette section, on peut identifier la nature de l'écoulement qui sera subsonique pour un choix adéquat de n_0^g et n_0^d tel que $n_0^d = \lambda n_0^g$ pour $\lambda \in [2, +\infty[$ et pour des courants J positifs tels que $0 < J < J_1 < J_c$. Par contre, ceci ne nous donne aucune idée sur la nature de l'écoulement pour les courants négatifs.

Ainsi, on a besoin de savoir le signe de certaines fonctions en λ qui vont jouer un rôle important dans la comparaison des courants J_1 et J_c .

Lemme 6.14 Soit $\gamma = 1.4$. Soient C_d et S_d la capacité et la conductance du diélectrique. On définit $\sigma = \frac{S_d}{C_d}$, $a = \frac{2\sigma^2\gamma}{\gamma-1} > 0$ et $\lambda \geq 2$. On définit les deux fonctions suivantes :

$$\lambda \rightarrow f(\lambda) = \frac{C_d^2}{\lambda^2} a (\lambda^{\gamma-1} - 1) (\lambda^2 - 1),$$

$$\lambda \rightarrow g(\lambda) = \frac{C_d}{\lambda^2} \sqrt{\gamma} \sigma (\lambda^2 - 1),$$

alors pour tout $\lambda \in [2, +\infty[$, on a $f(\lambda) > 0$ et $g(\lambda) > 0$.

Notons que les deux fonctions f et g sont strictement croissantes sur $[2, +\infty[$, (voir figure 6.5).

On déduit la proposition suivante :

Proposition 6.15 Soient $\gamma = 1.4$ et Ω un ouvert borné de \mathbb{R} . Soit $C \in C^{0,\theta}(\bar{\Omega}, [1, +\infty[)^1$, on pose

$$\underline{C} = \inf_{x \in \Omega} C(x).$$

Soit $(n_0^g, n_0^d) \in]0, 1] \times]0, +\infty[$ tel que $n_0^d = \lambda n_0^g$ avec $\lambda \in [2, +\infty[$. Soit $n_\infty = 1$ et $J_c = \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C}) \sqrt{\gamma \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C})^{\gamma-1}}$. Alors, on a

$$J_1 < J_c.$$

1. $C^{0,\theta}(\bar{\Omega}, [1, +\infty[)$ = $\{f : \bar{\Omega} \rightarrow [1, +\infty[, \text{ tel qu'il existe une constante } c > 0 \text{ tel que pour tout } (x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}, \text{ on a } |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\theta\}$

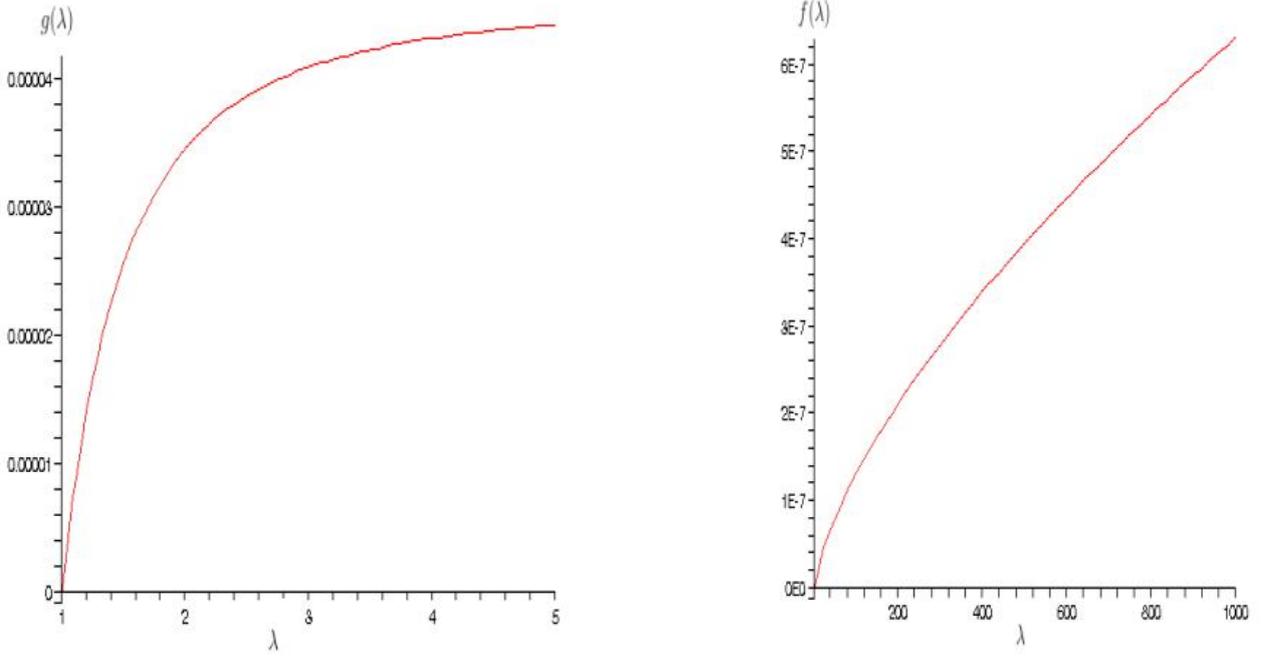


FIG. 6.5 – Graphe de la fonction $\lambda \rightarrow f(\lambda) = \frac{C_d^2}{\lambda^2} a (\lambda^{\gamma-1} - 1)(\lambda^2 - 1)$ et celui de $\lambda \rightarrow g(\lambda) = \frac{C_d}{\lambda^2} \sqrt{\gamma} \sigma (\lambda^2 - 1)$ pour $a = 7.09 \times 10^{-10}$, $C_d = 3$, $\sigma = 0.000011$ et $\gamma = 1.4$

Démonstration: Puisque $n_0^d = \lambda n_0^g$ avec $\lambda > 1$ et $n_\infty = 1$, alors

$$\min(n_0^g, n_0^d, n_\infty, \underline{C}) = n_0^g.$$

On déduit l'expression du courant critique

$$J_c = \sqrt{\gamma} (n_0^g)^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Comme $n_0^d = \lambda n_0^g$ avec $\lambda > 1$, $n_0^d > n_0^g$ et par suite β sera négatif et s positif. Alors :

$$J_1 - J_c = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\lambda^2 (n_0^g)^2}{C_d (1 - \lambda^2)} + \sqrt{\frac{\lambda^4 (n_0^g)^4}{C_d^2 (1 - \lambda^2)^2} + a \lambda^2 \left(\frac{1 - \lambda^{\gamma-1}}{1 - \lambda^2} \right) (n_0^g)^{\gamma+1}} \right) - \sqrt{\gamma} (n_0^g)^{\frac{\gamma+1}{2}} \quad (6.55)$$

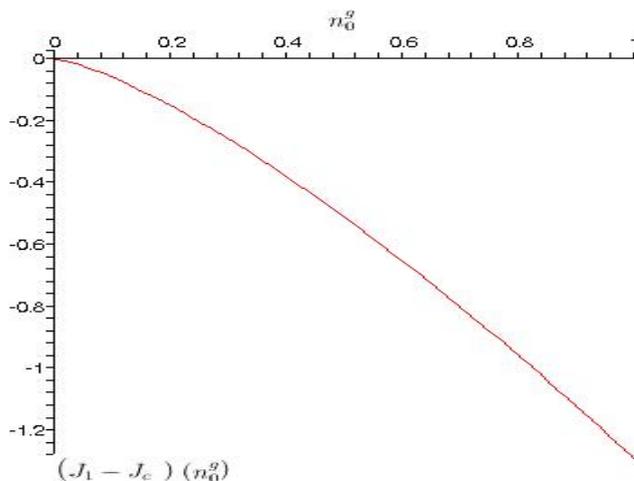
est une fonction de n_0^g , qui reste négative pour tout $\lambda \geq 2$ et $n_0^g \in]0, 1]$. (Voir figure 6.6).

En effet, comme $\lambda > 1$, l'équation (6.55) devient

$$J_1 - J_c = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\lambda^2 (n_0^g)^2}{C_d (1 - \lambda^2)} + \frac{\lambda^2 (n_0^g)^2}{C_d (\lambda^2 - 1)} \sqrt{1 + a C_d^2 \left(\frac{(1 - \lambda^{\gamma-1})(1 - \lambda^2)}{\lambda^2} \right) (n_0^g)^{\gamma-3}} \right) - \sqrt{\gamma} (n_0^g)^{\frac{\gamma+1}{2}}. \quad (6.56)$$

D'où

$$J_1 - J_c = \frac{1}{\sigma} \frac{\lambda^2 (n_0^g)^2}{C_d (1 - \lambda^2)} \left(1 + \sqrt{1 + a C_d^2 \left(\frac{(1 - \lambda^{\gamma-1})(1 - \lambda^2)}{\lambda^2} \right) (n_0^g)^{\gamma-3}} \right) - \sqrt{\gamma} (n_0^g)^{\frac{\gamma+1}{2}}. \quad (6.57)$$

FIG. 6.6 – Graphe de la fonction $n_0^g \rightarrow (J_1 - J_c)(n_0^g)$ pour $\lambda = 2$

En prenant $\frac{\lambda^2(n_0^g)^2}{\sigma C_d(1-\lambda^2)}$ comme facteur commun dans l'équation (6.57), on obtient

$$J_1 - J_c = \frac{1}{\sigma C_d(1-\lambda^2)} \left(1 + \sqrt{1 + aC_d^2 \left(\frac{(1-\lambda^{\gamma-1})(1-\lambda^2)}{\lambda^2} \right) (n_0^g)^{\gamma-3}} - \frac{\sqrt{\gamma} C_d \sigma (1-\lambda^2)}{\lambda^2} (n_0^g)^{\frac{\gamma-3}{2}} \right). \quad (6.58)$$

Comme $\lambda \geq 2$, et d'après le lemme 6.14, on obtient

$$1 + \sqrt{1 + aC_d^2 \left(\frac{(1-\lambda^{\gamma-1})(1-\lambda^2)}{\lambda^2} \right) (n_0^g)^{\gamma-3}} + \frac{\sqrt{\gamma} C_d \sigma (\lambda^2 - 1)}{\lambda^2} (n_0^g)^{\frac{\gamma-3}{2}} > 0.$$

De plus, $\frac{1}{\sigma} \frac{\lambda^2(n_0^g)^2}{C_d(1-\lambda^2)} < 0$ car $\lambda > 1$, alors

$$J_1 - J_c = \frac{1}{\sigma C_d(1-\lambda^2)} \left(1 + \sqrt{1 + aC_d^2 \left(\frac{(1-\lambda^{\gamma-1})(1-\lambda^2)}{\lambda^2} \right) (n_0^g)^{\gamma-3}} - \frac{\sqrt{\gamma} C_d \sigma (1-\lambda^2)}{\lambda^2} (n_0^g)^{\frac{\gamma-3}{2}} \right) < 0.$$

□

6.7.2 Cas supersonique

Existence de solutions

Dans cette partie, on utilise le théorème d'existence et d'unicité des solutions supersoniques montré dans [PV06] pour le modèle final trouvé à la section 6.5. On fait les

hypothèses suivantes :

- $\Omega = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 = (-L - h_d, -h_d)$ et $I_2 = (h_c, L + h_c)$,
- $J \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ où $T > 0$ et $C \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$,
- la pression $p = p(n)$ est une fonction strictement croissante pour tout $n > 0$.

Remarque 6.16 *D'après l'équation 6.41 et la figure 6.4, on a l'existence et l'unicité de $n_c = n_c(J) \geq 0$ tel que $\partial_n F_J(n) < 0 \forall n < n_c$. Ainsi,*

$$\partial_n F_J(n) = -\frac{J^2}{n^3} + \frac{p'(n)}{n} < 0 \Leftrightarrow n^2 p'(n) < J^2 \Leftrightarrow n < n_c(J), \quad (6.59)$$

ce qui montre l'ellipticité de l'équation (6.26) pour $n < n_c$.

En effet, la condition 6.59 donne

$$\left| \frac{J}{n} \right| > c \text{ où } c = \sqrt{p'(n)} \text{ est la vitesse du son,}$$

et donc l'écoulement est supersonique. Pour plus de détails, on se réfère à [PV06].

Théorème 6.17 *Soient $n_0^g > 0, n_0^d > 0$ et $n_\infty > 0$. Soient M_1 et M_2 deux constantes strictement positives satisfaisant*

$$0 < M_1 < \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty), \quad \max(n_0^g, n_0^d, n_\infty) < M_2,$$

Alors il existe $J_g > 0$ qui dépend de M_1 et M_2 tel que pour tout J vérifiant $|J| \geq J_g$, le problème (6.26) - (6.30) admet une solution $(n, \Phi) \in C^1(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega) \times C^2(\overline{\Omega}))$ tel que pour tout $t > 0$, on a

$$M_1 < n(t, \cdot) < M_2 \text{ régime supersonique.} \quad (6.60)$$

On rappelle la démonstration de ce théorème en s'appuyant sur [PV06].

Démonstration: La preuve du théorème 6.17 est basé sur le théorème de Schauder. En choisissant J tel que $n_c(J) > M_2$, et d'après les définitions de M_1 et M_2 , et l'équation 6.41, on a que n_0^g, n_0^d, n_∞ sont dans la région supersonique. Comme $\eta'^2 n$ n'a pas le bon signe dans l'équation (6.26), alors le principe du maximum ne sera pas applicable à l'équation (6.26) dans la région supersonique.

Ainsi pour chercher les solutions supersoniques, on définit sur \mathbb{R}^+ une fonction continûment différentiable et décroissante \widetilde{F}_J de la façon suivante :

$$\widetilde{F}_J(+\infty) = 0, \quad \widetilde{F}_J(n) = F_J(n) \text{ pour tout } n \leq M_2.$$

Ainsi, on se ramène à étudier le problème suivant au lieu de (6.26) - (6.27) :

$$-\partial_{xx}^2 \widetilde{F}_J(n) + \eta'^2 (n - C) = 0, \quad (6.61)$$

$$n(t, -h_d) = n_0^g, \quad n(t, h_c) = n_0^d, \quad n(t, L + h_c) = n(t, -L - h_d) = n_\infty. \quad (6.62)$$

Ainsi, on montre pour tout $t > 0$ l'existence de $n(t, \cdot)$ solution du problème (6.61) - (6.62) tel que $0 < n(t, \cdot) \leq M_2$. Et d'après la définition de \widetilde{F}_J , $n(t, \cdot)$ sera une solution

supersonique du problème (6.26) - (6.27) .

Comme \widetilde{F}_J est continûment différentiable et strictement décroissante, elle est donc bijective. Soit G_J sa fonction réciproque, qui est aussi une fonction continûment différentiable et strictement décroissante.

En faisant un changement de variable $v = \widetilde{F}_J(n)$ pour tout $n > 0$, le problème (6.61) - (6.62) devient

$$-\partial_{xx}^2 v + \eta'^2 (G_J(v) - C) = 0, \quad (6.63)$$

$$v(-h_d) = v_0^g, \quad v(h_c) = v_0^d, \quad v(L + h_c) = v(-L - h_d) = v_\infty. \quad (6.64)$$

Tout d'abord, on montre l'existence de v solution du problème (6.63) - (6.64) en appliquant le théorème de Schauder.

On introduit l'ensemble convexe fermé S :

$$S = \{v \in C(\overline{I_1}) : F_J(M_2) \leq v \leq F_J(M_1)\}.$$

De plus, on définit l'opérateur de point fixe

$$T : S \rightarrow C(\overline{I_1}), \quad T(\theta) = v,$$

où v résoud le problème linéaire suivant dans I_1 :

$$-\partial_{xx}^2 v + \eta'^2 \beta_J(x, \theta) = 0, \quad (6.65)$$

$$v(-h_d) = v_0^g, \quad v(-L - h_d) = v_\infty, \quad (6.66)$$

où $\beta_J(x, \theta) = G_J(\theta) - C$.

Comme $\theta \in S$, alors on a

$$F_J(M_2) \leq \theta \leq F_J(M_1).$$

Et puisque $\widetilde{F}_J(\theta) = F_J(\theta)$ pour tout $\theta \leq M_2$, on a

$$M_1 \leq G_J(\theta) \leq M_2.$$

Ainsi, d'après la définition de F_J , il existe $J_3 > 0$ qui dépend de M_1 et M_2 tel que

$$\|\beta\|_{L^\infty(I_1)} \leq M_3,$$

avec M_3 une constante qui dépend de M_1 et M_2 , et indépendante de θ et J pour tout $|J| \geq J_3$.

Tout d'abord, on résout le problème (6.65)-(6.66) dans I_1 . En effectuant un changement de variable $\tilde{v} = v - v|_{\partial I_1}$ où

$$v|_{\partial I_1} = \left(\frac{-L - (x + h_d)}{-L} \right) v_0^g + \left(\frac{x + h_d}{-L} \right) v_\infty$$

est la fonction v aux bords de I_1 , on a $\tilde{v} \in H_0^1(I_1)$. Pour prouver que le problème suivant

$$-\partial_{xx}^2 \tilde{v} + \eta'^2 \beta_J(x, \theta) = 0, \quad (6.67)$$

$$\tilde{v}(-h_d) = 0, \quad \tilde{v}(-L - h_d) = 0, \quad (6.68)$$

admet une unique solution $\tilde{v} \in H_0^1(I_1)$, on introduit pour tout $z \in H_0^1(I_1)$ la forme bilinéaire

$$a(\tilde{v}, z) = \int_{I_1} \partial_x \tilde{v} \partial_x z dx \quad \forall \tilde{v} \in H_0^1(I_1)$$

qui est continue sur $H_0^1(I_1) \times H_0^1(I_1)$. En effet, il existe une constante $C_0 > 0$ tel que

$$|a(\tilde{v}, z)| \leq C_0 \|\tilde{v}\|_{H_0^1(I_1)} \|z\|_{H_0^1(I_1)}.$$

Soit la fonctionnelle

$$l(z) = \eta'^2 \int_{I_1} \beta_J(x, \theta) z dx.$$

$l(\cdot)$ est linéaire et continue sur $H_0^1(I_1)$. En effet, comme $C \in C^{0,\theta}(\overline{I_1})$, alors il existe une constante $C'_0 > 0$ qui dépend de η' tel que

$$|l(z)| \leq C'_0 \|z\|_{H_0^1(I_1)}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} a(z, z) &= \int_{I_1} (\partial_x z)^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|\partial_x z\|_{L^2(I_1)}^2, \quad \forall z \in H_0^1(I_1). \end{aligned}$$

Donc $a(\cdot, \cdot)$ est coercive. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution $\tilde{v} \in H_0^1(I_1)$ tel que

$$a(\tilde{v}, z) = l(z), \quad \forall z \in H_0^1(I_1)$$

i.e. \tilde{v} vérifie (6.67). Or $v = \tilde{v} + v|_{\partial_{I_1}}$, alors $v \in H^1(I_1)$. Ainsi, l'application T est bien définie.

On montre maintenant que $T(S)$ est un ensemble compact dans $C(\overline{I_1})$. En écrivant la formulation faible de l'équation (6.65) et en prenant comme fonction test $v - v|_{\partial_{I_1}}$, on obtient :

$$\int_{I_1} \partial_x v \partial_x (v - v|_{\partial_{I_1}}) dx = - \int_{I_1} \eta'^2 \beta_J(x, \theta) (v - v|_{\partial_{I_1}}) dx.$$

Comme β_J est bornée, et d'après la coercivité de a , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{I_1} |\partial_x (v - v|_{\partial_{I_1}})|^2 dx &\leq \left\| -\eta'^2 \int_{I_1} \beta_J(x, \theta) (v - v|_{\partial_{I_1}}) dx - \int_{I_1} \partial_x v|_{\partial_{I_1}} \partial_x (v - v|_{\partial_{I_1}}) dx \right\| \\ &\leq C_1 \|\beta_J\|_{L^\infty(I_1)} \|v - v|_{\partial_{I_1}}\|_{L^2(I_1)} + C_2 \|\partial_x v|_{\partial_{I_1}}\|_{L^2(I_1)} \|v - v|_{\partial_{I_1}}\|_{L^2(I_1)} \\ &\leq C_3 \|v - v|_{\partial_{I_1}}\|_{L^2(I_1)} + C_4 \|\partial_x v|_{\partial_{I_1}}\|_{L^2(I_1)} \|\partial_x (v - v|_{\partial_{I_1}})\|_{L^2(I_1)}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|\partial_x (v - v|_{\partial I_1})\|_{L^2(I_1)} \leq C_5$$

où C_5 est une constante indépendante de θ . Ce qui montre que v est bien borné dans $H^1(I_1)$, or l'injection $H^1(I_1)$ dans $C(\overline{I_1})$ est continue et compacte, d'où $T(S)$ est un ensemble compact dans $C(\overline{I_1})$.

Comme

$$F_J(\max(n_0^g, n_0^d, n_\infty)) \leq v|_{\partial I_1} \leq F_J(\min(n_0^g, n_0^d, n_\infty)) \text{ pour tout } x \in I_1,$$

alors, on a

$$F_J(\max(n_0^g, n_0^d, n_\infty)) - C_5 \leq v(x) \leq F_J(\min(n_0^g, n_0^d, n_\infty)) + C_5 \text{ pour tout } x \in I_1.$$

Et comme $F_J(n)$ est une fonction décroissante pour tout $n \leq M_2$, et d'après les définitions de M_1 et M_2 , on déduit l'existence d'un courant $J_4 \geq J_3$ qui dépend seulement de M_1 et M_2 tel que

$$F_J(M_2) \leq v(x) \leq F_J(M_1) \text{ pour tout } |J| \geq J_4 \text{ pour tout } x \in I_1, \quad (6.69)$$

donc $v \in S$. Finalement, T est bien continue. En effet, soient $\theta_1, \theta_2 \in S$, en écrivant la formulation faible de l'équation (6.65) pour $v_1 = T(\theta_1)$ et $v_2 = T(\theta_2)$, on obtient

$$\int_{I_1} \partial_x v_1 \partial_x z dx = - \int_{I_1} \eta^2 \beta_J(x, \theta_1) z dx, \quad (6.70)$$

$$\int_{I_1} \partial_x v_2 \partial_x z dx = - \int_{I_1} \eta^2 \beta_J(x, \theta_2) z dx. \quad (6.71)$$

En faisant la différence de (6.70) et (6.71), et en prenant comme fonction test $v_1 - v_2$ dans l'équation ainsi obtenue, on obtient :

$$\int_{I_1} \left(\partial_x (v_1 - v_2) \right)^2 dx = - \int_{I_1} \eta^2 \left(\beta_J(x, \theta_1) - \beta_J(x, \theta_2) \right) (v_1 - v_2) dx.$$

En tenant compte de la coercivité de a et de la continuité de β_J par rapport à θ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\partial_x (v_1 - v_2)\|_{L^2(I_1)}^2 &\leq C_6 \|(\theta_2 - \theta_1)\|_{C(I_1)} \|v_1 - v_2\|_{L^2(I_1)} \\ &\leq C_7 \|(\theta_2 - \theta_1)\|_{C(I_1)} \|\partial_x (v_1 - v_2)\|_{L^2(I_1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante $C_8 > 0$ qui dépend seulement de M_1 et M_2 tel que

$$\|T(\theta_1) - T(\theta_2)\|_{C(I_1)} \leq C_8 \|(\theta_1 - \theta_2)\|_{C(I_1)}.$$

Alors, d'après le théorème de Schauder, il existe $v \in H^1(I_1) \cap S$ solution du problème (6.63)-(6.64), et par suite, on aura l'existence de $n(t, \cdot) = G_J(v) \in H^1(I_1)$ solution du

problème (6.26)-(6.27).

Comme $v = \widetilde{F_J}(n) = F_J(n)$ pour tout $n \leq M_2$, et d'après (6.69) on obtient

$$M_1 \leq n(t, x) \leq M_2, \text{ pour tout } |J| \geq J_5, \text{ pour tout } x \in I_1. \quad (6.72)$$

Ainsi, $n(t, \cdot) \in H^1(I_1)$ est une solution supersonique pour le problème (6.26)-(6.27) pour tout $t > 0$.

Le potentiel $\Phi(t, \cdot) \in H^1(I_1)$ est l'unique solution du problème

$$\partial_{xx}^2 \Phi(t, x) = \eta^2(-\theta(t, x) + C) \in C(\overline{I_1}),$$

d'après le lemme 6.10, $\Phi(t, \cdot) \in C^2(\overline{I_1})$.

De même on prouve l'existence de $(n(t, \cdot), \Phi(t, \cdot))$ dans $H^1(I_2) \times C^2(\overline{I_2})$ pour tout $t > 0$. □

Régularité des solutions

Comme l'équation (6.26) s'écrit sous la forme suivante

$$-\partial_x(\partial_n F_J(n) \partial_x n) = \eta^2(C - n) \in C^0(\overline{\Omega})$$

avec $\partial_n F_J(n) < 0$ en régime supersonique. D'après le lemme 6.10, on obtient

$$n(t, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Unicité pour les courants assez grands

On utilise le résultat d'unicité [PV06] pour les courants assez grands.

Lemme 6.18 *Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème 6.17, il existe pour tout J suffisamment grand une unique solution n du problème (6.26)-(6.27) tel que*

$$n(t, x) < n_c(J) \quad \forall x \in \Omega.$$

Démonstration: Soient n_1 et n_2 deux solutions du problème (6.26) - (6.27) dans I_1 tel que $n_i(x) < n_c(J) \quad \forall i = 1, 2$.

En prenant la différence entre les équations on obtient

$$\partial_{xx}(a_J(x)w) + w = 0 \quad (6.73)$$

où $w(x) = \eta^2(n_2 - n_1)(x)$ et $a_J(x) = -\int_0^1 \partial_n F_J\left(n_1(x) + s(n_2(x) - n_1(x))\right) ds$. Et $a_J w \in H_0^1(\overline{I_1})$.

Comme $\partial_n F_J(n) = \frac{-J^2}{n^3} + h'(n)$, on déduit qu'il existe une constante C_9 et un courant J_6 qui dépendent de M_1 et M_2 , tel que

$$a_J(x) \geq C_9, \text{ pour tout } |J| \geq J_6 \text{ et pour tout } x \in I_1.$$

En multipliant l'équation (6.73) par $a_J w$ et en faisant une intégration par parties on obtient

$$\int_{I_1} |(a_J w)_x|^2 dx + \int_{I_1} a_J(w)^2 dx = 0$$

comme a_J est strictement positive alors $w = 0$, ce qui donne l'unicité de $n(t, \cdot)$ en régime supersonique. \square

D'où le théorème suivant :

Théorème 6.19 (Existence et régularité des solutions supersoniques) *Soient n_0^d , n_0^g et n_∞ des réels positifs et M_1 et M_2 deux constantes positives telles que $0 < M_1 < \min(n_0^g, n_0^d, n_\infty)$ et $\max(n_0^g, n_0^d, n_\infty) < M_2$.*

Alors, il existe $J_g > 0$ tel que pour tout courant J vérifiant $|J| > J_g$, le problème (6.26)-(6.30) admet une unique solution (n, Φ) dans $C^1(\mathbb{R}^+; C^2(\overline{\Omega})) \times C^2(\overline{\Omega})$, tel que pour tout $t > 0$, on a

$$M_1 \leq n(t, \cdot) \leq M_2 \quad (\text{écoulement supersonique}).$$

6.8 SIMULATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE 1D

6.8.1 Présentation générale

On résout numériquement le système trouvé à la section 6.5.

$$J'(t) + \frac{S_d J(t)}{C_d} = \frac{s}{J(t)} + \beta, \quad t \in [0, T], \quad (6.74)$$

$$-\partial_{xx} F_J(n) + \eta^2 (n - C) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (6.75)$$

$$-\frac{1}{\eta^2} \partial_{xx}^2 \Phi = n - C, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (6.76)$$

$$n(t, -h_d) = n_0^g, \quad n(t, h_c) = n_0^d, \quad n(t, L + h_c) = n(t, -L - h_d) = n_\infty, \quad t \in [0, T], \quad (6.77)$$

$$\Phi(t, h_c) = \phi_{abs}(t) = F_J(n_\infty) - F_J(n_0^d), \quad t \in [0, T], \quad (6.78)$$

$$\Phi(t, -h_d) = F_J(n_\infty) - F_J(n_0^g), \quad t \in [0, T], \quad (6.79)$$

$$\Phi(t, L + h_c) = \Phi(t, -L - h_d) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (6.80)$$

avec

$$F_J(n) = \frac{J^2}{2n^2} + h(n),$$

$$h(n) = \int_n^{n_\infty} \frac{p'(y)}{y} dy = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (n^{\gamma-1} - n_\infty^{\gamma-1}) \text{ l'enthalpie du système,}$$

et

$$\begin{cases} s = \frac{S_d \gamma}{C_d \gamma - 1} \frac{(n_0^{g\gamma-1} - n_0^{d\gamma-1}) n_0^{d^2} n_0^{g^2}}{n_0^{g^2} - n_0^{d^2}}, \\ \beta = \frac{n_0^{d^2} n_0^{g^2}}{C_d (n_0^{g^2} - n_0^{d^2})}. \end{cases}$$

On présente ici le principe de discrétisation. On se donne un pas de temps $\Delta t > 0$ et on note pour tout $k \in N$, $t_k = k\Delta t$. On appelle étape k l'étape qui consiste à déterminer les

variables au temps t_{k+1} connaissant celles au temps t_k .

Pour la discrétisation en espace, on définit une grille fixe uniforme pour chacun des deux intervalles $] -h_d - L, -h_d[$ et $]h_c, h_c + L[$ comportant N mailles. On note $\Delta x = \frac{L}{N}$ et pour tout j allant de 0 à N ,

$$x_j = \begin{cases} -h_d + j\Delta x & \text{si } x_j \in] -h_d - L, -h_d[, \\ h_c + j\Delta x & \text{si } x_j \in]h_c, h_c + L[, \end{cases}$$

et $M_j = [x_j, x_{j+1}[$. On note $n_j^k, \Phi_j^k, F'_{J^k}, C_j$ et J^k les approximations des grandeurs physiques $n(t_k, x_j), \Phi(t_k, x_j), F'(t_k), C(x_j)$ et $J(t_k)$.

6.8.2 Schéma pour le courant

Pour résoudre numériquement l'équation (6.74), on pose $y(t) = J(t)^2$. Ainsi l'équation (6.74) devient

$$y'(t) + \frac{S_d}{C_d} y(t) = 2 \left(s \pm \beta \sqrt{y(t)} \right). \quad (6.81)$$

Comme J garde un signe constant au cours du temps suivant la valeur de la donnée initiale J_0 , ainsi le choix du signe dans le terme à droite de l'équation (6.81) est déterminé par celui de J_0 . Ainsi, $J(t) = \pm \sqrt{y(t)}$.

On se propose de résoudre l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' = f(t, y) = 2 \left(s \pm \beta \sqrt{y(t)} \right) - \frac{S_d}{C_d} y(t) \text{ pour } t \in [0, T] \text{ avec } y(0) = y_0.$$

On utilise le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 qui s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} y^{k+1} &= y^k + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} + O(\Delta t^5), \\ k_1 &= \Delta t f(t_k, y^k), \\ k_2 &= \Delta t f(t_k + \Delta t/2, y^k + k_1/2), \\ k_3 &= \Delta t f(t_k + \Delta t/2, y^k + k_2/2), \\ k_4 &= \Delta t f(t_k + \Delta t, y^k + k_3). \end{aligned}$$

6.8.3 Schéma pour la densité

La densité est calculée à chaque pas de temps par un algorithme de Newton construit à partir de la discrétisation de l'équation (6.75) par différences finies :

$$n_j^k - \frac{\eta'^2}{\Delta x} \left(F'_{J^k}(n_{j+1}^k) \frac{n_{j+1}^k - n_j^k}{\Delta x} - F'_{J^k}(n_j^k) \frac{n_j^k - n_{j-1}^k}{\Delta x} \right) = C_j, \quad (6.82)$$

$$n_N^k = n_\infty, \quad (6.83)$$

avec

$$n_0^k = \begin{cases} n_0^g & \text{si } x_0 \in] -h_d - L, -h_d[, \\ n_0^d & \text{si } x_0 \in]h_c, h_c + L[, \end{cases}$$

6.8.4 Schéma pour le potentiel

Le potentiel est calculé à chaque pas de temps à partir de la discrétisation de l'équation (6.76) par différences finies centrées :

$$\Phi_{j+1}^{k+1} - 2\Phi_j^{k+1} + \Phi_{j-1}^{k+1} = \frac{\Delta x^2}{\lambda^2}(C_j - n_j^{k+1}), \quad (6.84)$$

$$\Phi_N^{k+1} = 0, \quad (6.85)$$

avec

$$\Phi_0^{k+1} = \begin{cases} \Phi(t_k, -h_d) = F_{J^k}(n_\infty) - F_{J^k}(n_0^g) & \text{si } x_0 \in]-h_d - L, -h_d[, \\ \Phi_{abs}(t_k) = F_{J^k}(n_\infty) - F_{J^k}(n_0^d) & \text{si } x_0 \in]h_c, h_c + L[, \end{cases}$$

6.8.5 Résultats numériques

Dans ce paragraphe, on cherche à valider le modèle asymptotique quasi-neutre pour $h_d = h_c = 0$, $L = 1$, $n_\infty = C = 1$, $n_0^g = 1.1$ et $n_0^d = 1.9$. Les paramètres physiques du problème sont $\gamma = 1.4$, $S_d = 1.13$ et $C_d = 3$. Enfin le paramètre adimensionné pour la simulation est la longueur de Debye adimensionnée soit $\frac{1}{\eta} = 10^{-3}$.

On travaille en variables adimensionnées. On choisit un nombre de mailles $N = 100$, soit alors un pas d'espace adimensionné $\Delta x = \frac{L}{N} = 10^{-2}$.

Les résultats présentés ci-dessous sont les résultats obtenus au temps $t = 0.01s$, $t = 2.5s$ et $t = 5s$. On s'intéresse dans un premier temps au cas $J_0 = 1.15$ de telle manière que J_0 soit plus petit que le courant critique $J_c = 1.1832$, afin d'avoir un écoulement subsonique. Les résultats indiquent que la densité augmente lorsqu'on s'approche des bords du satellite (voir figure 6.9). Enfin, en ce qui concerne les courbes du potentiel (voir figure 6.8), on remarque que le potentiel diminue lorsqu'on s'approche des bords du satellite.

Sur la figure 6.7, le courant J est toujours minoré par J_c pour $J_0 < J_c$ où $J_0 = 1.15$ et $J_c = 1.1838$ pour $n_0^g = 1.1$ et $n_0^d = 1.9$ *i.e.* on reste toujours dans le cas subsonique. De plus, on a toujours $0 < J_1 < J_c$ et on remarque que le courant décroît avec le temps .

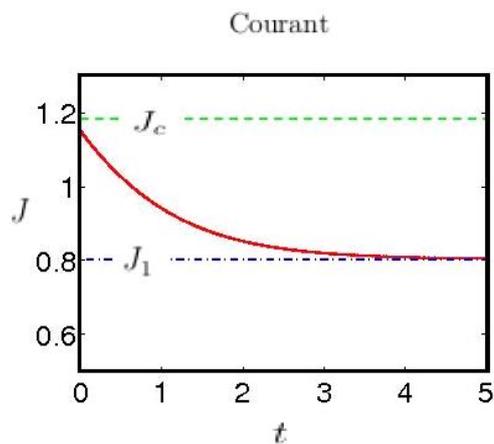


FIG. 6.7 – Evolution du courant pour $n_\infty = C = 1$, $n_0^g = 1.1$ et $n_0^d = 1.9$.

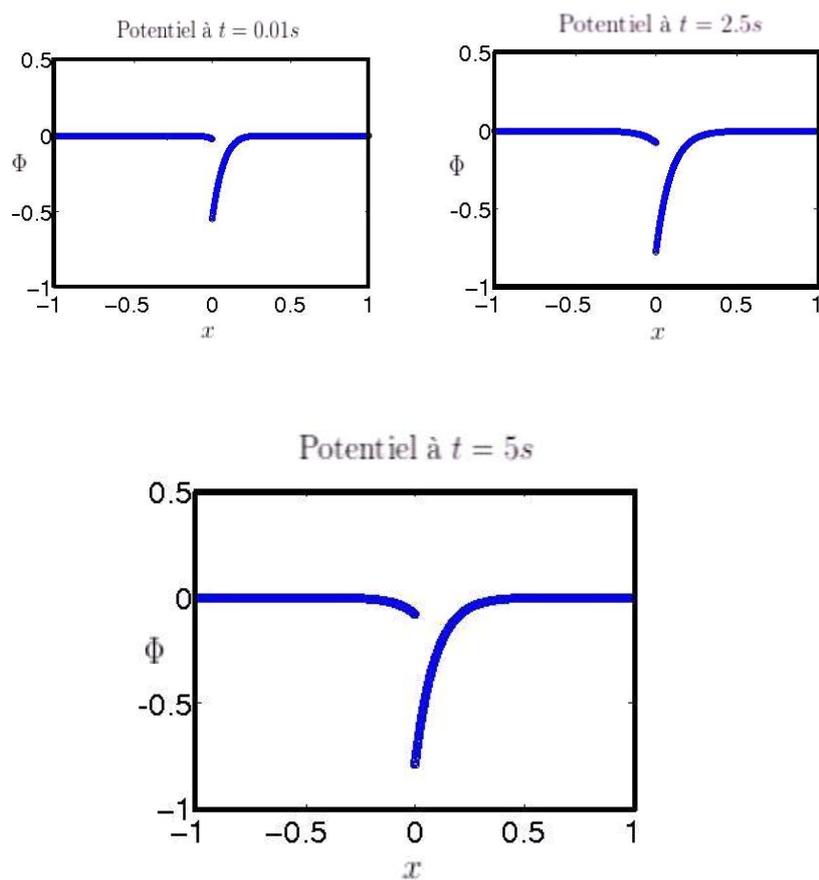


FIG. 6.8 – Evolution du potentiel pour $n_\infty = C = 1$, $n_0^g = 1.1$ et $n_0^d = 1.9$.

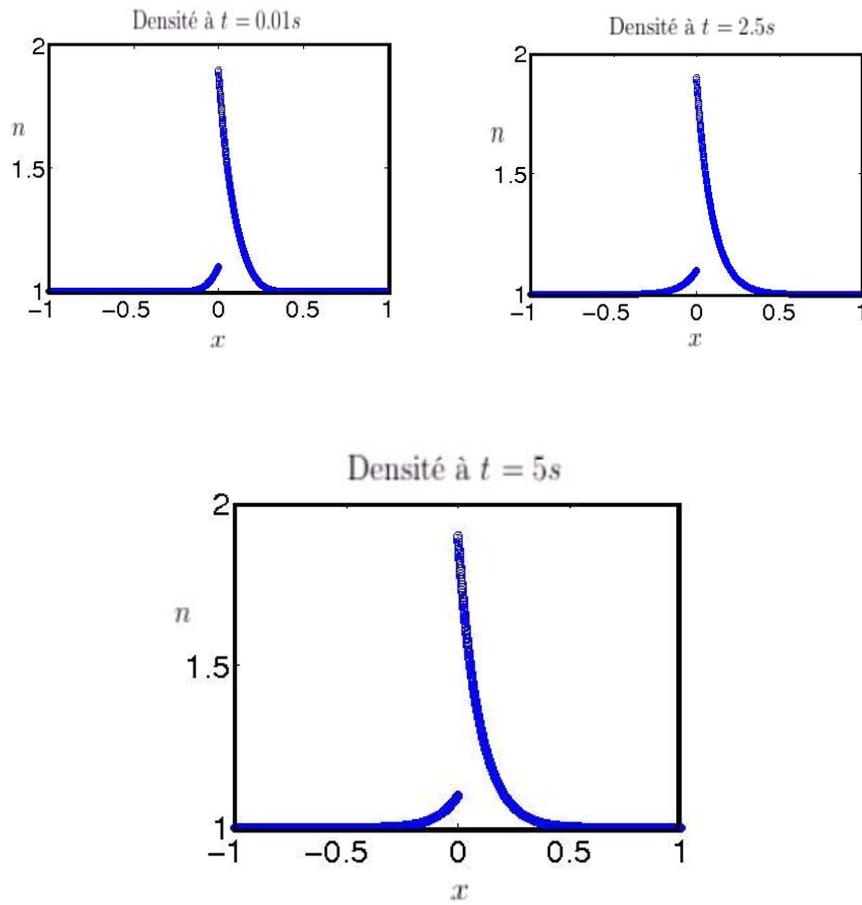


FIG. 6.9 – Evolution de la densité pour $n_\infty = C = 1$, $n_0^g = 1.1$ et $n_0^d = 1.9$.

6.9 APPENDICE DU CHAPITRE 6 : PREUVES

6.9.1 Preuve de la proposition 6.1

Démonstration: Le champ électrostatique $E = -\epsilon\partial_x\Phi$ est défini dans l'ensemble du domaine

$$\Omega =] -L - h_d, -h_d[\cup] -h_d, 0[\cup] 0, h_c[\cup] h_c, L + h_c[,$$

où les quatre intervalles correspondent à différentes propriétés physiques (respectivement le plasma, le diélectrique, le conducteur, et le plasma). D'une part, à tout moment, $E = -\epsilon\partial_x\Phi$ vérifie l'équation suivante :

$$\partial_x E = \rho, \tag{6.86}$$

où ρ est la densité totale de charge. D'autre part, on se sert de la conservation de la charge

$$\partial_t \rho + \partial_x J = 0,$$

pour calculer les conditions de saut à chaque bord du satellite. Dans le domaine du plasma Ω , on a

$$\rho = n - C.$$

En prenant la dérivée par rapport au temps de (6.86), on obtient :

$$\partial_t \partial_x E + \partial_x J = 0.$$

Puisque qu'on a cette relation dans tout le domaine $(-L - h_d, L + h_c)$, on obtient des conditions de saut à chaque bord

$$-\partial_t [\epsilon\partial_x\Phi] + [J] = 0,$$

où $[.]$ désigne le saut aux interfaces.

On note $J(t, -h_d)$ et $J(t, h_c)$ les courants arrivant du plasma sur le satellite *i.e.* aux points $-h_d$ et h_c . Le courant à l'intérieur du conducteur est noté J_{cond} . On rappelle que le potentiel électrostatique ϕ_{abs} garde une valeur constante à l'intérieur du conducteur à chaque instant t . De plus, on suppose que le diélectrique est assez fin *i.e.* $h_d \ll 1$. Alors la charge volumique dans le diélectrique est négligeable et la dérivée du potentiel $\Phi(t, -h_d)$ dans le diélectrique est approchée par la différence finie

$$\partial_x \Phi(t, -h_d) \simeq \frac{\phi_{abs}(t) - \Phi(t, -h_d)}{h_d}.$$

Finalement, il existe un courant de fuite, noté J_{diel} , entre le diélectrique et le conducteur qui est proportionnel à la différence de potentiel d'après la loi d'Ohm :

$$J_{diel} = -\sigma_d \frac{\phi_{abs}(t) - \Phi(t, -h_d)}{h_d}.$$

Alors, les relations de sauts sont données comme suit :

- à l'interface $x = -h_d$ entre le plasma et le diélectrique :

$$\partial_t \left(\epsilon_0 \partial_x \Phi(t, -h_d) - \epsilon_d \frac{(\phi_{abs}(t) - \Phi(t, -h_d))}{h_d} \right) = J(t, -h_d) + \sigma_d \frac{(\phi_{abs}(t) - \Phi(t, -h_d))}{h_d}, \quad (6.87)$$

- à l'interface $x = 0$ entre le diélectrique et le conducteur :

$$\partial_t \left(\epsilon_d \frac{(\phi_{abs}(t) - \Phi(t, -h_d))}{h_d} \right) = -\sigma_d \frac{(\phi_{abs}(t) - \Phi(t, -h_d))}{h_d} - J_{cond}(t, x), \quad (6.88)$$

- à l'interface $x = h_c$ entre le conducteur et le plasma

$$-\partial_t (\epsilon_0 \partial_x \Phi(t, h_c)) = J_{cond}(t, x) - J(t, h_c). \quad (6.89)$$

En faisant la somme de (6.88) et (6.89), on élimine J_{cond}

$$\partial_t \left(\epsilon_d \frac{(\phi_{abs}(t) - \Phi(t, -h_d))}{h_d} - \epsilon_0 \partial_x \Phi(t, h_c) \right) = -\sigma_d \frac{(\phi_{abs}(t) - \Phi(t, -h_d))}{h_d} - J(t, h_c).$$

Finalement, en additionnant cette dernière équation à (6.87), on obtient

$$\epsilon_0 \partial_t \partial_x (\Phi(t, -h_d) - \Phi(t, h_c)) = J(t, -h_d) - J(t, h_c). \quad (6.90)$$

Les deux équations (6.90) et (6.87) sont des équations d'évolution permettant de définir $\Phi(t, -h_d)$ et $\phi_{abs}(t)$.

Ainsi, le système d'Euler Poisson stationnaire (6.1) - (6.5) est complété par les équations (6.90) et (6.87) qui permettent de déterminer $\Phi(t, h_c) = \phi_{abs}(t)$ et $\Phi(t, -h_d)$. \square

6.9.2 Preuve de la proposition 6.3

Démonstration: On divise l'équation (6.2) par n , puis on dérive en x l'équation obtenue tout en tenant compte du fait que J est constant en x d'après la proposition 6.1. On obtient :

$$\partial_x \left(\frac{1}{n} \partial_x \left(\frac{J^2}{n} + p(n) \right) \right) = -\partial_{xx}^2 \Phi = \eta'^2 (n - C).$$

D'où

$$\partial_x \left(\frac{-J^2/n^2 + p'(n)}{n} \partial_x n \right) = \eta'^2 (n - C).$$

Donc

$$-\partial_{xx}^2 F_J(n) + \eta'^2 (n - C) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

où

$$F_J(n) = \frac{J^2}{2n^2} + h(n)$$

avec

$$h(n) = \int_n^{n_\infty} \frac{p'(y)}{y} dy \text{ l'enthalpie du système.}$$

n étant connu, l'équation (6.2) donne

$$-\partial_x \Phi = \partial_x F_J(n). \quad (6.91)$$

En intégrant en x l'équation (6.91), on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(t, x) &= \Phi(t, y) - \int_y^x \partial_z F_J(n)(t, z) dz, \\ &= \Phi(t, y) - \left(F_J(n)(t, x) - F_J(n)(t, y) \right). \end{aligned} \quad (6.92)$$

Or $\Phi(t, -L - h_d) = \Phi(t, L + h_c) = 0$, en remplaçant x par $L + h_c$ dans l'équation (6.92), on obtient

$$\Phi(t, y) = F_J(n_\infty) - F_J(n(t, y)),$$

qui donne du côté conducteur "à droite" (*i.e.* pour $y = h_c$),

$$\phi_{abs}(t) = F_J(n_\infty) - F_J(n_0^d),$$

et du côté diélectrique "à gauche" (*i.e.* pour $y = -h_d$),

$$\Phi(t, -h_d) = F_J(n_\infty) - F_J(n_0^g).$$

□

6.9.3 Preuve de la proposition 6.4

Démonstration: Soit $n_c(J)$ la densité critique définie par

$$\sqrt{p'(n_c(J))} = \frac{J}{n_c(J)},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \sqrt{p'(n)} \text{ est la vitesse du son dans le plasma,} \\ \text{et } \frac{J}{n} \text{ la vitesse électronique.} \end{array} \right.$$

L'ellipticité de (6.19) correspond à avoir soit un régime subsonique pour $n < n_c(J)$, soit un régime supersonique pour $n > n_c(J)$.

Pour plus de détails, on se référera à [PV06] et à la section 6.7.1.

□

6.9.4 Preuve de la proposition 6.5

Démonstration:

– **cas(a)** : $n_0^g = n_0^d$.

Le problème de Dirichlet (6.19) - (6.21) pour n est le même dans $(-L - h_d, -h_d)$ et $(h_c, L + h_c)$, on aura ainsi $\phi_{abs}(t) = \Phi(t, -h_d)$, par suite on déduit de la condition limite (6.18) $J(t) = 0 \forall t > 0$.

– **cas(b)** : $n_0^g \neq n_0^d$.

Les densités à droite et à gauche sont calculées par l'équation (6.19) avec des conditions aux bords différentes.

Par soustraction de (6.23) et (6.22) on obtient

$$\left(\phi_{abs}(t) - \Phi(t, -h_d) \right) = F_J(n_0^g) - F_J(n_0^d). \quad (6.93)$$

En utilisant (6.93) dans l'équation (6.18), on obtient une équation différentielle nous permettant de calculer le courant $J(t)$ qui est indépendant de x :

$$\partial_t T_J + \sigma T_J = \frac{J}{C_d}. \quad (6.94)$$

Avec

$$T_J = F_J(n_0^g) - F_J(n_0^d),$$

et

$$T_J(t = t_0) = T_{J_0}.$$

On cherche maintenant à réécrire (6.94). Pour cela, on remplace T_J par sa valeur, on obtient

$$\begin{aligned} & \partial_t \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(n_0^{d^{\gamma-1}} - n_0^{g^{\gamma-1}} \right) + \frac{J^2}{2} \left(\frac{1}{n_0^{d^2}} - \frac{1}{n_0^{g^2}} \right) \right] + \\ & \sigma \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(n_0^{d^{\gamma-1}} - n_0^{g^{\gamma-1}} \right) + \frac{J^2}{2} \left(\frac{1}{n_0^{d^2}} - \frac{1}{n_0^{g^2}} \right) \right] = \frac{J}{C_d}. \end{aligned}$$

Or n_0^d et n_0^g sont indépendantes du temps donc le premier terme de gauche donne :

$$J(t)J'(t) \left(\frac{1}{n_0^{d^2}} - \frac{1}{n_0^{g^2}} \right).$$

On vérifie ultérieurement que $J(t) \neq 0$, ainsi on obtient en divisant par J :

$$J'(t) \left(\frac{1}{n_0^{d^2}} - \frac{1}{n_0^{g^2}} \right) + \frac{\sigma}{2} J(t) \left(\frac{1}{n_0^{d^2}} - \frac{1}{n_0^{g^2}} \right) + \frac{\sigma\gamma}{J(t)(\gamma-1)} \left(n_0^{d^{\gamma-1}} - n_0^{g^{\gamma-1}} \right) = \frac{1}{C_d}.$$

On divise par $\frac{1}{n_0^{d^2}} - \frac{1}{n_0^{g^2}}$ et on obtient :

$$J'(t) + \frac{\sigma J(t)}{2} = \frac{s}{J(t)} + \beta,$$

avec

$$s = \frac{\sigma \gamma}{(\gamma - 1)} \frac{\left(n_0^{g^{\gamma-1}} - n_0^{d^{\gamma-1}} \right) n_0^{d^2} n_0^{g^2}}{\left(n_0^{g^2} - n_0^{d^2} \right)},$$

et

$$\beta = \frac{n_0^{d^2} n_0^{g^2}}{C_d \left(n_0^{g^2} - n_0^{d^2} \right)}.$$

□

Remarque 6.20 *Le courant $J(t)$ est non nul pour tout $t \geq 0$. En effet, 0 n'est pas une solution de l'équation $J(t)J'(t) = s + \beta J(t) - \frac{\sigma J(t)^2}{2}$ car $s > 0$.*

HYDRODYNAMIC REGIMES, KNUDSEN LAYER, NUMERICAL SCHEMES : DEFINITION OF BOUNDARY FLUXES

Sommaire

7.1	Description of the Objectives	111
7.2	Finite Volume Scheme for the Euler-Poisson System	112
7.3	A Simple Definition of Numerical Fluxes	114
7.4	Numerical Fluxes for Gas Dynamics Based on the Analysis of the Knudsen Layer	117
7.4.1	Hydrodynamic limits, entropy dissipation and boundary layer analysis	118
7.4.2	Finite Volume scheme and treatment of the boundary conditions	132
7.4.3	Numerical results	143
7.5	Linearized Analysis for the Euler-Poisson System	152

A part of this Chapter will appear as a scientific paper jointly with C. Besse, J.-P. Dudon, T. Goudon, I. Lacroix-Violet. We are gratefully indebted to J.-F. Coulombel, F. Golse and K. Aoki for many useful advice concerning this work and for their kind encouragements.

7.1 DESCRIPTION OF THE OBJECTIVES

The hydrodynamic models we have derived so far for the charging problem are based on the Euler-Poisson system. In this Chapter, we consider mainly the one-dimension case

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x J = 0, \\ \partial_t J + \partial_x \left(\frac{J^2}{\rho} + p \right) = -\rho \partial_x \Phi, \\ \partial_t \mathcal{E} + \partial_x \left(\frac{J}{\rho} (\mathcal{E} + p) \right) = -J \partial_x \Phi, \\ -\partial_{xx}^2 \Phi = \rho - C, \end{cases} \quad (7.1)$$

with $p = \rho\theta$, θ being the temperature, and $\mathcal{E} = \rho \left(\frac{u^2}{2} + \frac{\theta}{2} \right)$. The system is completed by initial condition. As far as one considers the free space problem, the global existence of

weak solutions has been established by F. Poupaud, M. Rascle and J.-P. Vila [PRV95], by using fine estimates to prove the convergence of the Glimm scheme. The analysis has been extended to the two-species case by S Cordier and Y.-J. Peng [CP98].

When the problem is set on a bounded domain, we have also to consider suitable boundary conditions. For the electric field we can simply deal with Dirichlet or Neumann boundary conditions. The question we address in this Chapter is concerned with the boundary conditions for the hydrodynamic unknowns (ρ, u, θ) . We wish to derive relevant boundary conditions related to the underlying kinetic model and the small mean free path regime. Of course, our objective will be to incorporate this discussion in the more complete model where the domain is $(-L - h_d, -h_d) \cup (h_c, L + h_c)$, with, for the potential

$$\Phi(t, L + h_c) = \Phi(t, -L - h_d) = 0 \quad (7.2)$$

and

$$\Phi(t, h_c) = \phi_{abs}(t), \quad \Phi(t, -h_d) = \phi_{abs}(t) + \Phi'(t, -h_d). \quad (7.3)$$

In the last relation the auxiliary potentials are determined by the equations

$$J(t, -h_d) = J(t, h_c) \quad (7.4)$$

and

$$C_d \frac{d}{dt} \Phi'(t, -h_d) + S_d \Phi'(t, -h_d) = J(t, -h_d). \quad (7.5)$$

This one-dimension model can be seen as a caricature of the spacecraft modeling and it permits to test numerical strategies with a moderate development time (see [VDBG10] for similar comments on microscopic models). We point out that our work is motivated by numerical purposes : our goal is the design of conditions usable in a numerical code for the hydrodynamic equations, that could be an approximation of the actual boundary conditions defined through a very complex — and in part open — boundary layer analysis.

We organize the discussion as follows. First we remind a few basic facts about finite volume schemes for the Euler-Poisson system. Then, we focus on the definition of boundary fluxes. We propose a quite simple, but surprisingly performing, condition, which can be interpreted as the use of Enquist-Osher fluxes at the boundary. Next, we simplify the equations by restricting to the gas dynamics problem which contains the main difficulty addressed in this Chapter. We design boundary fluxes from the boundary layer analysis of linearized kinetic models in [CGS88a]. It has the advantage of offering a practical determination of the number of needed boundary conditions and a definition that accounts for the boundary layer formation. Finally, we explain how the method can be extended when considering the coupling with the Poisson equation, at least in the linearized framework.

7.2 FINITE VOLUME SCHEME FOR THE EULER-POISSON SYSTEM

We rewrite (7.1) as follows

$$\partial_t \mathcal{U} + \partial_x \mathcal{F}(\mathcal{U}) = S(\mathcal{U}), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (7.6)$$

with $\mathcal{U} = (\rho, J, \mathcal{E})$, $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = (J, \frac{J^2}{\rho} + p, \frac{J}{\rho}(\mathcal{E} + p))$, and $S(\mathcal{U}) = (0, -\rho\partial_x\Phi, -J\partial_x\Phi)$. We denote $\mathcal{U}(t = 0, x)$ the initial condition.

We introduce a uniform mesh of the domain $\Omega = (-L - h_d, -h_d) \cup (h_c, h_c + L)$ with mesh size Δx . The mesh contains I cells denoted by C_i . Let Δt be the time step. The numerical

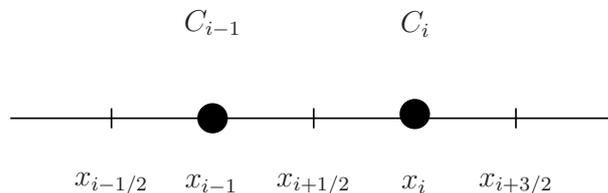


FIG. 7.1 – Mesh cells

unknown \mathcal{U}_i^n is intended to be an approximation of the average $\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathcal{U}(n\Delta t, y) dy$. The iteration process relies on a time splitting of the system :

- a) We start by solving the hydrodynamic part of the equation :

$$\partial_t \mathcal{U} + \partial_x \mathcal{F}(\mathcal{U}) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > n\Delta t,$$

with prescribed data at time $n\Delta t$. It defines an intermediate state $\widetilde{\mathcal{U}}$.

- b) We solve the ODE-like problem $\partial_t \mathcal{U} = S(\mathcal{U})$ with $\widetilde{\mathcal{U}}$ as data at time $n\Delta t$. It defines the new state \mathcal{U}^{n+1} .

- c) We update the source term by solving the Poisson equation with density ρ^{n+1} . The discrete unknown is determined by using a finite difference scheme.

In what follows we focus on Step a). To this end, we use a finite volume scheme where we set

$$\widetilde{\mathcal{U}}_i^{n+1} = \mathcal{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

with $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n$ a numerical flux, approximation of $\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathcal{F}(\mathcal{U})(s, x_{i+1/2}) ds$, $x_{i+1/2}$ being the interface between the cells C_i and C_{i+1} . We shall use two-points fluxes so that

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathcal{F}(\mathcal{U}_i^n, \mathcal{U}_{i+1}^n).$$

More precisely, our simulation will be produced with the Godunov scheme. Of course, the scheme is constrained by a stability condition that relates the time and space steps. More refined schemes preserving the well-balanced property can be used, see [BM09], but we do not detail this aspect here.

Let us detail the main steps of the algorithm that can be used to solve (7.1) completed with the complex boundary conditions (7.2)–(7.5). The determination of ϕ_{abs} and Φ' follows the ideas developed in [VDBG10]. Knowing the absolute and differential potentials at time $n\Delta t$, we are concerned with the relations

$$J[\phi_{abs}^{n+1}\Phi_{ref} + \Phi^n](-h_d) = J[\phi_{abs}^{n+1}\Phi_{ref} + \Phi^n](h_c), \quad (7.7)$$

$$C_d \frac{d}{dt} (\Phi')^n(-h_d) + S_d (\Phi')^n(-h_d) = J[\phi_{abs}^{n+1}\Phi_{ref} + (\Phi')^n](-h_d). \quad (7.8)$$

Observe that the reference potential Φ_{ref} does not change with time and it is computed once for all during the initialization of the code. In fact the constraint (7.7) is treated by coming back to the evolution equation obtained in Chapter 4 :

$$\epsilon_0 \partial_t \left(\partial_x (\Phi(t, -h_d) - \Phi(t, -h_c)) \right) = J(t, -h_d) - J(t, h_c).$$

Using $\Phi(t, x) = \phi_{abs}(t) \Phi_{ref}(x) + \Phi'(t, x)$ yields

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \partial_t \left[\phi_{abs}(t) (\partial_x \Phi_{ref}(-h_d) - \partial_x \Phi_{ref}(h_c)) \right] + \epsilon_0 \partial_t \left[\partial_x (\Phi'(t, -h_d) - \Phi'(t, -h_c)) \right] \\ = J(t, -h_d) - J(t, h_c). \end{aligned}$$

Using asymptotic arguments, as developed in Section 6.2 of Chapter 6, we neglect the time variation of the differential potential and we are led to a stiff ODE involving the factor

$$C_{ap} = \partial_x \Phi_{ref}(-h_d) - \partial_x \Phi_{ref}(h_c).$$

Finally, ϕ_{abs}^{n+1} is defined by the following implicit scheme

$$\epsilon_0 C_{ap} \frac{\phi_{abs}^{n+1} - \phi_{abs}^n}{\Delta t} = J[\phi_{abs}^{n+1} \Phi_{ref} + \Phi'^n](-h_d) - J[\phi_{abs}^{n+1} \Phi_{ref} + \Phi'^n](h_c) \quad (7.9)$$

where $\epsilon_0 C_{ap} \ll 1$. Going back to (7.8) we determine $(\Phi')^{n+1}(-h_d)$. Then, we can solve the Poisson equation to compute $(\Phi')^{n+1}$ and next Φ^{n+1} . The algorithm can be summarized as follows (see Fig 7.2) :

1. Initialization step : computation of the reference state Φ_{ref} .
2. Computation of (ρ, J, \mathcal{E}) by solving the Euler system.
3. Computation of ϕ_{abs} by solving (7.9). Knowing from the previous step the current at $x = -h_d$ and $x = h_c$ we solve (7.9) by using the secant method.
4. Computation of $(\Phi')^{n+1}(-h_d)$ by solving (7.8) ; we use a Runge-Kutta method to solve the ODE.
5. Computation of Φ' by solving the Poisson equation with boundary conditions defined by Step 4.
6. Computation of Φ by solving the Poisson equation with boundary conditions defined by Steps 3 and 4.
7. We go back to Step 2 .

7.3 A SIMPLE DEFINITION OF NUMERICAL FLUXES

The question we address consists in defining numerical boundary conditions for the hydrodynamic system that reproduce accurately the boundary conditions imposed at the microscopic level. Indeed, let us start with the simple case where particles are (partially)

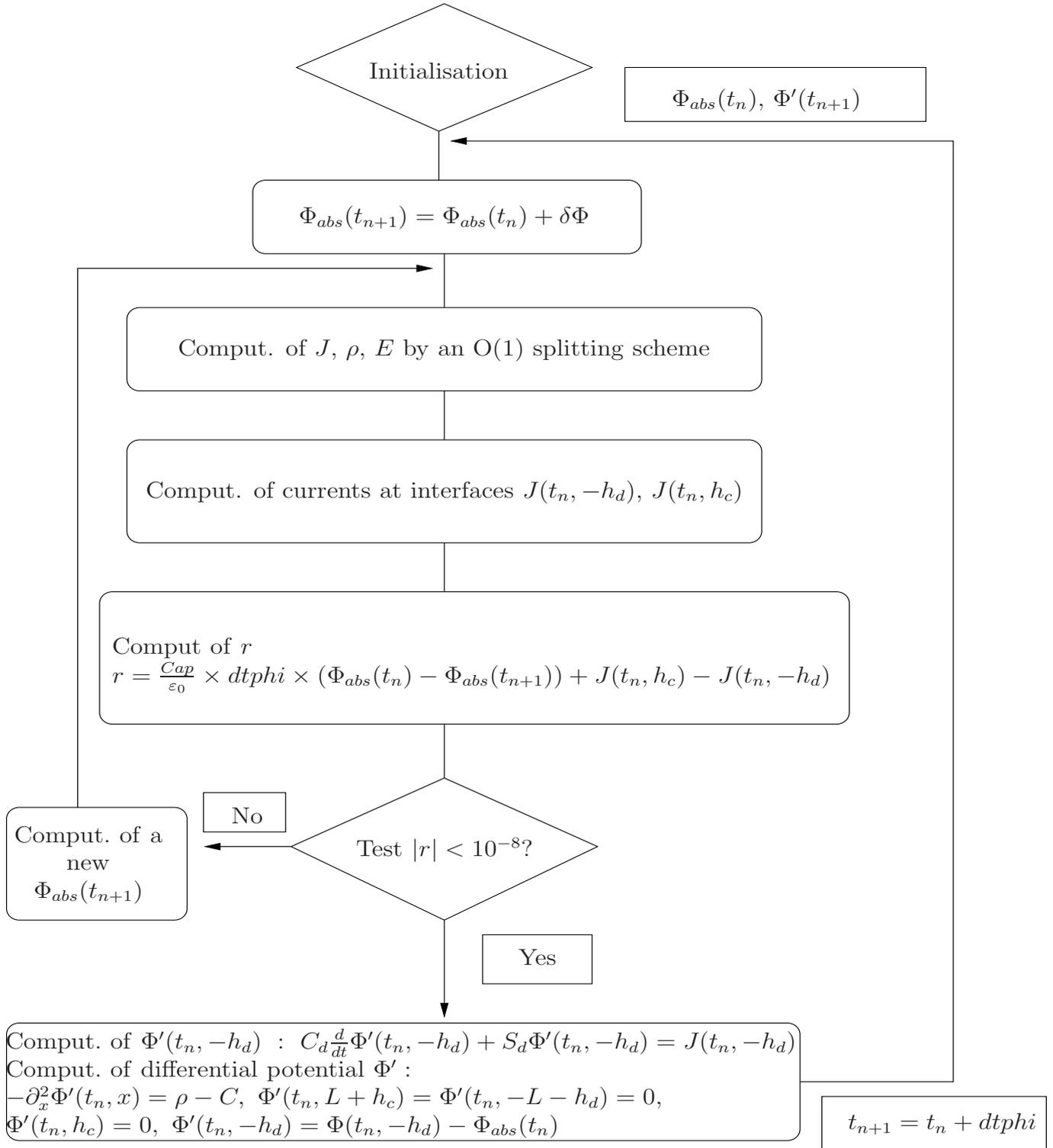


FIG. 7.2 – Schematic representation of the algorithm.

reflected according to the specular law. This rough model has been used for instance in [VDBG10] to evaluate and compare the abilities of several numerical methods for Vlasov models. The distribution of incoming and outgoing particles are related by

$$f(t, -h_d, v) = \alpha f(t, -h_d, -v) \text{ for } v < 0, \quad f(t, h_c, v) = \alpha f(t, h_c, -v) \text{ for } v > 0, \quad (7.10)$$

with $0 < \alpha \leq 1$ a parameter measuring the fraction of reflected particles. According to this reflection law, mass, momentum and energy fluxes are defined by means of the outgoing trace only since we have

$$\int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f(t, h_c, v) dv = \int_{v < 0} \begin{pmatrix} (1 - \alpha)v \\ (1 + \alpha)v^2 \\ (1 - \alpha)v^3 \end{pmatrix} f(t, h_c, v) dv.$$

and, likewise,

$$\int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f(t, -h_d, v) dv = \int_{v > 0} \begin{pmatrix} (1 - \alpha)v \\ (1 + \alpha)v^2 \\ (1 - \alpha)v^3 \end{pmatrix} f(t, -h_d, v) dv.$$

Now, we seek a condition, of numerical nature, which ‘‘mimics’’ the reflection law : the question can be reduced to define a fictitious state $U_{gh}^{h_c}$ from the state $U_{I/2+1}^n$ in the cell corresponding to point h_c (resp. $U_{gh}^{-h_d}$ from the state $U_{I/2}^n$ in the cell linked to point $-h_d$) and then to evaluate the corresponding fluxes. The first attempt we propose is quite close to the method introduced by S. Dellacherie [Del03].

Consider first the case where the incoming distribution is given

$$f(t, h_c, v) = F^{h_c}(t, v).$$

Then, we seek the fictitious state $U_{gh} = (\rho_{gh}, u_{gh}, \theta_{gh})$ such that

$$\int_{v > 0} \begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} M_{(\rho_{gh}, u_{gh}, \theta_{gh})}(v) dv = \int_{v > 0} \begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} F^{h_c}(n\Delta t, v) dv. \quad (7.11)$$

Then, we compute the flux at the interface by using the definition

$$\mathcal{F}_{I+1/2}^n = \mathcal{F}(U_{I/2+1}^n, U_{gh}).$$

In [Del03] the expression of the numerical fluxes is simple and does not require to solve the non linear set of equations (7.11) since the fluxes are defined by

$$\int_{v > 0} \begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} M_{(\rho_{gh}, u_{gh}, \theta_{gh})}(v) dv + \int_{v < 0} \begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} M_{(\rho_{I/2+1}^n, u_{I/2+1}^n, \theta_{I/2+1}^n)}(v) dv.$$

In the case of the reflection law (7.10) we propose to replace the outgoing trace of the particles distribution f by the equilibrium distribution $M_{(\rho_{I/2+1}^n, u_{I/2+1}^n, \theta_{I/2+1}^n)}$. Hence, the ghost state is defined by

$$\int_{v > 0} \begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} M_{(\rho_{gh}, u_{gh}, \theta_{gh})}(v) dv = \alpha \int_{v > 0} \begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} M_{(\rho_{I/2+1}^n, u_{I/2+1}^n, \theta_{I/2+1}^n)}(-v) dv.$$

Then, we use $(\rho_{gh}, u_{gh}, \theta_{gh})$ to define the fluxes at the interface $x = h_c$.

In the specific case of a totally reflexive boundary $\alpha = 1$, we observe that this definition yields

$$\begin{aligned} \int_{v>0} \begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} M_{(\rho_{gh}, u_{gh}, \theta_{gh})}(v) dv &= \int_{v>0} \begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \frac{\rho_{I/2+1}^n}{\sqrt{2\pi\theta_{I/2+1}^n}} e^{-|v-u_{I/2+1}^n|^2/(2\theta_{I/2+1}^n)} dv \\ &= \int_{v>0} \begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \frac{\rho_{I/2+1}^n}{\sqrt{2\pi\theta_{I/2+1}^n}} e^{-|v+u_{I/2+1}^n|^2/(2\theta_{I/2+1}^n)} dv. \end{aligned}$$

Thus, we set

$$\rho_{gh} = \rho_{I/2+1}^n, \quad u_{gh} = -u_{I/2+1}^n, \quad \theta_{gh} = \theta_{I/2+1}^n$$

which are nothing but the so-called “wall boundary conditions” that describe the full reflection of a fluid on a wall.

In the next Section we shall describe a more involved definition of numerical fluxes. We restrict to the gas dynamics framework, that is without force field. The discussion relies on the boundary layer analysis which is due to [CGS88a] for linearized equations. To avoid the discussions about boundary conditions at infinity, we will focus on a bounded domain $\Omega = (-\omega, \omega)$. Each of the boundary point can be assimilated as h_c and $-h_d$ respectively.

7.4 NUMERICAL FLUXES FOR GAS DYNAMICS BASED ON THE ANALYSIS OF THE KNUDSEN LAYER

A statistical picture of a cloud of particles leads to the following PDE

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \frac{1}{\tau} Q(F) \tag{7.12}$$

satisfied by the particles distribution function $F(t, x, v) \geq 0$. Here $t \geq 0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ and $v \in \mathbb{R}^N$ are the time, space and velocity variables respectively. The left hand side of the equation describes the transport of particles, that is the simple motion on straight line with velocity v , and the interactions process the particles are subject to is embodied in the right hand side $Q(F)$, for instance interparticles collisions. The parameter $\tau > 0$ is related to the mean free path which is the average distance travelled by the particles without being affected by any interaction. As τ becomes small, the distribution F tends to an equilibrium F_{eq} that is a function which makes the collision operator vanish $Q(F_{\text{eq}}) = 0$. By considering conservation laws associated to the collision dynamics, we can then derive macroscopic equations satisfied by moments with respect to the velocity variable v . A difficulty arises when the boundary conditions are not compatible with the equilibrium state. In such a case boundary layers appear, whose analysis is quite delicate. The questions we address are related to the numerical treatment of the boundary layer : considering a system of conservation laws obtained as a small mean free path limit of a kinetic model, what are the associated boundary conditions for the hydrodynamic fields? How the boundary fluxes can be evaluated in numerical procedures?

The paper is organized as follows. First we need to set up a few definition and notation. Our framework will be the Euler system, obtained as the limit of the BGK equation (but the method can be extended to more intricate collision operators like the Boltzmann operator or the Landau-Fokker-Planck operator). The necessary material is recalled in Section 7.4.1. In particular entropy dissipation has a central role. A difficulty for hyperbolic equations set on a bounded domain relies on the fact that the number of necessary boundary conditions for the problem to be well-posed usually depends on the solution itself. The entropy provides a natural way to determine the incoming fluxes, with a direct analogy with the microscopic picture. The discussion is strongly inspired by the analysis of the Knudsen layer for the linearized Boltzmann equation by F. Coron-F. Golse-C. Sulem [CGS88a], see also the lecture notes of F. Golse [Gol97a], and their result is the cornerstone of the definition of numerical fluxes we propose in this paper. Section 7.4.2 is the main part of the paper : we discuss how we can take into account the boundary layer in a Finite Volume scheme for the conservation laws. The point is precisely to define a suitable numerical flux on the boundary cells. The definition that we design relies on a decomposition of the numerical solution, according to the nature of the flow (sub or supersonic) combined with an approximation of the half-space problem which defines the matching condition. Finally Section 7.4.3 comments the numerical experiments with comparison to direct simulations of the kinetic model.

7.4.1 Hydrodynamic limits, entropy dissipation and boundary layer analysis

7.4.1.1 BGK equation and Euler system

For the sake of concreteness we consider the BGK collision operator :

$$Q(F) = M[F] - F \tag{7.13}$$

where

$$M[F](v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|v-u|^2}{2\theta}\right) \tag{7.14}$$

and the macroscopic quantities (ρ, u, θ) are defined by

$$\begin{aligned} \text{density :} & \quad \rho = \int_{\mathbb{R}^N} F \, dv, \\ \text{velocity :} & \quad \rho u = \int_{\mathbb{R}^N} v F \, dv, \\ \text{temperature :} & \quad \rho u^2 + N\rho\theta = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 F \, dv. \end{aligned} \tag{7.15}$$

This non linear operator can be seen as a caricature of the Boltzmann or the Landau-Fokker-Planck collision operators that arise in gas dynamics and plasma physics, see [BGK54]. It allows the derivation of rather simple formulae, but our discussion can be extended to more complex collision operators. As a matter of fact, we remark that $(1, v, |v|^2)$

are collision invariants : it means that

$$\int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} Q(F) \, dv = 0$$

holds. In turn, integration of (7.12)–(7.14) yields the following (local) conservation laws

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} F \, dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^N} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} F \, dv = 0. \quad (7.16)$$

The system is not closed since the higher order moments cannot be expressed by means of the macroscopic quantities (7.15). Next, it is clear that the equilibria are the Maxwellian functions

$$Q(F_{\text{eq}}) = 0 \text{ iff } F_{\text{eq}}(v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|v-u|^2}{2\theta}\right) = M_{(\rho,u,\theta)}(v).$$

Therefore, as $\tau \rightarrow 0$ we expect that F , solution of (7.12)–(7.14), resembles a Maxwellian, whose macroscopic parameters ρ , u , θ are still functions of t and x . Inserting this information into the moment system (7.16) we obtain

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} M_{\rho,u,\theta}(v) \, dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^N} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} M_{\rho,u,\theta}(v) \, dv = 0$$

which is now a closed system since it can be recast as the Euler system¹

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \text{Div}_x (\rho u \otimes u) + \nabla_x (\rho \theta) = 0 \\ \partial_t (\rho u^2 + N \rho \theta) + \nabla_x \cdot ((\rho u^2 + (N+2)\rho \theta) u) = 0. \end{cases} \quad (7.17)$$

However, when x lies in a domain Ω of \mathbb{R}^N , equation (7.12) has to be completed with boundary conditions which prescribe the incoming distribution function. We assume that $\partial\Omega$ is smooth and we denote $\nu(x)$ to be the outward normal unit vector at point $x \in \partial\Omega$. We set

$$\Gamma^{\text{out}} = \{(t, x, v) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^N, v \cdot \nu(x) > 0\}$$

and

$$\Gamma^{\text{inc}} = \{(t, x, v) \in (0, \infty) \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^N, v \cdot \nu(x) < 0\}.$$

The theory of traces on $\Gamma^{\text{inc/out}}$ for solutions of transport equations has been developed in [BP87, Ces84, Ces85, Mis00] after the seminal work [Bar70]; we denote $\gamma^{\text{inc/out}}$ the trace operators. The boundary condition for (7.12) has the following expression

$$\gamma^{\text{inc}} F(t, x, v) = \Phi^{\text{data}}(t, x, v), \quad \text{for } (t, x, v) \in \Gamma^{\text{inc}}, \quad (7.18)$$

1. Here and below for given vectors a, b in \mathbb{R}^N , $a \otimes b$ is the $N \times N$ matrix with components $a_i b_j$ and, given a matrix valued field A we set $\text{Div}_x A$ for the vector in \mathbb{R}^N with components $\sum_{j=1}^N \partial_j A_{ij}$.

where $\Phi^{\text{data}} \geq 0$ is a given function in $L^1(\Gamma^{\text{inc}}, |v \cdot \nu(x)| dv d\sigma(x) dt)$. Here and below $d\sigma(x)$ stands for the Lebesgue measure on $\partial\Omega$. Of course, the problem is also completed by an initial condition

$$F(0, x, v) = F^{\text{Init}}(x, v) \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^N). \quad (7.19)$$

Remark 7.4.1 *Prescribing the incoming data as in (7.18) might be unsatisfactory on a physical viewpoint. More realistic boundary conditions are intended to describe the interaction of the particles with the boundary. This is a complicated issue, which requires subsequent modeling efforts, see [CLL95, Kus78]. Simple and classical reflection laws are, for $(t, x, v) \in \Gamma^{\text{inc}}$*

$$\text{Specular reflection law : } \gamma^{\text{inc}} F(t, x, v) = \alpha \gamma^{\text{out}} F(t, x, v - (v \cdot \nu(x))\nu(x)),$$

$$\text{Maxwell diffusive law : } \gamma^{\text{inc}} F(t, x, v) = \alpha \frac{\int_{v_\star \cdot \nu(x) > 0} v_\star \cdot \nu(x) \gamma^{\text{out}} F(t, x, v_\star) dv_\star}{\int_{v_\star \cdot \nu(x) < 0} |v_\star \cdot \nu(x)| e^{-|v_\star|^2/(2\theta_w(x))} dv_\star} e^{-|v|^2/(2\theta_w(x))},$$

where $0 \leq \alpha \leq 1$ is an accommodation parameter that gives the fraction of reflected particles and θ_w is the temperature of the wall $\partial\Omega$. We refer to [Gou97a, Gou97b] for further comments and references on boundary conditions.

7.4.1.2 Entropy

The collision operator verifies a dissipation property that will be crucial to our discussion. We introduce the entropy functional

$$\mathcal{H}(F) = \int_{\mathbb{R}^N} F \ln(F) dv.$$

Then, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{H}(F) dx + \int_{\partial\Omega} \int_{v \cdot \nu(x) > 0} \gamma^{\text{out}} F \ln(\gamma^{\text{out}} F) |v \cdot \nu(x)| dv d\sigma(x) + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^N} D(F) dv dx \\ = \int_{\partial\Omega} \int_{v \cdot \nu(x) < 0} \Phi^{\text{data}} \ln(\Phi^{\text{data}}) |v \cdot \nu(x)| dv d\sigma(x), \end{aligned}$$

with

$$D(F) = (M[F] - F) \ln\left(\frac{M[F]}{F}\right) \geq 0.$$

This remarkable relation is referred to as the H-Theorem. In what follows we will work with the relative entropy between two particles distribution functions F and F_\star

$$\mathcal{H}(F|F_\star) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[F \ln\left(\frac{F}{F_\star}\right) - F + F_\star \right] dv = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{F}{F_\star} \ln\left(\frac{F}{F_\star}\right) - \frac{F}{F_\star} + 1 \right] F_\star dv \geq 0.$$

This quantity is non negative and vanishes iff $F = F_\star$. It has been shown to be very useful in kinetic theory to evaluate how far a solution F of (7.12) is from a reference state F_\star (see e. g. [Vil02] and the references therein).

Remark 7.4.2 *The dissipation property extends to the case of specular or Maxwell reflection law, and even to more general reflection law : the dissipation due to the boundary condition essentially relies on a convexity argument and on a version of the Jensen lemma, referred to as the Darrozes-Guiraud lemma [DG66] and see comments in [Cer88].*

Remark 7.4.3 *The entropy dissipation gives the basic a priori estimate that can be used for justifying the existence of weak (or renormalized) solutions. We refer to [DL89] for the Boltzmann equation, to [Per89, PP93] for the BGK equation in the whole space, while the initial-boundary-value problem is investigated e. g. in [Gou97b, Ham92, Mis10]. Of course, entropy dissipation is also the basis for the analysis of hydrodynamic limits, according to the program addressed in [BGL91, BGL93] : we refer to [GSR04] and to the very complete survey [Vil02] for detailed results and further references.*

Let us go back to the Euler system (7.17). We consider the mapping

$$U = (\rho, u, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \longmapsto \mathcal{U} = (\rho, j, \mathcal{E}) = (\rho, \rho u, \rho u^2/2 + N\rho\theta/2), \quad (7.20)$$

which defines the conserved quantities. The Euler system recasts as

$$\partial_t \mathcal{U} + \nabla_x \cdot \mathcal{F}(\mathcal{U}) = 0,$$

with the matrix (with $N + 2$ rows, N columns)

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} j^T \\ \frac{j \otimes j}{\rho} + \left(\frac{2}{N} \mathcal{E} - \frac{j^2}{N\rho} \right) \mathbb{I}_N \\ \left(\frac{N+2}{N} \mathcal{E} - \frac{j^2}{N\rho} \right) \left(\frac{j}{\rho} \right)^T \end{pmatrix}.$$

An entropy for the Euler system is a convex function $\eta : \mathcal{U} \mapsto \eta(\mathcal{U}) \in \mathbb{R}$ such that there exists an entropy flux $q : \mathcal{U} \mapsto q(\mathcal{U}) \in \mathbb{R}^N$ verifying

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \nabla_x \cdot q(\mathcal{U}) = 0$$

for any smooth solution of (7.17). This definition² leads to a relation between the entropy η , the entropy flux q and the flux function \mathcal{F} ; namely we have

$$\partial_{\mathcal{U}_k} q_j = \sum_{i=1}^{N+2} \partial_{\mathcal{U}_k} \mathcal{F}_{ij} \partial_{\mathcal{U}_i} \eta. \quad (7.21)$$

Given a reference (constant) state \mathcal{U}_* , it is convenient to introduce the relative entropy

$$\eta(\mathcal{U} | \mathcal{U}_*) = \eta(\mathcal{U}) - \eta(\mathcal{U}_*) - \nabla_{\mathcal{U}} \eta(\mathcal{U}_*) \cdot (\mathcal{U} - \mathcal{U}_*).$$

Since η is convex, this quantity is non negative and it vanishes iff $\mathcal{U} = \mathcal{U}_*$. As far as the solution \mathcal{U} of (7.17) is smooth, we have

$$\partial_t \eta(\mathcal{U} | \mathcal{U}_*) + \nabla_x \cdot q(\mathcal{U} | \mathcal{U}_*) = 0 \quad (7.22)$$

2. We refer for more details on this notion and its role for the analysis of hyperbolic systems e. g. to [Ser99, Section 3.4 and ff.].

where the entropy flux is defined by

$$q(\mathcal{U}|\mathcal{U}_\star) = q(\mathcal{U}) - q(\mathcal{U}_\star) - \nabla_{\mathcal{U}} \eta(\mathcal{U}_\star) \cdot (\mathcal{F}(\mathcal{U}) - \mathcal{F}(\mathcal{U}_\star)).$$

A crucial remark is that the kinetic entropy defines an entropy for the Euler system. Indeed, let us set

$$\eta(\mathcal{U}) = \int_{\mathbb{R}^N} M_{(\rho,u,\theta)} \ln(M_{(\rho,u,\theta)}) \, dv = \mathcal{H}(M_{(\rho,u,\theta)})$$

with (ρ, u, θ) associated to \mathcal{U} by (7.20).

Lemma 7.4.4 *We have*

$$\eta(\mathcal{U}) = \rho \ln \left(\frac{\rho}{\theta^{N/2}} \right) - \frac{N}{2} (1 + \ln(2\pi)) \rho$$

and the function $\mathcal{U} \mapsto \eta(\mathcal{U})$ is strictly convex. The associated flux is given by

$$q(\mathcal{U}) = \left[\ln \left(\frac{\rho}{\theta^{N/2}} \right) - \frac{N}{2} (1 + \ln(2\pi)) \right] \times \rho u = \eta(\mathcal{U}) \frac{j}{\rho} = \int_{\mathbb{R}^N} v M_{(\rho,u,\theta)} \ln(M_{(\rho,u,\theta)}) \, dv.$$

The relative entropy is

$$\begin{aligned} \eta(\mathcal{U}|\mathcal{U}_\star) &= \eta(\mathcal{U}) - \rho \left[\ln \left(\frac{\rho_\star}{\theta_\star^{N/2}} \right) + 1 - \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \ln(2\pi) \right] + \rho_\star + \frac{1}{2\theta_\star} (\rho |u - u_\star|^2 + \rho N (\theta - \theta_\star)) \\ &= \mathcal{H}(M_{(\rho,u,\theta)} | M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)}) \geq 0. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Finally we have

$$q(\mathcal{U}|\mathcal{U}_\star) = \int_{\mathbb{R}^N} v \left[M_{(\rho,u,\theta)} \ln \left(\frac{M_{(\rho,u,\theta)}}{M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)}} \right) - M_{(\rho,u,\theta)} + M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} \right] \, dv.$$

The proof of this lemma is just a lengthy but straightforward computation and will be omitted here.

7.4.1.3 Linearization

We consider a given state, with fixed and constant density $\rho_\star > 0$, velocity $u_\star \in \mathbb{R}^N$ and temperature $\theta_\star > 0$; we thus set $U_\star = (\rho_\star, u_\star, \theta_\star)$. The Maxwellian

$$M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)}(v) = \frac{\rho_\star}{(2\pi\theta_\star)^{N/2}} \exp \left(- \frac{|v - u_\star|^2}{2\theta_\star} \right)$$

is a solution of (7.12)–(7.14). We set

$$F(t, x, v) = M_{U_\star}(v) (1 + \delta f(t, x, v))$$

where $\delta > 0$ measures the amplitude of the fluctuation and is intended to be small. The fluctuation f satisfies

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\tau} L_{U_\star}(f) + \frac{1}{\delta \tau} R(\delta f, M_{U_\star}) \quad (7.24)$$

where L_{U_\star} is the linearized BGK operator and R is the remainder defined by the development

$$\frac{M[M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} + \delta M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} f] - M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} - \delta M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} f}{M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)}} = \delta L_{U_\star} f + R(\delta f, M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)}).$$

In other words, we have

$$L_{U_\star}(f) = \frac{1}{M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)}} \frac{\partial}{\partial F} (M[F] - F) \Big|_{F=M_{U_\star}} (M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} f).$$

Since

$$\nabla_{\rho_\star, u_\star, \theta_\star} M_{\rho_\star, u_\star, \theta_\star}(v) = M_{\rho_\star, u_\star, \theta_\star}(v) \begin{pmatrix} \frac{1}{v - u_\star} \\ \frac{\rho_\star}{\theta_\star} \\ -\frac{N}{2\theta_\star} + \frac{|v - u_\star|^2}{2\theta_\star^2} \end{pmatrix}$$

the linearized operator reduces to a projection : let $f \in L^2(M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} dv)$, then

$$L_{U_\star}(f) = \Pi f - f$$

with

$$\Pi f = \frac{1}{M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)}} \nabla_{\rho_\star, u_\star, \theta_\star} M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{u} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_\star} + \frac{v - u_\star}{\theta_\star} \tilde{u} + \frac{\tilde{\theta}}{2\theta_\star} \left(\frac{|v - u_\star|^2}{\theta_\star} - N \right),$$

and

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho} u_\star + \rho_\star \tilde{u} \\ \tilde{\rho}(u_\star^2 + N\theta_\star) + 2\rho_\star u_\star \cdot \tilde{u} + N\rho_\star \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} f M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} dv.$$

Clearly, Π is the orthogonal projection of $L^2(M_{U_\star} dv)$ to the finite dimensional set spanned by the collisional invariants $\{1, v, |v|^2\}$. In particular we have :

- L_{U_\star} is self-adjoint for the inner product of $L^2(M_{U_\star} dv)$,
- $\text{Ker}(L_{U_\star}) = \text{Span}\{1, v, |v|^2\}$,
- $\text{Ran}(L_{U_\star}) = (\text{Ker}(L_{U_\star}))^\perp$ for the inner product of $L^2(M_{U_\star} dv)$,
- and the following dissipation property holds

$$\int_{\mathbb{R}^N} L_{U_\star} f f M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} dv \leq 0.$$

The operator Π defines the fluctuation of the macroscopic quantities

$$U = U_\star + \tilde{U}, \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{u} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix}.$$

Accordingly the linearization of the relation (7.20) defines the following linear relation

$$\tilde{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{j} \\ \tilde{\mathcal{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_\star & \rho_\star & 0 \\ \frac{u_\star^2 + N\theta_\star}{2} & \rho_\star u_\star^T & N\rho_\star/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{u} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = P_\star \tilde{U}. \quad (7.25)$$

Remark 7.4.5 *The linearized BGK operator is remarkably simple ; at the price of more involved formulae linearized Boltzmann or Fokker-Planck operators can be considered as well since they still satisfy the necessary properties (self-adjointness, dissipation...), see [Cer88].*

Assuming that the fluctuation remains small, we get rid of the non linear remainder term in (7.24).³ We are thus concerned by the linear problem

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\tau} L_{U_\star} f, \\ f|_{t=0} = f^{\text{Init}}, \\ \gamma^{\text{inc}} f(t, x, v) = \Psi^{\text{data}}(t, v), \quad \text{on } \Gamma^{\text{inc}}, \end{cases} \quad (7.26)$$

where the boundary condition is given, coming back to (7.18), by

$$\Psi^{\text{data}} = \frac{\Phi^{\text{data}}}{M_{U_\star}} - 1.$$

Now, as $\tau \rightarrow 0$ we guess that f looks like an infinitesimal Maxwellian

$$f \simeq m_{(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})(t, x)}(v) = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_\star} + \frac{v - u_\star}{\theta_\star} \tilde{u} + \frac{\tilde{\theta}}{2\theta_\star} \left(\frac{|v - u_\star|^2}{\theta_\star} - N \right) \in \text{Ker}(L_{U_\star}).$$

Inserting this ansatz in the following moment system (analog for the linearized problem of (7.16))

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} f M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^N} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} f M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} dv = 0,$$

we are led to the linearized Euler system

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \rho_\star \nabla_x \cdot \tilde{u} + u_\star \cdot \nabla_x \tilde{\rho} = 0, \\ \partial_t \tilde{u} + (u_\star \cdot \nabla_x) \tilde{u} + \nabla_x \tilde{\theta} + \frac{\theta_\star}{\rho_\star} \nabla_x \tilde{\rho} = 0, \\ \partial_t \tilde{\theta} + u_\star \cdot \nabla_x \tilde{\theta} + \frac{2}{N} \theta_\star \nabla_x \cdot \tilde{u} = 0. \end{cases} \quad (7.27)$$

3. which makes sense when $\delta \ll \tau$.

Of course, we obtain the linear system (7.27) when we linearize directly the system of conservation laws (7.17), assuming that the perturbations and their derivatives remain small. The question is now to identify the boundary conditions to be satisfied by $\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta}$, that will depend on the kinetic incoming condition in (7.18).

7.4.1.4 Slab geometry

For the sake of simplicity, we avoid all difficulties associated to complex geometries and from now on we adopt the following simplified framework : the flow does not depend on the transverse variables x_2, \dots, x_N and the particles evolve in the domain $x_1 \in (-\omega, +\omega)$. We slightly change the notation by using x to denote the single coordinate x_1 characterizing this slab geometry. When necessary we shall write $u \in \mathbb{R}^N$ as $(u_1, u_\perp) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$.

Then the kinetic equation now reads

$$\partial_t F + v_1 \partial_x F = \frac{1}{\tau} \left(M_{(\rho, u, \theta)(t, x)} - F \right) \quad t \geq 0, \quad x \in (-\omega, +\omega), \quad v \in \mathbb{R}^N, \quad (7.28)$$

with ρ, u, θ associated to F by (7.15). The boundary condition becomes

$$\gamma^{\text{inc}} F(t, -\omega, v) = \Phi^{\text{data, L}}(t, v) \quad \text{for } v_1 > 0, \quad \gamma^{\text{inc}} F(t, +\omega, v) = \Phi^{\text{data, R}}(t, v) \quad \text{for } v_1 < 0. \quad (7.29)$$

The linearized equation (7.26) can be recast in a similar fashion : we have

$$\begin{cases} \partial_t f + v_1 \partial_x f = \frac{1}{\tau} L_{U_*} f, \\ f|_{t=0} = f^{\text{Init}}, \end{cases} \quad (7.30)$$

endowed with

$$\gamma^{\text{inc}} f(t, -\omega, v) = \Psi^{\text{data, L}}(t, v) \quad \text{for } v_1 > 0, \quad \gamma^{\text{inc}} f(t, +\omega, v) = \Psi^{\text{data, R}}(t, v) \quad \text{for } v_1 < 0, \quad (7.31)$$

where $\Psi^{\text{data, } j} = \Phi^{\text{data, } j} / M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} - 1$ for $j = \text{L}$ or $j = \text{R}$.

Let us go back to the hydrodynamic equations. In conserved variables the Euler system reads

$$\partial_t \mathcal{U} + \partial_x \mathcal{F}(\mathcal{U}) = 0,$$

where now $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{N+2} \rightarrow \mathbb{R}^{N+2}$. It is given by the components \mathcal{F}_{i1} of the multi-dimensional case. Precisely we have

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_1^2/\rho + 2\mathcal{E}/N - j^2/(N\rho) \\ j_1 j_\perp / \rho \\ ((N+2)\mathcal{E}/N - j^2/(N\rho)) j_1 / \rho \end{pmatrix}.$$

As far as the solution is smooth, we can rewrite the equation in the following non conservative form

$$\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{A}(\mathcal{U}) \partial_x \mathcal{U} = 0,$$

with

$$\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \nabla_{\mathcal{U}} \mathcal{F}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{j_1^2}{\rho^2} + \frac{j^2}{N\rho^2} & \frac{2j_1}{\rho} - \frac{2j_1}{N\rho} & \left(\frac{2j_\perp}{N\rho}\right)^T & \frac{2}{N} \\ -\frac{j_1 j_\perp}{\rho^2} & \frac{j_\perp}{\rho} & \frac{j_1}{\rho} \mathbb{I}_{N-1} & 0 \\ -\left(\frac{N+2}{N}\mathcal{E} - \frac{j^2}{N\rho}\right)\frac{j_1}{\rho^2} + \frac{j_1 j^2}{N\rho^3} & \left(\frac{N+2}{N}\mathcal{E} - \frac{j^2}{N\rho}\right)\frac{1}{\rho} - \frac{2j_1^2}{N\rho^2} & \left(-\frac{2j_\perp j_1}{N\rho^2}\right)^T & \frac{N+2}{N}\frac{j_1}{\rho} \end{pmatrix}.$$

The linearized version of the Euler system is simply

$$\partial_t \widetilde{\mathcal{U}} + \mathcal{A}(\mathcal{U}_\star) \partial_x \widetilde{\mathcal{U}} = 0.$$

Equivalently we can express the system with the variations of density, velocity and temperature $\widetilde{U} = (\widetilde{\rho}, \widetilde{u}, \widetilde{\theta})$. We remind that they are related to the conservative unknowns by $\widetilde{\mathcal{U}} = P_\star \widetilde{U}$, see (7.25). In the slab geometry, (7.27) becomes

$$\partial_t \begin{pmatrix} \widetilde{\rho} \\ \widetilde{u}_1 \\ \widetilde{u}_\perp \\ \widetilde{\theta} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_{\star 1} & \rho_\star & 0 & 0 \\ \frac{\theta_\star}{\rho_\star} & u_{\star 1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & u_{\star 1} \mathbb{I}_{N-1} & 0 \\ 0 & 2\theta_\star/N & 0 & u_{\star 1} \end{pmatrix}}_{:=A_\star} \partial_x \begin{pmatrix} \widetilde{\rho} \\ \widetilde{u}_1 \\ \widetilde{u}_\perp \\ \widetilde{\theta} \end{pmatrix} = 0. \quad (7.32)$$

We thus have

$$\partial_t \widetilde{\mathcal{U}} + P_\star A_\star P_\star^{-1} \partial_x \widetilde{\mathcal{U}} = 0,$$

and of course

$$P_\star A_\star P_\star^{-1} = \mathcal{A}(\mathcal{U}_\star).$$

The characteristic speeds of the system are the eigenvalues of A_\star , that is $u_{\star 1}$ (with multiplicity N), $u_{\star 1} \pm c_\star$, with $c_\star = \sqrt{\frac{N+2}{N}\theta_\star}$ the sound speed. A difficulty is related to the fact that the number of boundary conditions necessary to complete the problem depends on the number of “incoming characteristics”, that is the dimension of the eigenspace associated to positive eigenvalues (at $x = -\omega$, while at $x = +\omega$ we care about negative eigenvalues). This intuition⁴ becomes clear by using the natural symmetrization of the system provided by the (relative) entropy.

To this end, we need to introduce a couple of notation, the goal being to rewrite the linearized system in an equivalent form $\partial_t \mathcal{S}_\star \widetilde{\mathcal{U}} + \mathcal{Q}_\star \partial_x \widetilde{\mathcal{U}} = 0$, with \mathcal{S}_\star and \mathcal{Q}_\star symmetric matrices. The definition of \mathcal{S}_\star and \mathcal{Q}_\star are deduced from the expression of the entropy. Since the pioneering works K. O. Friedrichs and P. D. Lax [FL71] and S. Godunov [God87], this is the standard preliminary step for studying hyperbolic problems. In particular it has an essential role for proving the local well-posedness of the non linear Cauchy problem. For the initial boundary value problem, the new formulation of the system gives rise to the boundary terms that need to be imposed.

4. The basic tools for the analysis of hyperbolic mixed problems are described e. g. in [Ser00, Chapter 14].

Tedious computations yield

$$\nabla_{\mathcal{U}} \eta(\mathcal{U} | \mathcal{U}_*) = \begin{pmatrix} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \left(\frac{\theta_*}{\theta} \right)^{N/2} \right) + \frac{|u - u_*|^2}{2\theta_*} - \frac{u}{\theta_*} \cdot (u - u_*) + \left(-\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta_*} \right) \frac{|u|^2}{2} \\ \frac{u}{\theta} - \frac{u_*}{\theta_*} \\ -\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta_*} \end{pmatrix}.$$

Differentiating once more and evaluating the Hessian matrix at $\mathcal{U} = \mathcal{U}_*$ defines the matrix

$$\mathcal{S}_* = D_{\mathcal{U}}^2 \eta(\mathcal{U} | \mathcal{U}_*) \Big|_{\mathcal{U}=\mathcal{U}_*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_*} \left(1 + \frac{N}{2} + \frac{|u_*|^4}{2N\theta_*^2} \right) & -\frac{|u_*|^2}{N\rho_*\theta_*^2} u_*^T & -\frac{1}{\rho_*\theta_*} + \frac{|u_*|^2}{N\rho_*\theta_*^2} \\ -\frac{|u_*|^2}{N\rho_*\theta_*^2} u_* & \left(\frac{1}{\rho_*\theta_*} + \frac{2|u_*|^2}{N\rho_*\theta_*^2} \right) \mathbb{I}_N & -\frac{2u_*}{N\rho_*\theta_*^2} \\ -\frac{1}{\rho_*\theta_*} + \frac{|u_*|^2}{N\rho_*\theta_*^2} & -\frac{2u_*^T}{N\rho_*\theta_*^2} & \frac{2}{N\rho_*\theta_*^2} \end{pmatrix}.$$

Since η is strictly convex (see Lemma 7.4.4), \mathcal{S}_* is symmetric positive definite. Now, we evaluate the entropy flux. Since $\eta(\mathcal{U} | \mathcal{U}_*)$ and $q(\mathcal{U} | \mathcal{U}_*)$ as well as their gradient vanish at $\mathcal{U} = \mathcal{U}_*$, by differentiating (7.21) we obtain

$$\mathcal{A}(\mathcal{U})^T D_{\mathcal{U}}^2 \eta(\mathcal{U} | \mathcal{U}_*) \Big|_{\mathcal{U}=\mathcal{U}_*} = D_{\mathcal{U}}^2 q(\mathcal{U} | \mathcal{U}_*) \Big|_{\mathcal{U}=\mathcal{U}_*}. \quad (7.33)$$

We denote by \mathcal{Q}_* this matrix. Since it is defined as an Hessian matrix, it is symmetric and we have

$$\mathcal{Q}_* = \mathcal{A}(\mathcal{U}_*)^T \mathcal{S}_* = \mathcal{Q}_*^T = \mathcal{S}_*^T \mathcal{A}(\mathcal{U}_*) = \mathcal{S}_* \mathcal{A}(\mathcal{U}_*). \quad (7.34)$$

Considering small fluctuations around \mathcal{U}_* , we can expand the entropy relation (7.22) rewritten as

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}_* + \widetilde{\mathcal{U}} | \mathcal{U}_*) + \partial_x q(\mathcal{U}_* + \widetilde{\mathcal{U}} | \mathcal{U}_*) = 0.$$

At leading order it yields

$$\partial_t \mathcal{S}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}} + \partial_x \mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}} = 0. \quad (7.35)$$

Of course we can obtain the same relation by remarking that the multiplication of (7.32) by \mathcal{S}_* leads to

$$\partial_t \mathcal{S}_* \widetilde{\mathcal{U}} + \partial_x \mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} = 0,$$

owing to (7.34). Then we use the symmetry of the matrices \mathcal{S}_* and \mathcal{Q}_* to deduce (7.35). The interest of the identity (7.35) relies on the derivation of an energy estimate as follows

$$\frac{d}{dt} \int_{-\omega}^{+\omega} \mathcal{S}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}} \, dx + \mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}} \Big|_{x=-\omega}^{x=+\omega} = 0.$$

Separating contributions according to their sign yields

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\omega}^{+\omega} \mathcal{S}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}}(t, x) dx + \int_0^t \left[\mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}}(t, +\omega) \right]_+ dt - \int_0^t \left[\mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}}(t, -\omega) \right]_- dt \\ &= \int_{-\omega}^{+\omega} \mathcal{S}_* \widetilde{\mathcal{U}}^{\text{Init}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}}^{\text{Init}}(x) dx + \int_0^t \left[\mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}}(t, -\omega) \right]_+ dt - \int_0^t \left[\mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}}(t, +\omega) \right]_- dt. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Hence we realize that uniqueness is guaranteed when the non negative part of $\mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}}(t, x = -\omega)$ and the non positive part of $\mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}}(t, x = +\omega)$ are given.

These considerations are the key ingredients to study the well-posedness of the initial boundary value problem for the linearized system (7.32). We refer to [Gol97a] for a crystal-clean overview. The following claim makes the connection between the signature σ_{U_*} of the quadratic form $\widetilde{\mathcal{U}} \mapsto \mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{S}_* \mathcal{A}(U_*) \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}}$, see (7.34), and the eigenvalues of the flux matrix $\mathcal{A}(U_*)$: the dimension of the eigenspaces associated to positive (resp. negative) eigenvalues of \mathcal{Q}_* corresponds to the number of positive (resp. negative) eigenvalues of the flux matrix $\mathcal{A}(U_*)$, that is, for the left hand boundary $x = -\omega$, the number of “incoming” (resp. “outgoing”) characteristics and for the right hand boundary $x = +\omega$, the number of “outgoing” (resp. “incoming”) characteristics.

Proposition 7.4.6 *The signature σ_{U_*} is (n_+, n_-) , with $n_+ + n_- + n_0 = N + 2$, n_0 being the dimension of $\text{Ker}(\mathcal{Q}_*)$, and n_+ , resp. n_- , is the cardinal of the set of the positive, resp. negative, eigenvalues of $\mathcal{A}(U_*)$.*

Combining this statement, which comes from basic linear algebra, to the energy estimate (7.36) we are led to the following well-posedness statement which makes precise the nature of required boundary conditions for solving (7.32). We refer to [CGS88a, Gol97a] and [Ser00, Chapter 14] for more details and proofs of these two propositions.

Proposition 7.4.7 *Let E^\pm be a subspace of \mathbb{R}^{N+2} such that*

- i) For any $\widetilde{\mathcal{U}} \in E^\pm \setminus \{0\}$, we have $\pm \mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{U}} > 0$,*
- ii) E^\pm is maximal in the sense that any subspace $E \subset \mathbb{R}^{N+2}$ verifying the property stated in i), is included in E^\pm .*

We set

$$E^{\pm\perp} = \{ \widetilde{\mathcal{V}} \in \mathbb{R}^{N+2}, \text{ such that for any } \widetilde{\mathcal{U}} \in E^\pm \text{ we have } \mathcal{Q}_* \widetilde{\mathcal{U}} \cdot \widetilde{\mathcal{V}} = 0 \}.$$

Let $t \mapsto \widetilde{\mathcal{U}}^{\text{data,L}}(t)$ and $t \mapsto \widetilde{\mathcal{U}}^{\text{data,R}}(t)$ be integrable functions on $(0, T)$ for any $0 < T < \infty$ such that $\widetilde{\mathcal{U}}^{\text{data,L}}(t) \in E^{-\perp}$ and $\widetilde{\mathcal{U}}^{\text{data,R}}(t) \in E^{+\perp}$. We consider the mixed problem

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{\mathcal{U}} + \mathcal{A}(U_*) \partial_x \widetilde{\mathcal{U}} = 0, \\ \widetilde{\mathcal{U}}_{t=0} = \widetilde{\mathcal{U}}^{\text{Init}} \in H^1([-\omega, \omega]), \\ \widetilde{\mathcal{U}}(t, -\omega) - \widetilde{\mathcal{U}}^{\text{data,L}} \in E^-, \quad \widetilde{\mathcal{U}}(t, +\omega) - \widetilde{\mathcal{U}}^{\text{data,R}} \in E^+. \end{cases}$$

Suppose that $\widetilde{\mathcal{U}}^{\text{Init}}(x = -\omega) - \widetilde{\mathcal{U}}^{\text{data,L}}(t = 0) \in E^-$ and $\widetilde{\mathcal{U}}^{\text{Init}}(x = +\omega) - \widetilde{\mathcal{U}}^{\text{data,R}}(t = 0) \in E^+$. Then the mixed problem has a unique solution in $C^1(0, \infty; L^2(-\omega, +\omega))$.

7.4.1.5 Boundary layer

As already remarked

$$\mathcal{H}(F|M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(F \ln(F/M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}) - F + M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} \right) dv \geq 0$$

is the relative entropy associated to the BGK equation (7.12)–(7.14). Then we remark that

$$\mathcal{H}(M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(1 + \delta f)|M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}) = \frac{\delta^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv + \mathcal{O}(\delta^3).$$

Accordingly,

$$f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv$$

defines an entropy for the linearized equation and indeed solutions of (7.30) satisfy

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv + \partial_x \int_{\mathbb{R}^N} v_1 |f|^2 M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv = \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}^N} L_{U_*} f f M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv \leq 0.$$

Evaluating the entropy flux on an infinitesimal Maxwellian defines a quadratic form of the macroscopic quantities

$$\mathbf{Q} : \tilde{U} = (\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta}) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} v_1 |g|^2 M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv \Big|_{g=m(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})}.$$

To be more specific, we have

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\tilde{U}) &= \int_{\mathbb{R}^N} v_1 \left| \frac{\tilde{\rho}}{\rho_*} + \frac{v - u_*}{\theta_*} \tilde{u} + \frac{\tilde{\theta}}{2\theta_*} \left(\frac{|v - u_*|^2}{\theta_*} - N \right) \right|^2 M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv \\ &= \frac{u_{*1}}{\rho_*} \tilde{\rho}^2 + \frac{\rho_* u_{*1}}{\theta_*} \tilde{u}_1^2 + \frac{\rho_* u_{*1}}{\theta_*} \tilde{u}_\perp \cdot \tilde{u}_\perp + N \frac{\rho_* u_{*1}}{2\theta_*} \tilde{\theta}^2 + 2\tilde{\rho} \tilde{u}_1 + 2 \frac{\rho_*}{\theta_*} \tilde{u}_1 \tilde{\theta} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{u_{*1}}{\rho_*} & 1 & 0 & 0 \\ \rho_* & \frac{\rho_* u_{*1}}{\theta_*} & 0 & \frac{\rho_*}{\theta_*} \\ 0 & 0 & \frac{\rho_* u_{*1}}{\theta_*} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_*}{\theta_*} & 0 & N \frac{\rho_* u_{*1}}{2\theta_*^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_\perp \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_\perp \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \Sigma_* \tilde{U} \cdot \tilde{U}. \end{aligned}$$

In fact this quantity gives the entropy flux in the variables $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ instead of the conservative variables, owing to the following claim.

Lemma 7.4.8 *We have $\Sigma_* = P_*^T \mathcal{Q}_* P_*$.*

Proof. The identity can be checked by direct inspection. Instead, let us give some hints explaining where the formula comes from. According to the definition of the entropy flux $q(\mathcal{U}|\mathcal{U}_*)$ in Lemma 7.4.4, $\mathbf{Q}(\tilde{U})$ corresponds to the leading term in the expansion of

$$\int_{\mathbb{R}^N} v \left[M_{(\rho_* + \tilde{\rho}, u_* + \tilde{u}, \theta_* + \tilde{\theta})} \ln \left(\frac{M_{(\rho_* + \tilde{\rho}, u_* + \tilde{u}, \theta_* + \tilde{\theta})}}{M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}} \right) - M_{(\rho_* + \tilde{\rho}, u_* + \tilde{u}, \theta_* + \tilde{\theta})} + M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} \right] dv.$$

Therefore, by identification with (7.35) and using (7.25), we obtain

$$\mathbf{Q}(\tilde{U}) = \Sigma_\star \tilde{U} \cdot \tilde{U} = \mathcal{Q}_\star \tilde{\mathcal{U}} \cdot \tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{Q}_\star P_\star \tilde{U} \cdot P_\star \tilde{U} = P_\star^T \mathcal{Q}_\star P_\star \tilde{U} \cdot \tilde{U}.$$

□

This correspondence allows to split the set of infinitesimal Maxwellians according to the sign of the quadratic form \mathbf{Q} :

$$\text{Ker}(L_{U_\star}) = \Lambda^+ \oplus \Lambda^- \oplus \Lambda^0,$$

with

$$\mathbf{Q}|_{\Lambda^+} \text{ is positive definite, } \mathbf{Q}|_{\Lambda^-} \text{ is negative definite and } \Lambda^0 = \{\tilde{U} \in \mathbb{R}^{N+2}, \mathbf{Q}(\tilde{U}) = 0\}.$$

Note that $\tilde{U} \in \Lambda^\pm$ means that $\tilde{\mathcal{U}} = P_\star \tilde{U} \in E^\pm$ as arising in Proposition 7.4.7. Owing to Proposition 7.4.6 and Lemma 7.4.8, we have

$$\dim(\Lambda^+) = n_+, \quad \dim(\Lambda^-) = n_-, \quad \dim(\Lambda^0) = n_0.$$

According to [CGS88a], and as developed in [BGS06, Gol97a] it is convenient to introduce the following basis of $\text{Ker}(L_{U_\star})$:

$$\begin{aligned} \chi_1(v) &= \frac{1}{\sqrt{2N(N+2)}} \left(\sqrt{N(N+2)} \frac{v_1 - u_{\star 1}}{\sqrt{\theta_\star}} + \frac{|v - u_\star|^2}{\theta_\star} \right), \\ \chi_0(v) &= \frac{1}{\sqrt{2(N+2)}} \left(\frac{|v - u_\star|^2}{\theta_\star} - N - 2 \right), \\ \chi_k(v) &= \frac{v_k - u_{\star k}}{\sqrt{\theta_\star}} \quad \text{for } k \in \{2, \dots, N\}, \\ \chi_{N+1}(v) &= \frac{1}{\sqrt{2N(N+2)}} \left(\sqrt{N(N+2)} \frac{v_1 - u_{\star 1}}{\sqrt{\theta_\star}} - \frac{|v - u_\star|^2}{\theta_\star} \right). \end{aligned}$$

In what follows, we denote

$$I^\pm = \{k \in \{0, \dots, N+1\}, \chi_k \in \Lambda^\pm\}, \quad I^0 = \{k \in \{0, \dots, N+1\}, \chi_k \in \Lambda^0\}.$$

Note that $\#I^+ = n_+$, $\#I^- = n_-$, $\#I^0 = n_0$. The interest of this specific basis relies on the orthogonality properties and useful formula summarized in the following Lemma.

Lemma 7.4.9 *We have*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} v_1 \chi_k \chi_l(v) M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} dv &= \delta_{kl}, \\ \int_{\mathbb{R}^N} v_1 \chi_k \chi_l(v) M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} dv &= 0 \quad \text{if } k \neq l. \end{aligned}$$

Furthermore, we observe that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} v_1 |\chi_1|^2(v) M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} dv &= \rho_\star \left(u_{\star 1} + \sqrt{\frac{N+2}{N}} \theta_\star \right) = \rho_\star (u_{\star 1} + c_\star), \\ \int_{\mathbb{R}^N} v_1 |\chi_k|^2(v) M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} dv &= \rho_\star u_{\star 1} \quad \text{for } k \in \{0, 2, \dots, N\}, \\ \int_{\mathbb{R}^N} v_1 |\chi_{N+1}|^2(v) M_{(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)} dv &= \rho_\star \left(u_{\star 1} - \sqrt{\frac{N+2}{N}} \theta_\star \right) = \rho_\star (u_{\star 1} - c_\star). \end{aligned}$$

The final touch consists in introducing an ansatz which takes into account the boundary layer correctors. We expand the solution of (7.30) as follows

$$f(t, x, v) = m_{(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})(t, x)}(v) + G^L(t, (x + \omega)/\tau, v) + G^R(t, (\omega - x)/\tau, v) + r_\tau(t, x, v)$$

with r_τ a remainder which is expected to be small as τ goes to 0. The correctors $G^L(t, z = (\omega + x)/\tau, v)$, $G^R(t, z = (\omega - x)/\tau, v)$, are defined from the following half space problem

$$\begin{cases} v_1 \partial_z G = L_{U_*} G, & \text{for } z > 0 \text{ and } v \in \mathbb{R}^N, \\ G(0, v) = \Upsilon^{\text{data}}, & \text{for } v_1 > 0, \end{cases} \quad (7.37)$$

where Υ^{data} has to be suitably defined (the variables of the half-space problem are z and v ; in fact we are concerned with data parametrized by the time variable but we omit the time dependence to simplify the notations). We seek a solution which vanishes at infinity : imposing

$$G(z, v) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0 \quad (7.38)$$

means that the influence of the corrector becomes negligible far away from the boundary. The complete analysis of the half-space problem is due to [CGS88a] (after the preliminary breakthrough of [BCN86] and formulation of the problem in [Cer87]; for the specific case of the linearized BGK operator the analysis appeared in a different form in [AC80, GvdM84]). Precisely, we have the following statement [CGS88a, Theorem 1.7.1]

Theorem 7.4.10 *Let V^+ be a subspace of $\text{Ker}(L_{U_*})$ satisfying*

- i) For any $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{N+2} \setminus \{0\}$ such that $m_{\tilde{U}} \in V^+$ we have $\mathbf{Q}(\tilde{U}) \geq 0$,*
- ii) V^+ is maximal in the sense that any subspace $V \subset \text{Ker}(L_{U_*})$ verifying the property stated in i) is included in V^+ .*

Let $\Upsilon^{\text{data}} \in L^2(\mathbb{R}^N, (1 + |v|)M_{U_}(v) dv)$. Then, for any $m \in \text{Ker}(L_{U_*})$ there exists a unique $m_\infty \in V^+$ and a unique solution $G \in L^\infty(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^N, M_{U_*} dv))$ of (7.37) such that for any $\gamma > 0$ small enough we have*

$$e^{\gamma z} \left(G(z, v) - m - m_\infty(v) \right) \in L^\infty(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^N, (1 + |v|)M_{U_*}(v) dv)).$$

The statement can be rephrased as follows (using Theorem 7.4.10 with $m = 0$)

Corollary 7.4.11 *There exists a linear mapping (that can be called the generalized Chandrasekhar functional)*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_* : L^2(\mathbb{R}^N, (1 + |v|)M_{U_*}(v) dv) &\longrightarrow V^+ \\ \Upsilon^{\text{data}} &\longmapsto m_\infty \end{aligned}$$

with m_∞ the limit as $z \rightarrow \infty$ of the unique solution $G \in L^\infty(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^N, M_{U_} dv))$ of (7.37).*

This statement defines the necessary boundary condition for the macroscopic field \tilde{U} at the boundary $x = -\omega$, and $x = +\omega$. Indeed coming back to (7.30) the boundary layer correctors are defined as follows :

– $G^L(t, z, v) = G(t, z, v)$ with G the solution of (7.37) with incoming data

$$\Upsilon^{\text{data}}(v) = \Psi^{\text{data,L}}(t, v) - m_{\tilde{U}(t, -\omega)}(v),$$

– $G^R(t, z, v) = G(t, z, -v)$ with G the solution of (7.37) with incoming data

$$\Upsilon^{\text{data}}(v) = \Psi^{\text{data,R}}(t, -v) - m_{\tilde{U}(t, +\omega)}(-v).$$

The n_+ necessary boundary conditions at $x = -\omega$ (resp. the n_- necessary boundary conditions at $x = +\omega$) are provided by the determination of the asymptotic state m_∞ associated to the incoming data. Imposing (7.38) means that

$$\mathcal{E}_*(\Psi^{\text{data,L}}(t, \cdot)) = \mathcal{E}_*(m_{\tilde{U}(t, -\omega)}), \quad \mathcal{E}_*(\Psi^{\text{data,R}}(t, \cdot)) = \mathcal{E}_*(m_{\tilde{U}(t, +\omega)}). \quad (7.39)$$

In fact it is maybe more intuitive to split $m_{\tilde{U}(t, -\omega)}$ into its “outgoing part” $m_- = \sum_{k \in I^-} \alpha_k \chi_k$ and its “incoming part” $m_+ = \sum_{k \in I^+} \alpha_k \chi_k$: the former is determined by the flow while the latter has to be imposed as a boundary condition to complete the Euler system. Precisely, let us define \tilde{G} as to be the solution of (7.37) with incoming data $\Upsilon^{\text{data}} = \Psi^{\text{data,L}} - m_-$. Then, the boundary condition for the macroscopic field is obtained by requiring m_+ to be the asymptotic state of $\tilde{G}(z, v)$ as $z \rightarrow \infty$ which means

$$\mathcal{E}_*(m_+(t, \cdot)) = \mathcal{E}_*(\Psi^{\text{data,L}}(t, \cdot) - m_-(t, \cdot)).$$

A similar reasoning applies for the boundary condition at $x = \omega$. We are going to use this formalism in order to define numerical fluxes.

7.4.2 Finite Volume scheme and treatment of the boundary conditions

From now on, we only consider the case $N = 1$ and we assume for the velocity variable $v \in \mathbb{R}$. The space domain reduces to the interval $(-\omega, +\omega)$, where for the simulation we will set $\omega = 0.5$. We wish to compare the simulation of the 1D BGK equation (7.28) endowed with the initial condition $F|_{t=0} = F^{\text{init}}$ and the given incoming boundary condition (7.29) with the simulation of the Euler system

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \rho \theta) = 0, \\ \partial_t\left(\frac{\rho u^2 + \rho \theta}{2}\right) + \partial_x\left(\left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{3}{2}\rho \theta\right)u\right) = 0, \end{cases} \quad (7.40)$$

completed with boundary conditions defined through the boundary layer analysis. In order to solve the kinetic equation (7.28) we use a simple splitting scheme : given $F_{i,p}^n$, an approximation of F at time $n\Delta t$, position $x_i = -\omega + i\Delta x$ and velocity $p\Delta v$, with $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \dots, I+1\}$, where $(I+1)\Delta x = +2\omega$, and $p \in \{-P, \dots, P\}$.

– Firstly, we solve the free transport equation $(\partial_t + v\partial_x)F = 0$ starting from $F|_{n\Delta t} = F^n$. Of course, we treat a discrete version of the equation which casts as

$$F_{i,p}^{n+1/2} = F_{i,p}^n - \Delta t \mathbb{D}_{i,p} F^n$$

where \mathbb{D} is a discrete version of the advection operator $v\partial_x$. For instance, we can work with the upwind scheme which leads to

$$\mathbb{D}_{ip}F = \frac{p\Delta v}{\Delta x}(F_{i,p} - F_{i-1,p}) \quad \text{if } p > 0, \quad \mathbb{D}_{ip}F = \frac{p\Delta v}{\Delta x}(F_{i+1,p} - F_{i,p}) \quad \text{if } p < 0,$$

and $\mathbb{D}_{i0}F = 0$. The scheme is completed by using the incoming boundary condition for the fictitious points. The solution at time $(n+1)\Delta t$ defines the state $F^{n+1/2}$.

- Secondly, we solve the collision part $\partial_t F = \frac{1}{\tau}(M[F] - F)$ with initial data $F|_{n\Delta t} = F^{n+1/2}$. Actually, it reduces to a mere ODE since the macroscopic quantities do not change during this time step : since $\int_{\mathbb{R}}(1, v, |v|^2)F \, dv = \int_{\mathbb{R}}(1, v, |v|^2)F^{n+1/2} \, dv$, we have $M[F] = M[F^{n+1/2}]$ and therefore we end up with

$$F^{n+1} = (1 - e^{-\Delta t/\tau})M[F^{n+1/2}] + e^{-\Delta t/\tau}F^{n+1/2}.$$

Actually, we make use of the Strang version of this algorithm which is a straightforward extension intended to reach second order accuracy with respect to time.

Of course as the parameter τ becomes small the resolution of the kinetic equation becomes highly demanding in computational time since the simulation can produce relevant results capturing the microscopic effects only under the constraints $\Delta t, \Delta x \ll \tau$. Thus, when τ goes to 0 there is a clear advantage in using the hydrodynamic equations which furthermore work on a reduced set of variables (since we do not need to consider the velocity variable v). In what follows, the simulation of (7.28)–(7.29) by using the splitting scheme will serve to obtain a reference solution, at the price of a very long computational time, and validate our numerical treatment of the boundary conditions for the Euler system.

Now, let us explain the scheme for the Euler system (7.40). We introduce a regular subdivision

$$-\omega = x_0 < x_1 = -\omega + i\Delta x < \dots < x_i = -\omega + i\Delta x < \dots < x_{I+1} = (I+1)\Delta x = +\omega.$$

We denote $C_i = (-\omega + (i-1/2)\Delta x, -\omega + (i+1/2)\Delta x)$ to be the cell centered on x_i . Then \mathcal{U}_i^n is intended to be an approximation of $\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \mathcal{U}(n\Delta t, x) \, dx$, the mean value of $\mathcal{U}(n\Delta t, x)$ over the cell C_i . The definition of the scheme is deduced from the integration of (7.40) over the cell $(n\Delta t, (n+1)\Delta t) \times C_i$:

$$\begin{aligned} \int_{C_i} \mathcal{U}((n+1)\Delta t, x) \, dx - \int_{C_i} \mathcal{U}(n\Delta t, x) \, dx \\ + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(\mathcal{F}(\mathcal{U})(s, -\omega + (i+1/2)\Delta x) - \mathcal{F}(\mathcal{U})(s, -\omega + (i-1/2)\Delta x) \right) \, ds = 0 \end{aligned}$$

suggests

$$\mathcal{U}_i^{n+1} - \mathcal{U}_i^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n \right)$$

where $\mathcal{F}_{i+1/2}^n$ is an approximation of the flux on the interface $x = -\omega + (i+1/2)\Delta x$ on the time step. This approximation is obtained as a suitable function of the \mathcal{U}_k^{n+1} 's :

the simplest case, the numerical flux on the interface $x = -\omega + (i + 1/2)\Delta x$ is determined by the unknowns in the two neighboring cells

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^n = \mathbf{F}(\mathcal{U}_i^n, \mathcal{U}_{i+1}^n)$$

see [GR96, LeV02]. In what follows we work with Godunov fluxes (see e. g. [LeV02, Chapter 15]) for the interior cells which correspond to the cells with $i \in \{1, \dots, I\}$ since the scheme uses only 3 points, but of course more sophisticated schemes can be used. The question is now to define the boundary fluxes at the boundary in a way that accounts for the boundary layer analysis.

Actually, the question is two-fold. The first difficulty consists in performing the non linear boundary layer analysis and deriving the hydrodynamic boundary condition coming from (7.29) in the fluid regime. To our knowledge the theory is not developed as for the linearized problem, except certainly for scalar equations as discussed in [Vas10]. Next, the underlying half-space problems are usually not affordable for the numerical simulation since their resolution is at least as difficult as the original kinetic problem. Hence, we need an additional approximation procedure. The approach we propose is based on the linearized theory described above. It has the advantage of offering a neat framework and a natural way to determine the number and the nature of the needed boundary conditions for the hyperbolic system (7.40). The first attempt would be to use directly (7.39) as a boundary condition : as we shall see it could be valid as far as the solution of the kinetic equation remains close to the reference state $M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}$. But of course, using this boundary condition might be questionable since it relies on the non valid permutation of the linearization limit $\delta \rightarrow 0$ (vanishing fluctuation) and the small mean free path limit (hydrodynamic limit) $\tau \rightarrow 0$ in (7.24). Therefore, we will design numerical fluxes based on a local linearization, considering the values in the closest cells to the boundaries as the reference state. Let us describe how the numerical approximation works. In what follows we explain the construction of the numerical fluxes and details on the underlying formulae are given in the Appendix.

Linearized equations. Let us start by considering the linearized situation which assumes that the solution reads $\mathcal{U} = \mathcal{U}_* + \tilde{\mathcal{U}}$, where $\tilde{\mathcal{U}}$ is a “small” perturbation of the constant state \mathcal{U}_* . Therefore (7.32) can be considered as an approximation of the non linear equations (7.40). In particular, the number of necessary boundary conditions is entirely determined by the reference state \mathcal{U}_* and we shall distinguish the cases :

- $u_* - \sqrt{3\theta_*} > 0$: the signature σ_{U_*} is (3, 0) and we do need 3 incoming data at $x = -\omega$, and all fields are outgoing at $x = +\omega$,
- $u_* > 0 > u_* - \sqrt{3\theta_*}$: the signature σ_{U_*} is (2, 1) and we need to prescribe 2 incoming data at $x = -\omega$, only 1 at $x = +\omega$,
- $u_* + \sqrt{3\theta_*} > 0 > u_*$: the signature σ_{U_*} is (1, 2) and we need to prescribe 1 incoming data at $x = -\omega$, and 2 at $x = +\omega$,
- $u_* = \sqrt{3\theta_*}$, $u_* = 0$ and $u_* = -\sqrt{3\theta_*}$ correspond to degenerate cases where there exists a field which is characteristic at the boundary ; the signature σ_{U_*} is (2, 0), (1, 1) or (0, 2) respectively which means that 2 or 1 or 0 data are needed at $x = -\omega$ (respectively 0, or 1 or 2 at $x = +\omega$).

Let us focus on the non-degenerate cases. At the boundary, we shall write the flux as follows

$$\mathcal{F}_{\text{bd}} = \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} (1 + m_{\text{bd}}) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv,$$

with

$$M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(v) = \frac{\rho_*}{\sqrt{2\pi\theta_*}} \exp\left(-\frac{(v - u_*)^2}{2\theta_*}\right),$$

and

$$m_{\text{bd}}(v) = \frac{\rho_{\text{bd}}}{\rho_*} + u_{\text{bd}} \frac{v - u_*}{\theta_*} + \frac{\theta_{\text{bd}}}{2\theta_*} \left(\frac{(v - u_*)^2}{\theta_*} - 1\right)$$

an infinitesimal Maxwellian. Hence we seek a suitable definition of the triple $(\rho_{\text{bd}}, u_{\text{bd}}, \theta_{\text{bd}})$.

Let us introduce a few notation, restricting our discussion to the boundary $x = -\omega$ (the boundary $x = +\omega$ is treated in a similar way, changing the sign of the velocity variable and adapting the definition of the outgoing/incoming characteristics). Let $\bar{U} = (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{\theta})$ stand for the value of the hydrodynamic unknowns in the cell C_0 . We set

$$U_{\text{fluc}} = \bar{U} - U_* = (\rho_{\text{fluc}}, u_{\text{fluc}}, \theta_{\text{fluc}})$$

to which we associate the infinitesimal Maxwellian

$$m_{U_{\text{fluc}}}(v) = \frac{\rho_{\text{fluc}}}{\rho_*} + u_{\text{fluc}} \frac{v - u_*}{\theta_*} + \frac{\theta_{\text{fluc}}}{2\theta_*} \left(\frac{(v - u_*)^2}{\theta_*} - 1\right).$$

Remind that we can work with a suitable basis

$$\begin{aligned} \chi_1(v) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sqrt{3} \frac{v - u_*}{\sqrt{\theta_*}} + \frac{|v - u_*|^2}{\theta_*} \right), \\ \chi_0(v) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{|v - u_*|^2}{\theta_*} - 3 \right), \\ \chi_2(v) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sqrt{3} \frac{v - u_*}{\sqrt{\theta_*}} - \frac{|v - u_*|^2}{\theta_*} \right), \end{aligned} \tag{7.41}$$

of $\text{Ker}(L_{M_{U_*}})$, which is orthogonal for the quadratic form

$$\mathbf{Q} : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} v |f|^2 M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv,$$

and we split this subspace according to the signature of the quadratic form \mathbf{Q} : it defines the subspaces Λ^\pm (Λ^0 being reduced to $\{0\}$ in the non-degenerate cases). Now, to define m_{bd} , we proceed as follows.

– Firtsly, we associate to $m_{U_{\text{fluc}}}$ its projection on Λ^- :

$$m_-(v) = \sum_{k \in I^-} \alpha_k \chi_k, \quad \alpha_k = \frac{\int_{\mathbb{R}} v m_{U_{\text{fluc}}} \chi_k M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv}{\int_{\mathbb{R}} v |\chi_k|^2 M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv}.$$

- Secondly, we define m_+ as to be an infinitesimal Maxwellian with fluxes imposed by the half-space problem (7.37)-(7.38), with $\Upsilon^{\text{data}} = \Psi^{\text{data,L}} - m_-$, where we remind that $\Psi^{\text{data,L}} = \Phi^{\text{data,L}}/M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} - 1$. Of course, the resolution of the half-space problem is usually not affordable and we shall use an approximation device. Integrating the half space problem (7.37) over the velocity variable, we obtain

$$\frac{d}{dz} \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} G(z, v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(v) dv = 0. \quad (7.42)$$

By using the incoming boundary condition and (7.38) it follows that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} G(0, v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv &= \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} G(\infty, v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv = 0 \\ &= \int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} \Upsilon^{\text{data}}(v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv + \int_{v<0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} \gamma^{\text{out}} G(0, v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv. \end{aligned}$$

Then, we make an approximation which has been already proposed by Maxwell [Max79]. It is related to the Marshak approximation [Mar47] introduced in radiative transfer and it is precisely discussed for gas dynamics in [AG97], see also [GK95a, Gol89]. We suppose that the outgoing distribution coincides with the distribution at infinity : $\gamma^{\text{out}} G(0, v) = G(\infty, v) = 0$. Hence we determine the coefficients of m_+ in the basis $\{\chi_k, k \in I^+\}$ by equating the incoming fluxes

$$\int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} (\Psi^{\text{data}} - m_-)(v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv - \int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} m_+(v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv = 0.$$

Except in the case $\#I^+ = \#\Lambda^+ = 3$ this system is overdetermined. Therefore instead we solve the optimization problem

$$m_+ = \inf_{\sum_{k \in I^+} \alpha_k \chi_k \in \Lambda^+} \left| \int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} (\Psi^{\text{data}} - m_-)(v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv - \int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} m_+(v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv \right|^2. \quad (7.43)$$

It can be recast in matrix formulation

$$\min_{B^+ \alpha = 0} |A\alpha - b^{\text{data}}|^2,$$

where the coefficients of the 3×3 matrix A only depend on the reference state (ρ_*, u_*, θ_*) and the coefficients of $b^{\text{data}} \in \mathbb{R}^3$ depend on (ρ_*, u_*, θ_*) , Ψ^{data} and m_- , while B^+ , having $n_+ \in \{0, \dots, 3\}$ rows and 3 columns, is associated to the constraint

$m^+ \in \Lambda^+$ and only depends on (ρ_*, u_*, θ_*) (see formulae in the Appendix). The solution is obtained by solving the linear system

$$\begin{pmatrix} A^T A & B^{+T} \\ B^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T b^{\text{data}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

with $\lambda \in \mathbb{R}^{I^+}$ the Lagrange multiplier associated to the constraint $\alpha \in \text{Ker}(B^+)$.

– Eventually, we define the needed Maxwellian by

$$m_{\text{bd}} = m_+ + m_-.$$

Clearly if the signature of \mathbf{Q} is $(3, 0)$ (resp. $(0, 3)$), then $m_- = 0$ since $I^- = \emptyset$ (resp. $m_- = m_{U_{\text{fluc}}}$ since $I^+ = \emptyset$).

Remark 7.4.12 *Instead of solving the minimization problem, another possibility is simply to pick as many relations as needed among the three fluxes identities. This is the definition proposed in [AG97, GK95a].*

This linearized approach produces satisfying results, but its applicability remains very limited. Indeed, starting from a given state, due to the incoming boundary condition, the solution of the BGK equation might be conducted far away from the reference state. In particular it might happen that, next to the boundary, the flow changes type, with modification of the number of incoming/outgoing characteristics. The fully linearized approach — that will be referred to as the global linearization — is not able to capture such phenomena and therefore produces wrong results as time becomes large (see Figures 7.3 and 7.4).

Local linearization. Nevertheless, we can adapt the ideas by reasoning locally. Knowing the numerical approximation $U^n = (\rho^n, u^n, \theta^n)$, we use as reference state $U_\star = U_1^n$ the value of the unknown in C_1 , the first internal cell of the computational domain. Then we consider the unknown in the boundary cell as a perturbation of the reference state : we write $U_0^n = U_\star + U_{\text{fluc}}$. Now, we construct the boundary fluxes by repeating the strategy detailed above. The noticeable point is that now all the coefficients of A , b^{data} , B^+ arising from (7.43) need to be updated at each time step. It thus requires the evaluation of several integrals, which has a non negligible computational cost (but of course, it still remains far less costly than the computation of the kinetic equation!). By the way, we notice that the evaluation of these integrals should be performed with enough accuracy, a basic requirement being to preserve the constant solutions when the initial data and boundary condition coincide with the reference state $F^{\text{Init}} = \Psi^{\text{data}} = M_\star$ (the simulations presented here are obtained using the fourth order Simpson rule). Figures 7.3 compare the results of a kinetic simulation to the simulation of the hydrodynamic system with both the linearized and the localized approaches.

In the simulation $(\rho^{\text{Init}}, u^{\text{Init}}, \theta^{\text{Init}}) = (\rho_\star, u_\star, \theta_\star) = (1, 0.1, 1)$ such that σ_{U_\star} is $(2, 1)$. At the boundary we choose $\Phi^{\text{data}} = 0$ and $t = 0.1$ as final time. As for section 4, we take $\Delta x_{\text{hydro}} = \Delta x_{\text{kin}} = 1/1500$ and Δt is determined by the CFL condition. Moreover the computation of the integrals respect to v are performed with regularly spaced nodes on the domain $[-16, 16]$. Finally we work with $\tau = 10^{-3}$.

It shows that the localized approach noticeably improves the hydrodynamic approximation. Figure 7.4 gives the evolution in time of the eigenvalues for the same test case of figure 7.3. Clearly at the beginning we have as signature $\sigma_{U_\star} = (2, 1)$ and after a short time, this signature becomes $(0, 3)$ for the right boundary and $(3, 0)$ for the left one. This explain why the local linearization is better : the globally linearized scheme works well for short times but it is not able to adapt to the change of type (sub/supersonic) induced by the boundary conditions.

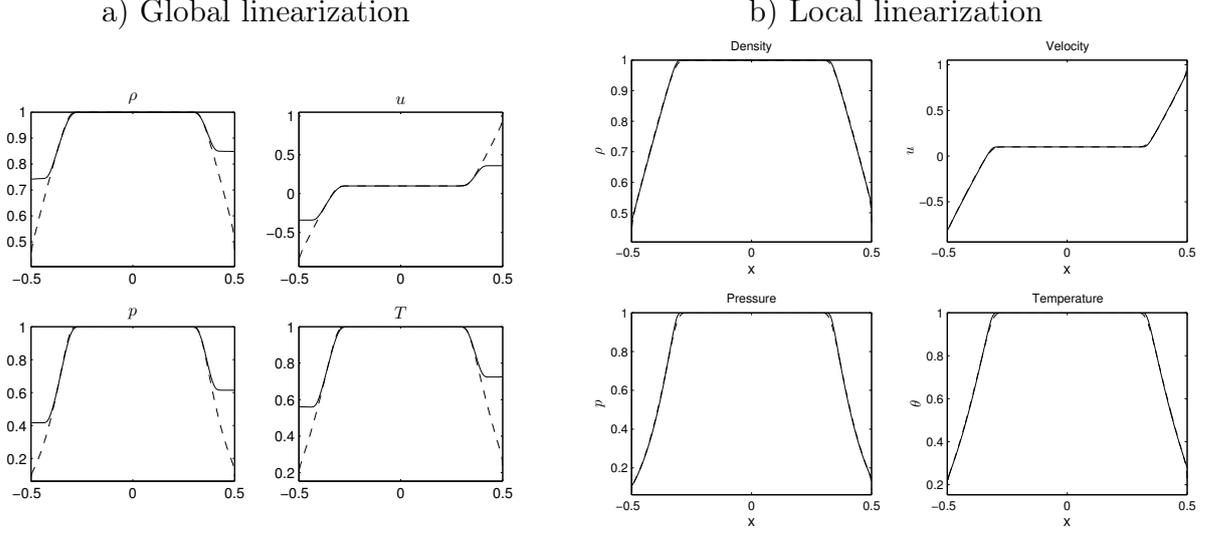


FIG. 7.3 – Local linearization vs. global linearization in the case $(\rho_\star, u_\star, \theta_\star) = (1, 0.1, 1)$, $\Phi^{\text{data}} = 0$ in (7.18), final time $t = 0.1$. Dashed line : kinetic simulation, solid line : hydrodynamic simulation.

The degenerate case $u_\star = 0$. Let us explain how the previous machinery is modified in the specific degenerate case $u_\star = 0$ which yields $\sigma_{U_\star} = (1, 1)$. The starting point consists in remarking that $v\chi_0(v) = \frac{1}{\sqrt{6}}v\left(\frac{|v|^2}{\theta_\star} - 3\right)$ is orthogonal to $\text{Ker}(L_{U_\star})$ since

$$\int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} v \left(\frac{|v|^2}{\theta_\star} - 3 \right) M_{(\rho_\star, 0, \theta_\star)} dv = 0.$$

Therefore, since $(\text{Ker}(L_{U_\star}))^\perp = \text{Ran}(L_{U_\star})$, we can (uniquely) define the auxiliary function λ verifying

$$L_{U_\star}\lambda = v\chi_0, \text{ with } \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} \lambda M_{(\rho_\star, 0, \theta_\star)} dv = 0.$$

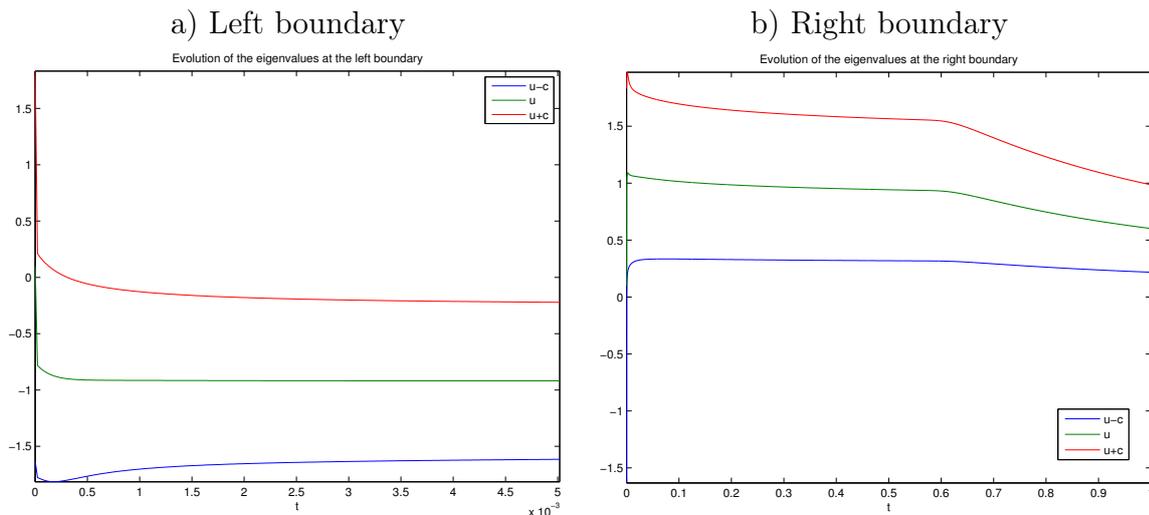


FIG. 7.4 – Evolution of the eigenvalues on right and left boundaries for the simulation of figure. 7.3

For the BGK operator, we simply have

$$\lambda(v) = -\frac{1}{\sqrt{6}}v\left(\frac{|v|^2}{\theta_\star} - 3\right) = -v\chi_0(v).$$

Then, we observe that the solution of the half-space problem satisfies

$$\frac{d}{dz} \int_{\mathbb{R}} v\lambda(v) G(z, v) M_{(\rho_\star, 0, \theta_\star)}(v) dv = \frac{1}{\sqrt{6}} \int_{\mathbb{R}} v\left(\frac{|v|^2}{\theta_\star} - 3\right) G(z, v) M_{(\rho_\star, 0, \theta_\star)}(v) dv = K_0$$

which does not depend on z since we bear in mind that (7.42) holds. Hence, if G is a bounded solution of the half-space problem, it imposes an additional conservation law : $K_0 = 0$ that is

$$\int_{\mathbb{R}} v\left(\frac{|v|^2}{\theta_\star} - 3\right) G(z, v) M_{(\rho_\star, 0, \theta_\star)}(v) dv = 0, \quad (7.45)$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} v\lambda(v) G(z, v) M_{(\rho_\star, 0, \theta_\star)}(v) dv = K \quad (\text{constant independent on } z).$$

But we do not have any knowledge of the very value of the constant K ; this is the reason why we use a two steps method : the first step provides an evaluation of K , which in turn can be used to define the asymptotic state. Having defined m_- as before, we construct $m_+ = \sum_{k \in I^0 \cup I^+} \alpha_k \chi_k$ by taking into account this information. We follow the method presented in [Gol89, GK95a] : it relies on a simple iteration argument, but it can be interpreted as the result of a variational problem. It is convenient to set $\tilde{G}(z, v) = G(z, v) + m_+$ which thus verifies the half space problem

$$\begin{cases} v\partial_z \tilde{G} = L_{U_\star} \tilde{G}, \\ \gamma^{\text{inc}} \tilde{G}(0, v) = \Psi^{\text{data}, L}(v) - m_-(v) \quad \text{for } v > 0, \end{cases}$$

and, as detailed in Theorem 7.4.10, $m_+ \in \Lambda^+ \cup \Lambda^0$ is the equilibrium state at infinity

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{G}(z, v) = m_+(v) = \alpha_0 \chi_0(v) + \alpha_2 \chi_2(v)$$

that we seek.

The first step consists in using the Maxwell approximation to find a preliminary guess for m_+ . We have

$$\int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} \tilde{G}(z, v) M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv = \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} m_+(v) M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv.$$

We assume that the outgoing trace coincides with the distribution at infinity. The obtained system is overdetermined since it contains 3 equations while we search for the two components of m_+ in the basis (χ_0, χ_2) . Hence, we pick two relations among the system and we define $\tilde{m}_+ = \tilde{\alpha}_0 \chi_0(v) + \tilde{\alpha}_2 \chi_2(v)$ as to be the solution of

$$\int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ |v|^2 \end{pmatrix} (\Psi^{\text{data,L}} - m_-) M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv = \int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ |v|^2 \end{pmatrix} \tilde{m}_+ M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv.$$

Note that it is useless to use (7.45) as a constraint for defining m_+ since (7.45) is satisfied by any infinitesimal Maxwellian (see below). For the second step, we use \tilde{m}_+ as the outgoing distribution to evaluate the two following conserved quantities

$$\int_{v>0} v \begin{pmatrix} \lambda(v) \\ v \end{pmatrix} (\Psi^{\text{data,L}} - m_-) M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv + \int_{v<0} v \begin{pmatrix} \lambda(v) \\ v \end{pmatrix} \tilde{m}_+ M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv = \begin{pmatrix} \tilde{K} \\ \tilde{K}' \end{pmatrix}.$$

Having these quantities at hand, we define $m_+(v) = \alpha_0 \chi_0(v) + \alpha_2 \chi_2(v)$ as the solution of

$$\int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} \lambda(v) \\ v \end{pmatrix} m_+(v) M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv = \begin{pmatrix} \tilde{K} \\ \tilde{K}' \end{pmatrix}.$$

As a matter of fact, we remark that this construction is consistent with (7.45). Indeed, on the one hand, the asymptotic state m_+ fulfills the constraint

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{v}{\sqrt{6}} \left(\frac{|v|^2}{\theta_*} - 3 \right) m_+ M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv &= \int_{\mathbb{R}} v \chi_0 (\alpha_0 \chi_0 + \alpha_2 \chi_2) M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv \\ &= \alpha_0 \int_{\mathbb{R}} v |\chi_0|^2 M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv + \alpha_2 \int_{\mathbb{R}} v \chi_0 \chi_2 M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv = 0 \end{aligned}$$

by definition of χ_0 and χ_2 . On the other hand at the boundary we have

$$\begin{aligned} \int_{v>0} \frac{v}{\sqrt{6}} \left(\frac{|v|^2}{\theta_*} - 3 \right) (\Psi^{\text{data,L}} - m_-) M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv &+ \int_{v<0} \frac{v}{\sqrt{6}} \left(\frac{|v|^2}{\theta_*} - 3 \right) \tilde{m}_+ M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv \\ &= \int_{v>0} \frac{v}{\sqrt{6}} \left(\frac{|v|^2}{\theta_*} - 3 \right) (\Psi^{\text{data,L}} - m_-) M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv \\ &\quad - \int_{v>0} \frac{v}{\sqrt{6}} \left(\frac{|v|^2}{\theta_*} - 3 \right) \tilde{m}_+ M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv + \int_{\mathbb{R}} \frac{v}{\sqrt{6}} \left(\frac{|v|^2}{\theta_*} - 3 \right) \tilde{m}_+ M_{(\rho_*, 0, \theta_*)}(v) dv = 0 \end{aligned}$$

by using the definition of \tilde{m}_+ .

Here we have detailed the computations for the left hand boundary $x = -\omega$. The right hand boundary $x = +\omega$ is of course treated analogously, except that integration over $v \in (0, +\infty)$ (resp. $v \in (-\infty, 0)$) is replaced by integration over $v \in (-\infty, 0)$ (resp. $v \in (0, +\infty)$).

Remark 7.4.13 *The treatment of the boundary condition differs from those presented by S. Dellacherie [Del03, Del10]. There, the idea can be summarized as follows :*

- *Firstly we define hydrodynamic quantities $(\rho_{\text{gh}}, u_{\text{gh}}, \theta_{\text{gh}})$ in a ghost cell by solving*

$$\int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} M_{(\rho_{\text{gh}}, u_{\text{gh}}, \theta_{\text{gh}})} dv = \int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} \Phi^{\text{data,L}} dv.$$

Namely, we consider the Maxwellian having the same outgoing fluxes as the data. A first attempt would be to use these values as Dirichlet conditions, but a better approach is proposed.

- *Secondly, the flux at the interface between the ghost cell and the computational domain is determined by using a kinetic scheme, as introduced in [Per92, Per02], see also [BLTPQ94] : we set*

$$\mathcal{F}_{1/2}^n = \int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} M_{(\rho_{\text{gh}}, u_{\text{gh}}, \theta_{\text{gh}})} dv + \int_{v<0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} M_{(\rho_1^n, u_1^n, \theta_1^n)} dv.$$

Consequently, owing to the specific definition of the numerical fluxes, we do not have to solve the nonlinear system in step 1, we simply use the relation

$$\mathcal{F}_{1/2}^n = \int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} \Phi^{\text{data,L}} dv + \int_{v<0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} M_{(\rho_1^n, u_1^n, \theta_1^n)} dv.$$

This definition is very natural in the framework adopted in [Del03] where the resolution of the Euler system is precisely based on the use of a kinetic scheme. The definition of the numerical fluxes can be interpreted as a relevant version of the Enquist-Osher scheme [EO81] and [Per02, Chap. 6 & 8]. As crude as it might appear this definition of boundary fluxes is quite performing.

Remark 7.4.14 *The discussion of Knudsen layers and their numerical treatment is strongly related to the question of finding relevant matching condition between the kinetic equation and the hydrodynamic systems in a domain decomposition approach. This issue is discussed in details, with various numerical approaches, in [AG97, Del03, Del10, Gol97a, Gol92, Gol89, GK95a, Kla96, BLTPQ94]. The mathematical analysis of such matching condition is highly delicate, and we refer to the breakthrough of A. Vasseur concerning nonlinear scalar conservation laws [Vas10]. We shall go back to this problem elsewhere and we will also consider the effect of a coupling with an electric potential [BDG⁺10]. We*

also point out that our approach can be improved by using a more involved approximation of the half-space problem, while here the computations are simply based on the Maxwell approximation : the iterative procedure described in [GK95a] looks quite appealing for this purpose. This refinement will be explored elsewhere.

Reflection boundary conditions. It is relevant to consider generalized boundary conditions where the incoming distribution of particles depends on the outgoing distribution : such boundary condition is intended to describe the complex interaction between the impinging particles and the boundary. The simplest case corresponds to the specular reflection law

$$\gamma^{\text{inc}} F(t, x = -\omega, v) = \alpha \gamma^{\text{out}} F(t, x = -\omega, -v) \quad \text{for } v > 0,$$

where $0 \leq \alpha \leq 1$, but it is certainly too crude to model realistic boundary phenomena. More generally, the boundary condition is defined through a non-local relation

$$\gamma^{\text{inc}} F(t, -\omega, v) = \alpha \int_{v' < 0} k(v, v') \gamma^{\text{out}} F(t, -\omega, v') |v'| dv' = \mathcal{R}(\gamma^{\text{out}} F(t, -\omega, \cdot))(v) \quad \text{for } v > 0$$

where all the physics is embodied in the kernel k and the coefficient $0 \leq \alpha \leq 1$. We refer for the derivation of boundary kernels and comments to [Cer88, Cer90, DG66, Kus78, Gou97a, Gou97b]. It is natural to require :

$$\begin{aligned} \text{non-negativity :} & \quad k(v, v') \geq 0, \\ \text{mass conservation :} & \quad \int_{v > 0} k(v, v') v dv = 1, \\ \text{reciprocity principle :} & \quad \text{there exists a Maxwellian } M_w \text{ verifying} \\ & \quad M_w(v) = \int_{v' < 0} k(v, v') M_w(v') |v'| dv'. \end{aligned}$$

The specular law corresponds to the case where k is the Dirac mass $\delta(v' = -v)$. A more relevant example of such a boundary condition is the Maxwell law where

$$k(v, v') = \frac{M_w(v)}{Z_w}, \quad M_w(v) = \frac{\rho_w}{\sqrt{2\pi\theta_w}} e^{-|v|^2/(2\theta_w)}, \quad Z_w = \int_{v > 0} v M_w(v) dv.$$

In other words, the particles are reflected according to the Maxwellian distribution $M_w(v)$, proportionally to the outgoing mass flux :

$$\gamma^{\text{inc}} F(t, -\omega, v) = \alpha \frac{M_w(v)}{Z_w} \int_{v' < 0} \gamma^{\text{out}} F(t, -\omega, v') |v'| dv' \quad \text{for } v > 0. \quad (7.46)$$

Remark that such a boundary condition can be derived from the simple specular reflection law through an homogenization analysis [Bab87]. The parameter α is the so-called accommodation coefficient and it defines the fraction of reflected particles. Indeed, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v F(t, -\omega, v) dv &= \int_0^\infty v \gamma^{\text{inc}} F(t, -\omega, v) dv + \int_{-\infty}^0 v \gamma^{\text{out}} F(t, -\omega, v) dv \\ &= (1 - \alpha) \int_{-\infty}^0 v \gamma^{\text{out}} F(t, -\omega, v) dv \leq 0. \end{aligned}$$

In particular, when $\alpha = 1$ the mass flux vanishes.

The method described above can be adapted to treat these boundary conditions. Again, we restrict our purpose to the boundary $x = -\omega$. We obtain the following boundary condition for the half-space problem

$$M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} \gamma^{\text{inc}} G(0, v) = \mathcal{R}(M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(1 + m)) - M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(1 + m) + \mathcal{R}(M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} \gamma^{\text{out}} G(0, v)) \quad \text{for } v > 0, \quad (7.47)$$

where we use the shorthand notation $\mathcal{R} : L^1(v < 0, |v| dv) \rightarrow L^1(v > 0, |v| dv)$ to denote the reflection operator. We detail in the Appendix the precise form of the linear systems to be solved for defining the boundary flux in this case. Note however that the specular reflection law (partial or total) is excluded from the boundary layer analysis in [CGS88a], while the diffuse condition can be considered (see Section 2 and Theorem 2.1.1 in [CGS88a]).

In the specific case of a totally reflexive boundary condition, $\alpha = 1$, it is worth taking into account the mass conservation : we add to the constraints which define the matrix B^+ in (7.44) the fact that the mass flux vanishes. Indeed, when $\alpha = 1$, by combining (7.38) and (7.42) we observe that

$$\int_{\mathbb{R}} v G(0, v) dv = 0.$$

Therefore, integrating (7.47) yields

$$\begin{aligned} \int_{v>0} v \left(\mathcal{R}(M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(1 + m)) - M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(1 + m) \right) dv &= 0 \\ &= \int_{v<0} |v| M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(1 + m)(v) dv - \int_{v>0} v M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(1 + m)(v) dv. \end{aligned}$$

We remind that m splits as $m_- + m_+$ and we arrive at the constraint

$$\int_{\mathbb{R}} v m_+ M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv = - \int_{\mathbb{R}} v (1 + m_-) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv$$

to be satisfied by the asymptotic state m_+ . It simply means that the numerical mass flux is set to 0.

Remark 7.4.15 *For the specular reflection and $\alpha = 1$, both the mass and energy fluxes vanish ; in this very specific case the boundary condition for the hydrodynamic system are simply the wall condition that corresponds to use a ghost cell and to reverse the velocity in the ghost cell while keeping the same density and temperature.*

7.4.3 Numerical results

A relevant test case corresponds to the simulation of evaporation-condensation phenomena. The problem is presented in great details in works of Y. Sone and K. Aoki

[[Son02](#), [SOA89](#), [AM94](#)], we also refer to the survey [[BGS06](#)]. The incoming data are given by two Maxwellians with different macroscopic quantities

$$\Phi^{\text{data,L}} = \frac{\rho_w^L}{\sqrt{2\pi\theta_w^L}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2\theta_w^L}\right), \quad \Phi^{\text{data,R}} = \frac{\rho_w^R}{\sqrt{2\pi\theta_w^R}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2\theta_w^R}\right). \quad (7.48)$$

where ρ_w^L, θ_w^L can differ from ρ_w^R, θ_w^R . We start either from a constant state $(\rho^{\text{Init}}, u^{\text{Init}}, \theta^{\text{Init}})$ which can be not in equilibrium with the incoming data or from a discontinuous profile. For the kinetic equation the initial data is the Maxwellian defined by these macroscopic quantities.

Of course, the basic requirement is that the code preserves the equilibrium : for $(\rho^{\text{Init}}, u^{\text{Init}}, \theta^{\text{Init}}) = (\rho_w^L, 0, \theta_w^L) = (\rho_w^R, 0, \theta_w^R)$ the solution remains constant. We check that it is indeed the case, the error being governed by the accuracy of the computation of the integrals arising in (7.43). The same conclusion applies if the reference velocity does not vanish. We do not present a specific figure but an evidence of the ability of the scheme in preserving equilibrium can be seen in the far right hand side of Figures 7.5, 7.6 and 7.7 : the data at $x = +\omega$ coincides with the initial Maxwellian and we stop the simulation at a short time so that the perturbation arising from the boundary $x = -\omega$ has not crossed the domain.

In Figures 7.5, 7.6 and 7.7, we compare the results of the kinetic simulation to the hydrodynamic simulation for $(\rho_w^R, u_w^R, \theta_w^R) = (\rho^{\text{Init}}, u^{\text{Init}}, \theta^{\text{Init}}) = (1, 0, 0.5)$ and for several values of $(\rho_w^L, \theta_w^L) \neq (\rho^{\text{Init}}, \theta^{\text{Init}})$. The computational parameters are

$$\Delta x_{\text{hydro}} = 1/1500$$

and Δt is determined by the CFL condition. The computation of the integrals with respect to the v variable are performed using the Simpson approximation rule with regularly spaced nodes in the domain $[-16, +16]$. For the kinetic simulations we work with the scaled mean free path $\tau = 1/1000$ and

$$\Delta x_{\text{kin}} = 1/1500$$

in order to resolve the fine scales. We observe a remarkable agreement between the microscopic and the macroscopic simulations ; the definition of the numerical fluxes is able to capture the boundary phenomena issued from the kinetic model. We point out that the kinetic model produces inherently diffusion terms, typically of size $\mathcal{O}(\tau)$: for long time simulation this effect would become sensible and it would become more realistic for such a value of τ to compare with the Navier-Stokes equations, having $\mathcal{O}(\tau)$ viscous terms. Performing simulations with smaller τ 's requires a considerable numerical effort as it has been done in [[AM94](#), [Son02](#), [SOA89](#)]. These effects are also visible as the density ratio increases : in Figure 7.7 the discrepancies between kinetic and hydrodynamic models appear essentially in smoother profiles for the temperature and the velocity produced by the microscopic simulation. In Figure 7.8 we show the results of the simulation of the hydrodynamic system for long times. The solution reaches a stationary state, which is entirely determined by the boundary data, in agreement with the observation and analysis in [[AM94](#), [Son02](#), [SOA89](#)]. (Note that these references deal with the case $v \in \mathbb{R}^3$ so that it does not make sense to compare directly the asymptotic values.)

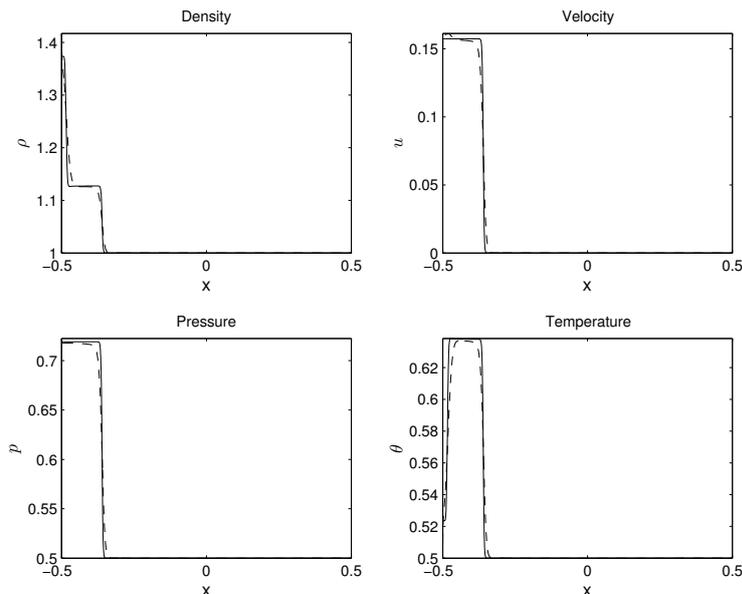


FIG. 7.5 – Evaporation-condensation problem : kinetic simulation (dashed line) vs. the hydrodynamic simulation (solid line) for $\rho_w^L = 2/1.2$, $\theta_w^L = 1.2/2$, and a final time $t = 0.1$.

Figures 7.9, 7.10, 7.11 are concerned with examples of a diffusive reflection law. Simulations are done with $(\rho^{\text{Init}}, u^{\text{Init}}, \theta^{\text{Init}}) = (1, 0.1, 1)$, $\alpha = 0.5$, $\rho_w^L = \rho_w^R = 1$, $\theta_w^L = \theta_w^R = 1$ and a final time $t = 0.1$ for figure 7.9. In figure 7.10 the differences are uniquely that $u^{\text{Init}} = -0.1$ and $\theta_w^R = 0.5$. Finally figure 7.11 corresponds to the same case as figure 7.10 but with $\theta_w^L = 0.5$, $\theta_w^R = 1$ and $\alpha = 1$. Again, we point out that the scheme preserves the equilibrium solution. Note also that the velocity vanishes at the boundary for the reflection coefficient equal to one, and, the construction of the numerical fluxes does its job.

Appendix A – Details on the construction of the boundary fluxes

Let us consider a general boundary condition at $x = -\omega$ which combines a given source to the reflection of particles as follows

$$\gamma^{\text{inc}} F(t, -\omega, v) = \Phi^{\text{data,L}}(t, v) + \mathcal{R}(\gamma^{\text{out}} F(t, -\omega, \cdot))(v), \quad \text{for } v > 0.$$

Let us describe the construction of the numerical boundary fluxes that we propose for the hydrodynamic equations, restricting the discussion to the boundary $x = -\omega$.

We have at hand the numerical approximation \mathcal{U}_i^n , $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \dots, I+1\}$. As explained above, the evolution of the discrete unknowns is governed by a finite volume scheme, here using Godunov's definition for the internal fluxes. In the boundary cell C_0 , the evolution is driven by

$$\mathcal{U}_0^{n+1} = \mathcal{U}_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{1/2}^n - \mathcal{F}_{\text{bd}}^n)$$

where $\mathcal{F}_{1/2}^n$ is the standard Godunov flux between the cell C_0 and the cell C_1 and we are going to detail the construction of the boundary flux $\mathcal{F}_{\text{bd}}^n$. The reference state $(\rho_\star, u_\star, \theta_\star)$ is therefore defined by the density, velocity and temperature associated to $\mathcal{U}_1^n = \mathcal{U}_\star$.

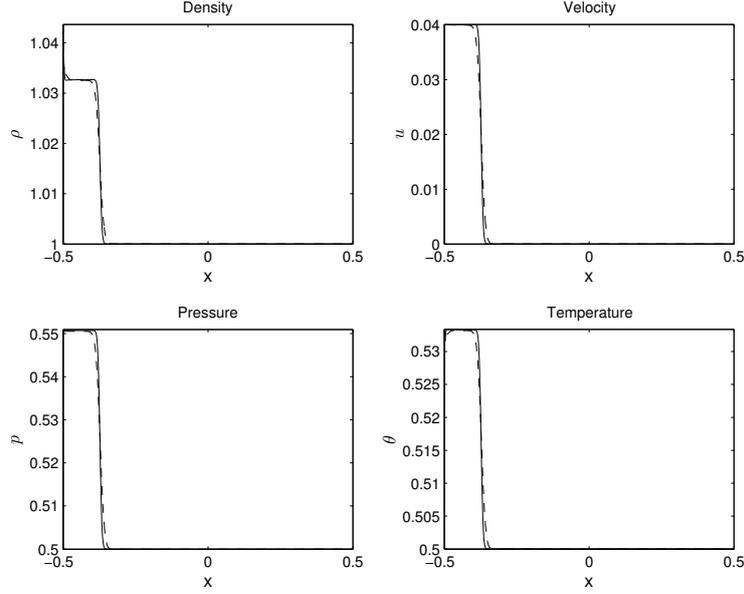


FIG. 7.6 – Evaporation-condensation problem : kinetic simulation (dashed line) vs. the hydrodynamic simulation (solid line) for $\rho_w^L = 1.2/1.1$, $\theta_w^L = 1.1/2$ and a final time $t = 0.1$.

We consider the value of the numerical unknown in the cell C_0 as a fluctuation from the reference state, defining $U_{\text{fluc}} = (\rho_{\text{fluc}}, u_{\text{fluc}}, \theta_{\text{fluc}}) = U_1^n - U_0^n$. The strategy is to define the numerical fluxes by the formula

$$\mathcal{F}_{\text{bd}}^n = \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} (1 + m_{\text{bd}}) dv$$

with the decomposition $m_{\text{bd}} = m_+ + m_-$. The infinitesimal Maxwellian

$$m_- = \frac{\rho_-}{\rho_*} + \frac{v - u_*}{\theta_*} u_- + \frac{\theta_-}{2\theta_*} \left(\frac{(v - u_*)^2}{2\theta_*} - 1 \right) = \sum_{k \in I^-} \alpha_{-,k} \chi_k$$

is the projection on $\Lambda^- = \text{Span}\{\chi_k, k \in I^-\}$ of

$$m_{\text{fluc}} = \frac{\rho_{\text{fluc}}}{\rho_*} + \frac{v - u_*}{\theta_*} u_{\text{fluc}} + \frac{\theta_{\text{fluc}}}{2\theta_*} \left(\frac{(v - u_*)^2}{2\theta_*} - 1 \right).$$

Namely, the coefficients $\alpha_{-,k}$ are given by

$$\alpha_{-,k} = \frac{\int_{\mathbb{R}} v m_{\text{fluc}} \chi_k M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv}{\int_{\mathbb{R}} v |\chi_k|^2 M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv}$$

and the macroscopic quantities are obtained with

$$\begin{pmatrix} \rho_- \\ \rho_* u_- \\ \rho_* \theta_- \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} m_- M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv - \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_- u_* \\ -\rho_- u_*^2 - 2\rho_* u_* u_- - \rho_- \theta_* \end{pmatrix}.$$

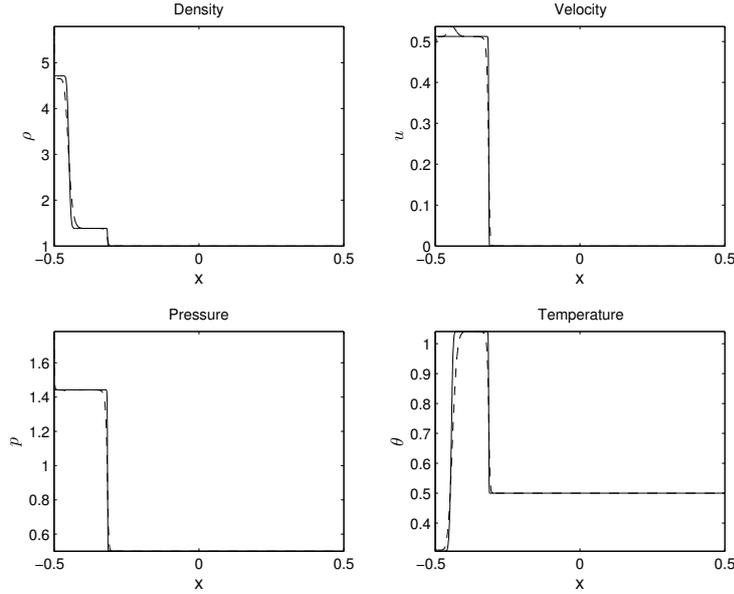


FIG. 7.7 – Evaporation-condensation problem : kinetic simulation (dashed line) vs. the hydrodynamic simulation (solid line) for $\rho_w^L = 10/1.1$, $\theta_w^L = 1.1/2$ and a final time $t = 0.1$.

We now need to define the infinitesimal Maxwellian

$$m_+(v) = \frac{\rho_+}{\rho_*} + \frac{v - u_*}{\theta_*} u_+ + \frac{\theta_+}{2\theta_*} \left(\frac{(v - u_*)^2}{2\theta_*} - 1 \right) = \sum_{k \in I^+} \alpha_{+,k} \chi_k \in \Lambda^+.$$

The boundary condition for the half space problem is obtained with the approximation $F(t, x, v) \simeq M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(1 + m_{\text{bd}}(v) + G^L(t, (x + \omega)/\tau, v))$ next to the boundary $x = -\omega$. We are led to

$$M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(1 + m_{\text{bd}} + \gamma^{\text{inc}} G^L)(t, 0, v) = \Phi^{\text{data,L}}(t, v) + \mathcal{R}(M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(1 + m_{\text{bd}} + \gamma^{\text{out}} G^L))(t, 0, v),$$

for $v > 0$. The conservation laws impose

$$\int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} G^L(t, 0, v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} G^L(t, z, v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv = 0,$$

which therefore recasts as

$$\int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} \left[\frac{\Phi^{\text{data,L}} + \mathcal{R}(M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}(1 + m_{\text{bd}} + \gamma^{\text{out}} G^L))}{M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}} - (1 + m_{\text{bd}}) \right] (t, 0, v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv \\ + \int_{v<0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} \gamma^{\text{out}} G^L(t, 0, v) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv = 0.$$

We define m_+ by

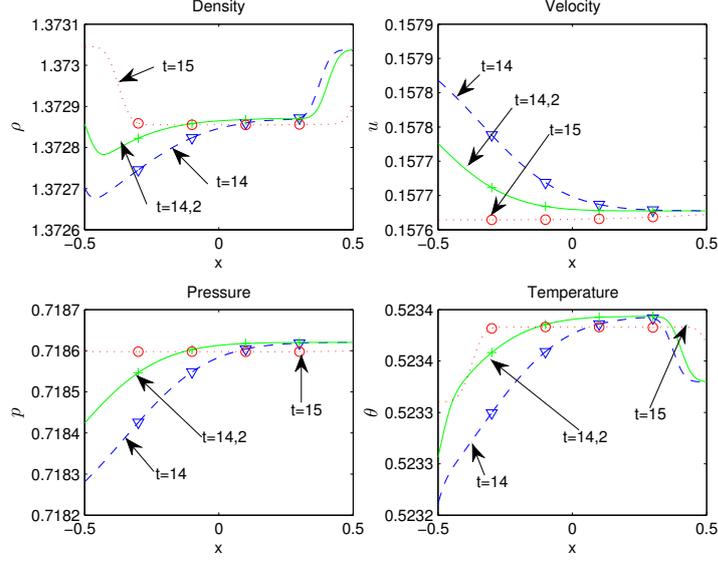


FIG. 7.8 – Evaporation-condensation problem and convergence towards a stationary state : long time behaviour for the hydrodynamic simulation for $\rho_w^L = 2/1.2$, $\theta_w^L = 1.2/2$ and a final time $t = 15$.

- using the Maxwell approximation, which consists in approximating the outgoing distribution $\gamma^{\text{out}} G^L$ by its asymptotic state, that is 0,
- minimizing the obtained system under the constraints associated to the fact that m_+ is searched for in the subspace Λ^+ .

Let us define the matrix A such that

$$A \begin{pmatrix} \rho_+ \\ u_+ \\ \theta_+ \end{pmatrix} = \int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} \left[m_+ - \frac{\mathcal{R}(M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} m_+)}{M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}} \right] M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv.$$

For $\mathcal{R} = 0$, we simply have

$$\begin{aligned} A_{k1} &= \frac{1}{\rho_*} \int_{v>0} v^k M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv, \\ A_{k2} &= \frac{1}{\theta_*} \int_{v>0} v^k (v - u_*) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv, \\ A_{k3} &= \frac{1}{2\theta_*} \int_{v>0} v^k \left(\frac{(v - u_*)^2}{\theta_*} - 1 \right) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv. \end{aligned}$$

We also set

$$b^{\text{data}} = \int_{v>0} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} \left[\frac{\mathcal{R}(M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}) + \Phi^{\text{data}, L}}{M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}} - 1 + \frac{\mathcal{R}(M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} m_-)}{M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)}} - m_- \right] M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv$$

We are thus led to consider the following cases :

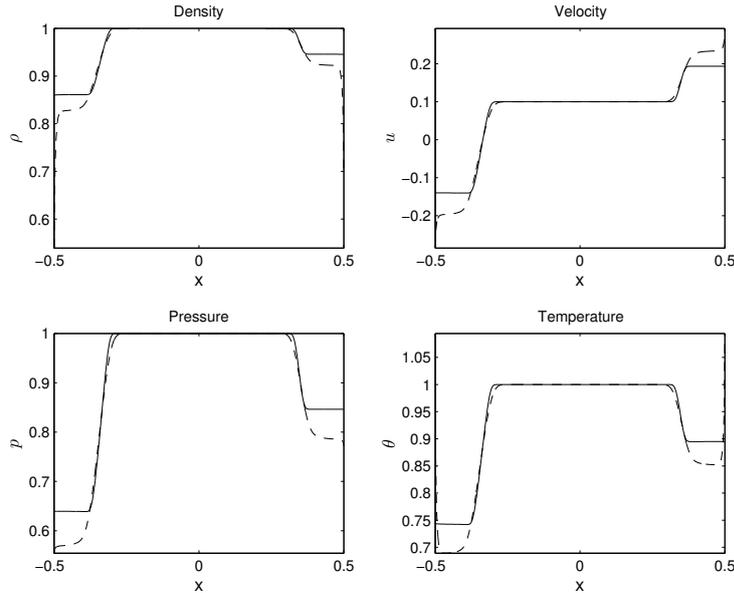


FIG. 7.9 – Example of diffusive reflection law with $(\rho_*, u_*, \theta_*) = (1, 0.1, 1)$ and $\alpha = 0.5$, $\rho_w^L = 1, \rho_w^R = 1, \theta_w^L = 1, \theta_w^R = 1$ for a final time $t = 0.1$. Dashed line : kinetic simulation, solid line : hydrodynamic simulation.

- if $\sigma_{U_*} = (0, 3)$ all characteristics are outgoing, Λ^+ is reduced to $\{0\}$ and m_+ simply vanishes;
- if $\sigma_{U_*} = (3, 0)$ all characteristics are incoming, $m_- = 0$ and m_+ is defined by the linear system

$$A \begin{pmatrix} \rho_+ \\ u_+ \\ \theta_+ \end{pmatrix} = b^{\text{data}};$$

- if $\sigma_{U_*} = (2, 1)$ or $(1, 2)$ we solve the system (7.44)

$$\begin{pmatrix} A^T A & B^{+T} \\ B^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T b^{\text{data}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

where B^+ accounts for the constraints :

- when $\sigma_{U_*} = (2, 1)$, Λ^+ is two-dimensional, hence there is one constraint relating the coefficients (ρ_+, u_+, θ_+) ; it reads :

$$B^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_*} & -\frac{3}{\sqrt{3}\theta_*} & \frac{1}{\theta_*} \end{pmatrix};$$

- when $\sigma_{U_*} = (1, 2)$, Λ^+ is one-dimensional, hence there are two constraints relating the coefficients (ρ_+, u_+, θ_+) ; we get

$$B^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_*} & 0 & -\frac{1}{2\theta_*} \\ \rho_* & \frac{1}{\sqrt{3}\theta_*} & \frac{1}{2\theta_*} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\theta_*} & -\frac{1}{2\theta_*} \end{pmatrix};$$

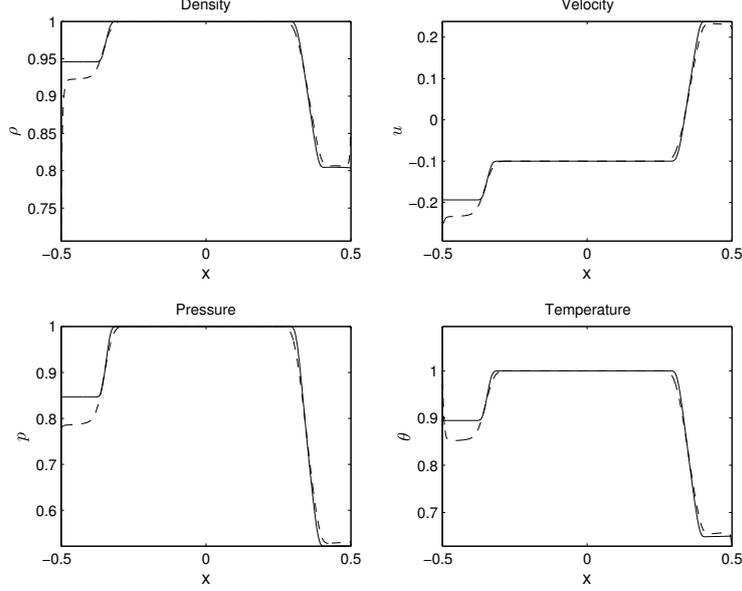


FIG. 7.10 – Example of diffusive reflection law with $(\rho_*, u_*, \theta_*) = (1, -0.1, 1)$ and $\alpha = 0.5$, $\rho_w^L = 1, \rho_w^R = 1, \theta_w^L = 1, \theta_w^R = 0.5$ for a final time $t = 0.1$. Dashed line : kinetic simulation, solid line : hydrodynamic simulation.

- in the very specific case where $u_* = 0$, and thus $\sigma_{U_*} = (1, 1)$, m_+ is evaluated by the two steps iteration procedure described in Section 7.4.2.

When the reflection operator \mathcal{R} is conservative ($\alpha = 1$ for the diffuse reflection operator), we take into account the fact that

$$\int_{\mathbb{R}} vF \, dv = \int_{v>0} v\Phi^{\text{data}} \, dv.$$

It becomes

$$\int_{\mathbb{R}} vM_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} (1 + m_{\text{bd}} + G(t, 0, v)) \, dv = \int_{v>0} v\Phi^{\text{data}} \, dv.$$

However, we already know that $\int_{\mathbb{R}} vG(t, 0, v)M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} \, dv = 0$ so that we consider the relation

$$\int_{\mathbb{R}} vM_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} (1 + m_- + m_+) \, dv = \int_{v>0} v\Phi^{\text{data}} \, dv$$

among the constraints, adding to the matrix B^+ the raw

$$(u_* \quad \rho_* \quad 0)$$

associated to the possibly non zero component

$$-(\rho_* u_* + \rho_- u_* + \rho_* u_-) + \int_{v>0} v\Phi^{\text{data}} \, dv.$$

It guarantees that the mass flux in $\mathcal{F}_{\text{bd}}^n$ has the required value $\int_{v>0} v\Phi^{\text{data}} \, dv$.

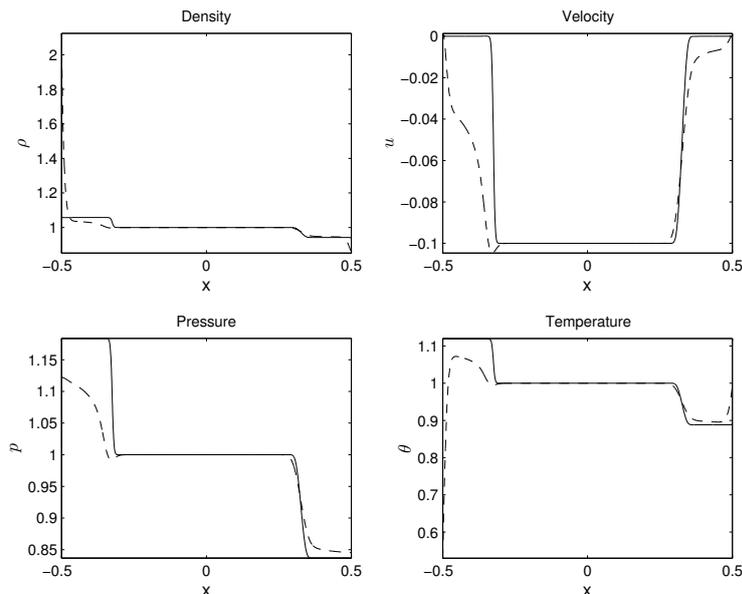


FIG. 7.11 – Example of diffusive reflection law with $(\rho_*, u_*, \theta_*) = (1, -0.1, 1)$ and $\alpha = 1$, $\rho_w^L = 1, \rho_w^R = 1, \theta_w^L = 0.5, \theta_w^R = 1$ for a final time $t = 0.1$. Dashed line : kinetic simulation, solid line : hydrodynamic simulation.

Remark 7.4.16 *Clearly, in the case $\sigma_{U_*} = (0, 3)$ the scheme does not see any effect from the boundary $x = -\omega$, as expected since all characteristics are outgoing. In this case $\Lambda^- = \text{Ker}(L_{U_*})$, $\Lambda^+ = \{0\}$, $m_- = m_{\text{fluc}}$ and $m_+ = 0$ so that the boundary fluxes are given by*

$$\int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} (1 + m_{\text{fluc}}) M_{(\rho_*, u_*, \theta_*)} dv.$$

In fact, our experience is that the situation $\sigma_{U_} = (0, 3)$ is often highly unstable for the kinetic model and the hydrodynamic scheme might miss this instability. Let us detail an example and a possible remedy. For a fully reflexive law, $\alpha = 1$, as already remarked the mass flux is imposed to satisfy*

$$\int_{\mathbb{R}} v F(t, -\omega, v) dv = \int_{v>0} v \Phi^{\text{data}, L}(t, v) dv.$$

In particular it vanishes when $\Phi^{\text{data}, L} = 0$. Roughly speaking it means that the bulk velocity vanishes too since $\rho_ u_* \simeq \int_{\mathbb{R}} v F dv$. Therefore, we are rather in cases $\sigma_{U_*} = (1, 2)$ or $\sigma_{U_*} = (2, 1)$ than $\sigma_{U_*} = (0, 3)$. This is indeed what we observe on the microscopic simulations : due to the boundary conditions, the signature σ_{U_*} switches immediately from $\sigma_{U_*} = (0, 3)$ to a case with incoming characteristics. In other words there is a time-boundary layer, which is not taken into account by our method. But the difficulty comes from a bad initialization : it is not relevant to start the hydrodynamic simulation with a data such that $\sigma_{U_*} = (0, 3)$. Hence, for this specific case $\alpha = 1$, $\Phi^{\text{data}, L} = 0$ we perform a few time steps of kinetic simulation and use the result to initialize the hydrodynamic code.*

When $\Phi^{\text{data,L}} \neq 0$, we suggest the following adaptation. As before the reference state (ρ_*, u_*, θ_*) is given by the hydrodynamic unknowns in the cell C_1 . Then, we define $\bar{u} = \int_{v>0} v \Phi^{\text{data,L}} dv / \rho_*$. If $\bar{u} + \sqrt{3\theta_*} = \bar{u} + c_*$ becomes positive (or close to 0) we switch to a microscopic simulation for a few times steps and go back to the hydrodynamic code with the updated data.

7.5 LINEARIZED ANALYSIS FOR THE EULER-POISSON SYSTEM

In this Section we go back to the model for charged particles, with an electric field self-consistently defined through the Poisson equation. Namely, the particles distribution $F(t, x, v)$ obeys

$$\partial_t F + v \partial_x F + E(t, x) \partial_v F = \frac{1}{\tau} Q(F) \quad (7.49)$$

with $E = -\partial_x \Phi$ the electric field. We still assume that $Q(F)$ is the BGK operator. The potential Φ is defined by the Poisson equation

$$-\partial_{xx}^2 \Phi = 1 - \rho, \quad (7.50)$$

with $\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}} F(t, x, v) dv$. We complete the problem by the Dirichlet condition

$$\Phi(t, -\omega) = \Phi^L, \quad \Phi(t, +\omega) = \Phi^R. \quad (7.51)$$

For the particles, we assume at the boundary

$$\begin{aligned} \gamma^{\text{inc}} F(t, -\omega, v) &= F^L(t, v) + \mathcal{R}(\gamma^{\text{out}} F)(-v), & \text{for } v > 0, \\ \gamma^{\text{inc}} F(t, +\omega, v) &= F^R(t, v) + \mathcal{R}(\gamma^{\text{out}} F)(-v), & \text{for } v < 0, \end{aligned} \quad (7.52)$$

with \mathcal{R} a reflection operator and $F^{R,L}$ a given incoming distribution.

Let $\rho_* > 0$, $\theta_* > 0$ and $u_* \in \mathbb{R}$. We seek a solution of the BGK-Poisson equation (7.49)–(7.51) with the form

$$M_*(x, v) = \frac{\rho_*}{\sqrt{2\pi\theta_*} \int_{-\omega}^{+\omega} \exp\left(-\frac{\Phi_*(y)}{\theta_*}\right) dy} \exp\left(-\frac{(v - u_*)^2}{2\theta_*} - \frac{\Phi_*(x)}{\theta_*}\right).$$

The potential Φ_* is required to satisfy the following Poisson equation

$$\begin{cases} -\partial_{xx}^2 \Phi_* = 1 - \rho_*, \\ \Phi_*(-\omega) = \Phi^L, \quad \Phi_*(+\omega) = \Phi^R. \end{cases} \quad (7.53)$$

The function M_* is a solution of (7.49) when

$$\partial_t M_* + v \partial_x M_* - \partial_x \Phi_* \partial_v M_* = -\frac{v}{\theta_*} \partial_x \Phi_* + \frac{v - u_*}{\theta_*} \partial_x \Phi_* = 0$$

holds, which leads us to assume $u_* = 0$. From now on we consider

$$M_*(x, v) = \frac{\rho_*}{\sqrt{2\pi\theta_*} \int_{-\omega}^{+\omega} \exp\left(-\frac{\Phi_*(y)}{\theta_*}\right) dy} e^{(-v^2/(2\theta_*) - \Phi_*(x)/\theta_*)}$$

which is therefore a particular solution of (7.49)–(7.51).

We linearize around this specific stationary state : we set $F = M_\star(1 + \delta f)$ where the fluctuation δ is intended to be small. Keeping only linear terms with respect to f we are led to the following linearized problem

$$\begin{cases} \partial_t f + v \partial_x f - \partial_x \Phi_\star \partial_v f + \frac{v}{\theta_\star} \partial_x \tilde{\Phi} = \frac{1}{\tau} L_\star f \\ \partial_{xx}^2 \tilde{\Phi} = \int_{\mathbb{R}} f M_\star dv \\ \tilde{\Phi}(t, -\omega) = \tilde{\Phi}(t, +\omega) = 0, \end{cases} \quad (7.54)$$

where $\tilde{\Phi}$ is the potential fluctuation.

The linearized BGK operator L_\star is here defined by the projection

$$L_\star f = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_\star} + \frac{v}{\theta_\star} \tilde{u} + \frac{\tilde{\theta}}{2\theta_\star} \left(\frac{v^2}{\theta_\star} - 1 \right) - f$$

with

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \int_{\mathbb{R}} f M_\star dv, \\ \tilde{u} &= \frac{1}{\rho_\star} \int_{\mathbb{R}} v f M_\star dv, \\ \tilde{\theta} &= \frac{1}{\rho_\star} \left(\int_{\mathbb{R}} v^2 f M_\star dv - \theta_\star \tilde{\rho} \right). \end{aligned}$$

The boundary condition for the fluctuation is derived from (7.52) and it reads

$$\gamma^{inc} f(t, \pm\omega, v) = \frac{F^{L,R}(t, v)}{M_\star(\pm\omega, v)} - 1 + \frac{1}{M_\star(\pm\omega, v)} \mathcal{R}(\gamma^{out}(1 + f)M_\star(\pm\omega, \cdot)).$$

As τ goes to 0 we expect that the (fluctuation of the) particles distribution function f looks like an infinitesimal Maxwellian

$$m(t, x, v) = \frac{\tilde{\rho}(t, x)}{\rho_\star} + \frac{v}{\theta_\star} \tilde{u}(t, x) + \frac{\tilde{\theta}(t, x)}{2\theta_\star} \left(\frac{v^2}{\theta_\star} - 1 \right)$$

which makes the collision operator L_\star vanish. Velocity-averaging the equation satisfied by

f , we have

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f M_{\star} dv + \partial_x \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f M_{\star} dv \\
 & \quad - \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f \partial_x M_{\star} dv - \partial_x \Phi_{\star} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} \partial_v f M_{\star} dv + \frac{\partial_x \tilde{\Phi}}{\theta_{\star}} \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} M_{\star} dv \\
 & = \partial_t \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f M_{\star} dv + \partial_x \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f M_{\star} dv \\
 & \quad + \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f \frac{\partial_x \Phi_{\star}}{\theta_{\star}} M_{\star} dv + \partial_x \Phi_{\star} \left(\int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} f M_{\star} dv - \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f \frac{v}{\theta_{\star}} M_{\star} dv \right) \\
 & \quad + \frac{\partial_x \tilde{\Phi}}{\theta_{\star}} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_{\star} \theta_{\star} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & = \partial_t \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f M_{\star} dv + \partial_x \int_{\mathbb{R}} v \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f M_{\star} dv \\
 & \quad + \partial_x \Phi_{\star} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} f M_{\star} dv + \frac{\partial_x \tilde{\Phi}}{\theta_{\star}} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_{\star} \theta_{\star} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

We deduce that the macroscopic quantities satisfy

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{u} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho_{\star} & 0 \\ \theta_{\star}/\rho_{\star} & 0 & 1 \\ 0 & 2\theta_{\star} & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{u} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} + \partial_x \Phi_{\star} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/\rho_{\star} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{u} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = -\partial_x \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.55)$$

with

$$\begin{cases} \partial_{xx}^2 \tilde{\Phi} = \tilde{\rho}, \\ \tilde{\Phi}(t, -\omega) = \tilde{\Phi}(t, +\omega) = 0. \end{cases} \quad (7.56)$$

Of course the system (7.55)–(7.56) coincides with the linearization of the Euler-Poisson system around the stationary solution $(\rho_{\star}, u_{\star} = 0, \theta_{\star})$. It remains to discuss the boundary conditions on the hydrodynamic unknowns.

Like in the previous section, we introduce the ansatz $f(t, x, v) \simeq m(t, x, v) + G^L(t, (x + \omega)/\tau, v) + G^R(t, (x - \omega)/\tau, v)$ which leads to the half-space problem

$$v \partial_z G = L_{\star} G \quad \text{on } z \geq 0, v \in \mathbb{R},$$

with the following incoming condition prescribing $G(z = 0, v)$ for $v > 0$.

$$M_{\star} \gamma^{\text{inc}} G(0, v) = F^{\text{data}} - M_{\star}(1 + m) + \mathcal{R}(M_{\star}(1 + m)) + \mathcal{R}(M_{\star} \gamma^{\text{out}} G(0, v)),$$

where m and M_{\star} are evaluated at $\pm\omega$. Then we can apply directly the results described in the previous section which leads to define the boundary conditions by Corollary 7.4.11. On

a practical viewpoint, for numerics, we use the definition of boundary fluxes as detailed in the specific case $u_\star = 0$.

ANNEXE : EXISTENCE DE SOLUTION SUPERSONIQUE POUR EULER-POISSON NON ISENTROPIQUE EN DIMENSION 1

Sommaire

8.1	Introduction	157
8.2	Existence de solution supersonique	158

8.1 INTRODUCTION

Les modèles hydrodynamiques sont utilisés couramment pour la simulation du transport de particules chargées. Ces modèles sont constitués des équations d'Euler exprimant la conservation de la masse, du moment et de l'énergie [Jun00].

Dans ce chapitre, on considère le modèle d'Euler-Poisson stationnaire avec l'équation de l'énergie permettant de calculer la densité d'ion n et la température ionique T , couplé avec l'équation de Poisson pour le calcul du champ électrique E dans un ouvert borné $(0, 1)$:

$$J_x = 0 \quad (8.1)$$

$$\left(\frac{J^2}{n} + p(n, T) \right)_x = qnE \quad (8.2)$$

$$\left(\frac{J^3}{2n^2} + \frac{5}{2}JT \right)_x = qJE \quad (8.3)$$

$$E_x = \frac{-q}{\epsilon_s} \left(n - C(x) \right). \quad (8.4)$$

La densité du courant J est constante. On note $p(n, T)$ la pression et soit $C(x)$ une fonction donnée. Les constantes physiques sont la charge élémentaire $q > 0$ et la permittivité du milieu ϵ_s .

Les équations (8.1)-(8.4) sont complétées par les conditions aux bords :

$$E(0) = E_0, \quad n(0) = n_0, \quad T(0) = T_0. \quad (8.5)$$

Dans le cas où l'équation d'énergie est remplacée par la relation suivante :

$$p(n, T) = n^\gamma \text{ avec } \gamma > 1$$

il s'agit d'un modèle isentropique. Degond et Markowich ont prouvé l'existence de solutions de ce modèle dans le cas subsonique [BD85]. Le cas supersonique a été étudié par Y.Peng et I. Violet [PV06].

Pour le modèle (8.1)-(8.4), on exprime la pression comme une fonction de la température T :

$$p(n, T) = nT. \quad (8.6)$$

Zhu et Hattori ont prouvé l'existence des solutions subsoniques en 1D pour le système d'Euler-Poisson avec le terme du flux de la chaleur et sous l'hypothèse que C est une constante [ZH98].

On étudie l'existence de solution supersonique pour le modèle (8.1)-(8.4), complété par la relation (8.6).

8.2 EXISTENCE DE SOLUTION SUPERSONIQUE

Théorème 8.1 *On suppose que $C \in L^1(0, 1)$. Soient n_0 et T_0 deux constantes strictement positives. Alors, il existe des constantes positives $J_0, k, \underline{n}, \bar{n}, \underline{T}, \bar{T}$ tel que pour tout J vérifiant*

$$|J| \geq J_0 \quad (8.7)$$

et

$$\partial_n p(\rho, \theta) \leq k \quad \forall \underline{n} \leq \rho \leq \bar{n}, \quad \underline{T} \leq \theta \leq \bar{T} \quad (8.8)$$

il existe (n, T, E) solution du problème (8.1)-(8.4), tel que

$$0 \leq \underline{n} \leq n(x) \leq \bar{n}, \quad 0 \leq \underline{T} \leq T(x) \leq \bar{T} \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (8.9)$$

Démonstration: La démonstration du théorème 8.1 est basée sur le théorème de Schauder et la reformulation de l'équation (8.2) :

$$\left(-\partial_n p(n, T) + \frac{J^2}{n^2} \right) n_x = - \left(-\partial_T p(n, T) \cdot T_x + qnE \right). \quad (8.10)$$

La condition (8.7) correspond à un régime supersonique. En effet, l'écoulement supersonique est caractérisé par

$$\left| \frac{J}{n} \right| > \sqrt{\partial_n p}.$$

Dans cette preuve, on démontre que $J_0 > \bar{n}\sqrt{k}$ ainsi

$$\left| \frac{J}{n} \right| \geq \left| \frac{J_0}{\bar{n}} \right| > \sqrt{k} \geq \sqrt{\partial_n p}.$$

On introduit l'ensemble convexe fermé

$$B = \{(\rho, \theta) \in C^1([0, 1]) \times C^1([0, 1]) : \underline{n} \leq \rho \leq \bar{n}, \underline{T} \leq \theta \leq \bar{T}, (\theta - T_0)_x \leq M \forall x \in [0, 1]\}$$

avec $\underline{n}, \bar{n}, \underline{T}, \bar{T}$ et k qui seront définis ultérieurement. Soit $(\rho, \theta) \in B$ et soit

$$E(x) = E_0 + \frac{q}{\epsilon_s} \int_0^x (C(y) - \rho) dy.$$

De plus, soit $n \in C^1([0, 1])$ l'unique solution du problème linéaire :

$$\left(-\partial_n p(\rho, \theta) + \frac{J^2}{\rho^2} \right) n_x = - \left(-\partial_T p(\rho, \theta) \cdot \theta_x + q\rho E \right) \quad (8.11)$$

$$n(0) = n_0 \quad (8.12)$$

avec $J > \bar{n}\sqrt{k}$ où k est une constante positive à définir ultérieurement. D'après (8.8), le membre à gauche de l'équation (8.11) multipliant n_x est strictement positif.

En supposant que $J \neq 0$, soit $T \in C^1([0, 1])$ l'unique solution du problème :

$$\frac{5}{2} T_x = \frac{J^2}{\rho^3} \cdot n_x + qE \quad (8.13)$$

$$T(0) = T_0. \quad (8.14)$$

Ce qui définit un opérateur du point fixe

$$S : B \rightarrow C^0([0, 1]) \times C^1([0, 1]), \quad S(\rho, \theta) = (n, T).$$

Il nous reste à démontrer que $S(B) \subset B$.

En premier lieu, on démontre l'existence des constantes positives \underline{n} et \bar{n} tel que

$$\underline{n} \leq n(x) \leq \bar{n} \quad \forall x \in [0, 1].$$

Soit N tel que $0 < N < n_0$ et

$$C_1 = M \max\{|\partial_T p(\rho, \theta)| : \underline{n} \leq \rho \leq \bar{n}, \underline{T} \leq \theta \leq \bar{T}\} + q \bar{n} E_\infty$$

avec $E_\infty = E_0 + \frac{q}{\epsilon_s} \left(\|C\|_1 + \bar{n} \right)$ où on désigne par $\|\cdot\|_p$ la norme de $L^p(0, 1)$.

Ainsi d'après (8.8) et en prenant $k = \frac{2C_1}{N}$, et $J \geq J_1$ avec $J_1 = \bar{n} \sqrt{\frac{3k}{2}}$, on obtient :

$$\frac{J^2}{\rho^2} - \partial_n p(\rho, \theta) \geq \frac{J^2}{\bar{n}^2} - k = \frac{k}{2}.$$

et d'après l'équation (8.11), on aura :

$$|n_x| \leq \frac{2}{k} \left| \partial_T p(\rho, \theta) \cdot \theta_x + q\rho E \right| \leq \frac{2C_1}{k} = N. \quad (8.15)$$

En prenant $\underline{n} = n_0 - N$ et $\bar{n} = n_0 + N$, on obtient

$$\underline{n} \leq n(x) \leq \bar{n}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

avec $\underline{n} > 0$ car $N < n_0$.

Ensuite, on prouve l'existence de \underline{T} et \bar{T} deux constantes positives tel que

$$\underline{T} \leq T(x) \leq \bar{T} \quad \forall x \in [0, 1].$$

D'après l'équation (8.13), on aura :

$$|T_x| \leq \frac{2}{5} \left| \frac{J^2}{\rho^3} \cdot n_x + qE \right| \quad (8.16)$$

$$\leq \frac{2J^2}{5n^3} N + q\|E\|_\infty. \quad (8.17)$$

En prenant J tel que $J_1 \leq J \leq J_2 = \sqrt{\frac{n^3 q \|E\|_\infty}{N}}$, on obtient

$$\underline{T} \leq T(x) \leq \bar{T}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

avec $\underline{T} = T_0 - C_2$ et $\bar{T} = T_0 + C_2$ avec $C_2 = \frac{7q}{5}\|E\|_\infty$.

Il reste à prouver que $\|(T - T_0)_x\|_\infty \leq M$ avec $M > 0$. En effet, T est borné dans $H^1(0, 1)$ d'après (8.17), alors

$$\|(T - T_0)_x\|_\infty \leq \|T_x\|_\infty \quad (8.18)$$

$$\leq \|T_x\|_{H^1(0,1)} = M. \quad (8.19)$$

Ainsi, on a démontré que $S(B) \subset B$.

On prouve maintenant que S est continue. En effet, soient ρ_k et θ_k deux suites qui convergent dans $C^1([0, 1])$. Et soit $(n_k, T_k) = S(\rho_k, \theta_k)$. On va démontrer que (n_k, T_k) converge vers $S(\rho, \theta)$ quand k tend vers l'infini.

D'après (8.15), la famille $(n_k)_k$ est uniformément bornée dans $C^1([0, 1])$.

D'après le théorème des accroissements finis, on a $\forall x$ et $y \in [0, 1]$:

$$|n_k(x) - n_k(y)| \leq |n_k(z)| |x - y|$$

pour tout $k \in N$ avec $z \in]x, y[$. Ce qui prouve que la famille $(n_k)_k$ est équicontinue.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, il existe une sous-suite $(n_k)_k$ qui converge uniformément dans $C^1([0, 1])$. Soit n cette limite.

De plus, d'après (8.17), la famille $(T_k)_k$ est uniformément bornée dans $C^1([0, 1])$.

D'après le théorème des accroissements finis, on a $\forall x$ et $y \in [0, 1]$:

$$|T_k(x) - T_k(y)| \leq |T_k(w)| |x - y|$$

pour tout $k \in N$ avec $w \in]x, y[$. Ce qui prouve que la famille $(T_k)_k$ est équicontinue.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, il existe une sous-suite $(T_k)_k$ qui converge uniformément dans $C^1([0, 1])$. Soit T cette limite.

Ainsi

$$(n_k, T_k) \rightarrow (n, T) \text{ dans } C^1([0, 1]).$$

Il reste à démontrer que $(n, T) = S(\rho, \theta)$. En écrivant l'équation (8.11) pour n_k , on obtient

$$\left(-\partial_{n_k} p(\rho_k, \theta_k) + \frac{J^2}{\rho_k^2}\right) (n_k)_x = -\left(-\partial_T p(\rho_k, \theta_k) \cdot (\theta_k)_x + q\rho_k E\right), \quad (8.20)$$

et comme $\partial_{n_k} p(\rho_k, \theta_k)$ est continûment différentiable en (ρ_k, θ_k) , alors

$$-\partial_{n_k} p(\rho_k, \theta_k) + \frac{J^2}{\rho_k^2} \rightarrow -\partial_n p(\rho, \theta) + \frac{J^2}{\rho^2} \text{ quand } k \rightarrow \infty,$$

et comme $\partial_T p(\rho_k, \theta_k)$ est continûment différentiable en (ρ_k, θ_k) , et $\theta_k \rightarrow \theta$ dans $C^1([0, 1])$, alors on a :

$$-\partial_T p(\rho_k, \theta_k) \cdot (\theta_k)_x + q\rho_k E \rightarrow -\partial_T p(\rho, \theta) \cdot (\theta)_x + q\rho E \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

Or $n_k \rightarrow n$ dans $C^1([0, 1])$, et on obtient après passage à la limite quand $k \rightarrow \infty$ dans (8.20) :

$$\left(-\partial_n p(\rho, \theta) + \frac{J^2}{\rho^2}\right) n_x = -\left(-\partial_T p(\rho, \theta) \cdot \theta_x + q\rho E\right).$$

De la même façon, en écrivant l'équation (8.13) pour T_k , et en faisant tendre k vers l'infini, on obtient

$$\frac{5}{2} T_x = \frac{J^2}{\rho^3} \cdot n_x + qE.$$

Ainsi, on aura $(n, T) = S(\rho, \theta)$. D'où la continuité de S .

On prouve maintenant que $S(B)$ est précompacte *i.e.* $\overline{S(B)}$ est compacte dans $C^0([0, 1]) \times C^1([0, 1])$.

D'après (8.15) et (8.17), on a que n et T sont bornés pour la norme de $C^1([0, 1])$. Or l'injection $C^1([0, 1]) \times C^1([0, 1])$ dans $C^0([0, 1]) \times C^1([0, 1])$ est compacte. Ce qui prouve la compacité de $S(B)$.

D'après le théorème de Schauder, il existe $(n, T, E) \in C^0([0, 1]) \times C^1([0, 1]) \times C^2([0, 1])$ solution du problème (8.1)-(8.4). \square

BIBLIOGRAPHIE

- [AC80] M. Arthur and C. Cercignani, *Non-existence of a steady rarefied supersonic flow in a half-space*, ZAMP **31** (1980), 635–645.
- [AG97] A. Arnold and U. Giering, *An analysis of the Marshak conditions for matching Boltzmann and Euler equations*, Math. Models Methods Appl. Sci. **7** (1997), no. 4, 557–577. MR MR1453051 (98d :76142)
- [AM94] K. Aoki and N. Masukawa, *Gas flows caused by evaporation and condensation on two parallel condensed phases and the negative temperature gradient : Numerical analysis by using a nonlinear kinetic equation*, Phys. Fluids **6** (1994), no. 3, 1379–1395.
- [Bab87] H. Babovsky, *Derivation of stochastic reflection laws from specular reflection*, Transport Theory Statist. Phys **16** (1987), no. 1, 113–126.
- [Bar70] C. Bardos, *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d’approximation ; application à l’équation de transport*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **3** (1970), 185–233. MR MR0274925 (43 #683)
- [BBDP89] J. Batt, H. Berestycki, P. Degond, and B. Perthame, *Some families of solutions of the Vlasov-Poisson system*, Arch. Rational Mech. Anal **104** (1989), 79–103.
- [BCN86] C. Bardos, R. Caflisch, and B. Nicolaenko, *The Milne and Kramers problems for the Boltzmann equation of a hard sphere gas*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 323–352.
- [BD85] C. Bardos and P. Degond, *Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 space variables with small initial data*, Ann. Inst. Henri Poincaré **2** (1985), 101–118.
- [BDG⁺10] C. Besse, J.-P. Dudon, T. Goudon, N. Vauchelet, and I. Violet, *Applications of hydrodynamic models for charged particles and Knudsen layers within the context of space engineering*, Tech. report, INRIA, 2010, CEMRACS 2010, Work in progress.
- [Ber] J.J. Berthelier, *L’ionosphère*, Tech. report, Centre d’études des Environnements Terrestre et Planétaires, SAINT-MAUR,FRANCE.

- [Ber98] C. Berthou, *Analyse de charge électrostatique, méthode de résolution utilisée par Nascap*, Note interne, ASPI (1998).
- [BGK54] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, *A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems*, Phys. Rev. **94** (1954), 511–525.
- [BGL91] C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore, *Fluid dynamic limits of kinetic equations. I. Formal derivations*, J. Statist. Phys. **63** (1991), no. 1-2, 323–344. MR MR1115587 (92d :82079)
- [BGL93] ———, *Fluid dynamic limits of kinetic equations. II. Convergence proofs for the Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), no. 5, 667–753. MR MR1213991 (94g :82039)
- [BGS06] C. Bardos, F. Golse, and Y. Sone, *Half-space problems for the Boltzmann equation : a survey*, J. Stat. Phys. **124** (2006), no. 2-4, 275–300. MR MR2264610 (2007g :82051)
- [BLTPQ94] J.-F. Bourgat, P. Le Tallec, B. Perthame, and Y. Qiu, *Coupling Boltzmann and Euler equations without overlapping*, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering, The sixth international conference on domain decomposition, Como, Italy, June 1992 (A. Quarteroni, J. Periaux, Y. Kuznetsov, and O. Widlund, eds.), Contemp. Math., vol. 157, AMS, 1994, pp. 377–398.
- [BM09] F. Bouchut and T. Morales, *A subsonic-well-balanced reconstruction scheme for shallow water flows*, Preprint (2009).
- [Bou] J.C. Boudenot, *L'environnement spatial*, Presses Universitaires de France, no. 3032.
- [BP87] R. Beals and V. Protopopescu, *Abstract time-dependent transport equations*, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 370–405.
- [Bra65] S.I. Braginskii, *Transport processes in a plasma*, Reviews of plasma physics, M. Leontovich ed. (1965), no. 1. Consultants Bureau, New York, 205–311.
- [Caz05] J. Cazaux, *A new model of dependence : Secondary electron emission yield on primary electron energy for application to polymers*, J. Phys. D, Appl. Phys. **38** (Jul. 2005), no. 14, 2433–2441.
- [CBCY03] S. Clerc, S. Brosse, and M. Chane-Yook, *Sparcs : an advanced software for spacecraft charging analysis*, Proceedings of the 8th Spacecraft Charging Tech. Conf., Huntsville, AL (2003), no. October 20-24.
- [CDV05] P. Crispel, P. Degond, and M.-H. Vignal, *Quasi-neutral fluid models for current-carrying plasmas*, J. Comput. Phys. (2005), no. 205, 2, 408–438.
- [Cer87] C. Cercignani, *Half-space problems in the kinetic theory of gases*, Trends to Applications of Pure Mathematics to Mechanics (E. Kröner and K. Kirchgässner, eds.), Lecture Notes in Physics, vol. 249, Springer-Verlag, 1987, pp. 35–51.
- [Cer88] ———, *The Boltzmann equation and its applications*, Applied Mathematical Sciences, vol. 67, Springer-Verlag, 1988.

- [Cer90] ———, *Scattering kernels for gas-surface interaction*, Proceedings of the Workshop on Hypersonic Flows for Reentry Problems, INRIA, Antibes, vol. I, 1990, pp. 9–29.
- [Ces84] M. Cessenat, *Théorèmes de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math **299** (1984), 831–834.
- [Ces85] ———, *Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math **300** (1985), 89–92.
- [CG] S. Cordier and E. Grenier, *Quasineutral limit of two species Euler-Poisson system*, unpublished work.
- [CG00] ———, *Quasineutral limit of an Euler-Poisson system arising from plasma physics*, Comm. Partial Diff. Eqns. **23** (2000), 1099–1113.
- [CGS88a] F. Coron, F. Golse, and C. Sulem, *A classification of well-posed kinetic layer problems*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), no. 4, 409–435. MR MR933229 (89g :76038)
- [CGS88b] ———, *A classification of well-posed kinetic layer problems*, Communication on Pure and Applied Mathematics **XLI** (1988), 409–435.
- [CGS88c] ———, *A classification of well-posed kinetic layer problems*, Commun. Pure Appl. Math. (1988), no. 41, 409–435.
- [Cha01] O. Chanrion, *Simulation de l'influence de la propulsion plasmique sur la charge électrostatique d'un satellite en milieu magnétosphérique*, Thèse de doctorat, ENPC, 2001.
- [Che74] F.F. Chen, *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, vol. 1, Plenum Press, 1974.
- [Cia78] P-G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1978.
- [Cle94] D. Clementz, *Simulation de la prise de charge d'un satellite soumis aux effets du plasma géostationnaire*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1994.
- [CLL95] C. Cercignani, M. Lampis, and A. Lentati, *A new scattering kernel in kinetic theory of gases*, Transport Theory Statist. Phys. **24** (1995), no. 9, 1319–1336. MR MR1362332 (96k :82060)
- [Cor94] S. Cordier, *Global solutions to the isothermal Euler-Poisson plasma model*, Tech. report, CMAP, Ecole Polytechnique, 1994.
- [CP98] S. Cordier and Y.-J. Peng, *Système Euler-Poisson non linéaire. Existence globale de solutions faibles entropiques*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **32** (1998), no. 1, 1–23.
- [Cri06] P. Crispel, *Modélisation mathématique et simulation de la transition d'une décharge électrostatique primaire vers un arc électrique secondaire entretenu par la puissance photovoltaïque d'un générateur solaire de satellite*, Thèse de doctorat, Univ. Toulouse 3, 2006.
- [CY04] M. Chane-Yooke, *Etude d'une équation cinétique liée à l'effet Compton, modélisation et simulation 3d de la charge d'un satellite en environnement plasmique*, Thèse de doctorat, Université De Provence, Aix-Marseille I, 2004.

- [CYCP06] M. Chane-Yook, S. Clerc, and S. Piperno, *Space charge and potential distribution around a spacecraft in an isotropic plasma*, J. Geophys. Res. (2006), no. 111, No. A4, A04211.
- [DD92] V.A. Davis and L.W. Duncan, *Spacecraft surface charging handbook*, Technical Report PL-TR-92-2232, Phillips Laboratory Directorate of Geophysics, Air Force. Material Command (1992).
- [Dec98] A. Decoster, *Modelling of collisions*, no. 2 Elsevier, Series In Applied Mathematics, 1998.
- [DeF72] S.E. DeForest, *Spacecraft charging at synchronous orbits*, J.G.R **77** (1972), 651.
- [Deg96] P. Degond, *Macroscopic models of charged-particle transport derived from kinetic theory*, ICIAM 95, Hamburg, 1995. Math. Res. vol. 87, Akademie Verlag, Berlin (1996), 39–53.
- [Del03] S. Dellacherie, *Coupling of the Wang Chang-Uhlenbeck equations with the multispecies Euler system*, J. Comput. Phys. **189** (2003), 239–276.
- [Del10] ———, *Etude et discrétisation de modèles cinétiques et de modèles fluides à bas nombre de Mach*, Habilitation à diriger des recherches, Univ. Paris 6, 2010.
- [Dey97] S. Deypere, *Etude de schéma d'ordre élevé en volumes finis pour des problèmes hyperboliques. application aux équations de Maxwell, d'Euler et aux écoulements diphasiques dispersés*, Thèse de doctorat, ENPC, 1997.
- [DG66] J.-S. Darrozès and J.-P. Guiraud, *Généralisation formelle du théorème H en présence de parois*, C. R. Acad. Sci. Paris **262** (1966), 369–371.
- [DL88] F. Dubois and P. LeFloch, *Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, J. Differential Equations 71 (1988), no. 1, 93–122.
- [DL89] R. J. DiPerna and P.-L. Lions, *On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability*, Ann. of Math. **130** (1989), no. 2, 321–366.
- [DL90] R. Diperna and P.L. Lions, *Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson*, C.R. Acad. Sci. Paris **307-1** (1990), 655–658.
- [DM90] P. Degond and P.A. Markowich, *On a one dimensional steady state hydrodynamic model for semi-conductors*, Appl.Math **3** (1990), no. 3, 25–29.
- [Dub96] F. Dubois, *Condition limite numérique non réfléchissante fortement non linéaire*, Tech. report, Univ. Paris Sud, Orsay, 1996, Note 270.
- [DV02] P. Degond and M.-H. Vignal, *Cours de modélisation - technologies spatiales*, Tech. report, Univ. Toulouse 3, 2001-2002, DEA de Mathématiques appliquées.
- [eAB94] J. Delcroix et A. Bers, *Physique des plasmas*, vol. 1 et 2, interéditions / CNRS éditions, Paris, 1994.
- [EO81] B. Enquist and S. Osher, *Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations*, Math. Comp. **31** (1981), 45–75.

- [Eva10] L. C. Evans, *Partial differential equations*, vol. 19, Graduate Studies in Mathematics, 2010.
- [FL71] K. O. Friedrichs and P. D. Lax, *Systems of conservation equations with a convex extension*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **68** (1971), 1686–1688. MR MR0285799 (44 #3016)
- [Gam92] I. M. Gamba, *Stationary transonic solutions of a one-dimensional hydrodynamic model for semiconductors*, Comm. Part. Diff. Eqs (1992), no. 17, 553–577.
- [Gar81] H.B. Garrett, *The charging of spacecraft surfaces*, Reviews of Geophysics and Space Physics **19** (1981), no. 4, 577–616.
- [GK95a] F. Golse and A. Klar, *A numerical method for computing asymptotic states and outgoing distributions for kinetic linear half-space problems*, J. Statist. Phys. **80** (1995), no. 5-6, 1033–1061. MR MR1349774 (96j :82038)
- [GK95b] ———, *A numerical method for computing asymptotic states and outgoing distributions for kinetic linear half-space problems*, statistical physics **80** (1995), no. 5/6, 409–435.
- [GM96] I. M. Gamba and C. S. Morawetz, *A viscous approximation for a 2-d steady-semiconductor or transonic gas dynamic flow : existence theorem for potentialflow*, Comm. Pure Appl. Math. XLIX (1996), no. 1, 999–1049.
- [God87] S. K. Godounov, *Lois de conservation et intégrales d'énergie des équations hyperboliques*, Nonlinear hyperbolic problems (St. Etienne, 1986) (C. Carasso, P.-A. Raviart, and D. Serre, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1270, Springer, Berlin, 1987, pp. 135–149. MR MR910110
- [Gol89] F. Golse, *Applications of the Boltzmann equation within the context of upper atmosphere vehicle aerodynamics*, Comp. Methods Appl. Mech. Engng. **75** (1989), 299–316.
- [Gol92] ———, *Knudsen layers from a computational viewpoint*, Transport Theory Statist. Phys. **21** (1992), no. 3, 211–236. MR MR1165526 (93e :82043)
- [Gol97a] ———, *Boundary and interface layers for kinetic models*, Tech. report, GdR SPARCH-CNRS, September 1997, Lecture Notes of the 4th Summer School of the GdR SPARCH, St Pierre d'Oléron.
- [Gol97b] ———, *Boundary and interface layers for kinetic models*, 4ème école d'été du GDR SPARCH : interfaces milieu cinétique - milieu fluide (Septembre 1997).
- [Gou97a] T. Goudon, *Existence of solutions of transport equations with nonlinear boundary conditions*, European J. Mech. B Fluids **16** (1997), no. 4, 557–574. MR MR1458980 (98e :35168)
- [Gou97b] ———, *Sur quelques questions relatives à la théorie cinétique des gaz et à l'équation de Boltzmann*, Ph.D. thesis, Université Bordeaux 1, 1997.
- [GPS88] F. Golse, B. Perthame, and C. Sulem, *On a boundary layer problem for the nonlinear Boltzmann equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **103** (1988), no. 1, 81–96.

- [GR91] E. Godlevski and P.A. Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Ellipses, 1991.
- [GR96] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, New-York, 1996.
- [GSR04] F. Golse and L. Saint-Raymond, *The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 81–161. MR MR2025302 (2005f :76003)
- [Gus85] M.S. Gussenhoven, *High level charging in the low altitude polar environment*, J.G.R **90** (1985), no. A11, 11009–11023.
- [GvdM84] W. Greenberg and C. V. M. van der Mee, *An abstract approach to evaporation models in rarefied gas dynamics*, Z. Angew. Math. Phys. **35** (1984), no. 2, 156–165. MR MR756402 (85j :76030)
- [GZI⁺79] S.K. Godunov, A. Zabrodine, M. Ivanov, A. Kraïko, and G. Prokopov, *Résolution des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*, no. 1, 1979.
- [Ham92] K. Hamdache, *Initial-boundary value problems for the Boltzmann equation : global existence of weak solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **119** (1992), no. 4, 309–353. MR MR1179690 (93g :35132)
- [HM94] J. L. Herr and M.B. McCollum, *Spacecraft environments interactions : Protecting against the effects of spacecraft charging*, NASA RP-1354, Marshall Space Flight Center, AL (Nov. 1994).
- [Jac] C. Jacquey, *Dynamique de la magnétosphère et orages magnétosphériques*, Tech. report, Centre d’Etudes Spatiales des Rayonnements/CNRS, BP 4346, 31029 Toulouse.
- [JNA94] B.F. James, O.W. Norton, and M.B. Alexander, *The natural space environment : Effects on spacecraft*, NASA RP-1350, Marshall Space Flight Center, AL (Nov. 1994).
- [JP01] A. Jüngel and Y.J. Peng, *A hierarchy of hydrodynamic models for plasmas. quasineutral limits in the drift-diffusion equations*, Asymptotic Analysis (2001), no. 28, 49–73.
- [Jun00] A. Jungel, *Quasi-hydrodynamic semiconductor equations*, Birkhauser, 2000.
- [Kla96] A. Klar, *Domain decomposition for kinetic problems with nonequilibrium states*, European J. Mech. B Fluids **15** (1996), no. 2, 203–216.
- [Kus78] I. Kuscer, *Phenomenological aspects of gas-surface interaction*, Fundamental problems in statistical mechanics (E. Cohen and W. Fiszdon, eds.), vol. IV, 1978, pp. 441–467.
- [L96] L. Lévy, *Charge des matériaux et systèmes en environnement spatial. in space environment : prevention of risks related to spacecraft charging*, Cepadué Editions, 1996.

- [LA95] R.D. Leach and M.B. Alexander, *Failures and anomalies attributed to spacecraft charging*, NASA RP-1375, Marshall Space Flight Center, AL (Aug. 1995).
- [LBB⁺94] L. Levy, J. Bernard, T. Beuthier, D. Boscher, M.F.D. Muzzio, R. Reulet, and D. Sarrail, *Définition des risques de décharge électrostatique sur orbite basse*, Rapport d'étude, Etude CERT (1994), no. 441413.
- [LBV⁺95] L. Levy, J. Bernard, V. Viel, J.F. Roussel, and D. Sarrail, *Définition des risques de décharge électrostatique sur orbite basse : instrumentation et dispositif d'étude*, Etude CERT (1995), no. 446110.
- [LeV90] R. J. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics, Birkhauser-Verlag, Basel, ETH-Zurich, 1990.
- [LeV02] ———, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [LK] J.G. Laframboise and M. Kamitsuma, *Multiple floating potentials, threshold-temperature effects and barrier effects in high-voltage charging of exposed surfaces on spacecraft*, Technical report, Physics Department and Center for Research in Experimental Space Science, York University, Toronto, Canada.
- [LP90] P.L. Lions and B. Perthame, *Régularité des solutions du système de Vlasov-Poisson en dimension 3*, C.R. Acad. Sci. Paris **311(I)** (1990), 205–210.
- [LSS] L. Levy, D. Sarrail, and J.M. Siguier, *Conductivity and secondary electron emission properties of dielectrics as required by nascap*, Technical report, Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse. Département Technologie Spatiale.
- [Mar47] R. E. Marshak, *Note on the spherical harmonic method as applied to the Milne problem for a sphere*, Phys. Rev. **71** (1947), 443–446.
- [Mar94] A.R. Martin, *A review of spacecraft/plasma interactions and effects on space systems*, Journal of The British Interplanetary Society **47** (April 1994), no. 4, 134–142.
- [Max79] J. C. Maxwell, *On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature*, Phil. Trans. Royal Soc. London **170** (1879), 231–256.
- [Meh91] G. Mehlman, *Etude de quelques problèmes liés aux écoulements en déséquilibre chimique et thermique*, Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, 1991.
- [Mis00] S. Mischler, *On the trace problem for solutions of the Vlasov equation*, Comm. Partial Differential Equations **25** (2000), no. 7-8, 1415–1443. MR MR1765137 (2001i :82064)
- [Mis10] ———, *Kinetic equations with Maxwell boundary condition*, Tech. report, Univ. Paris Dauphine, 2010, hal-00346628.
- [Miz83] P.F. Mizera, *A summary of spacecraft charging results*, J.Spacecraft **20** (1983), 651.
- [MKC82] M.J. Mandell, I. Katz, and D.L. Cooke, *Potentials on large spacecraft in LEO*, IEEE Trans. on Nuclear Science **NS-29** (Dec. 1982), no. 6, 1584–1588.

- [Mot97] F. Mottez, *L'environnement spatial de la Terre : La magnétosphère*, La Revue du Palais de la Découverte **25** (1997), no. 248, 21.
- [Msa97] R. Msallam, Thèse de doctorat, 1997.
- [nav] <http://www.jpl.nasa.gov/images/grace>.
- [Nis78] T. Nishida, *Fluid dynamical limit of the nonlinear Boltzmann equation to the level of the compressible Euler equation*, Comm. Math. Phys. **61** (1978), no. 2, 119–148. MR MR0503305 (58 #20087)
- [Ode00] S. Odenwald, *The 23rd cycle : Learning to live with a stormy star*.
- [OHM⁺99] D. Oh, D. Hasting, C. Malleen, J. Haas, and A. Gallimore, *Modeling of stationary plasma thruster plumes and implications for satellite design*, Journal of propulsion and power (1999), no. 15-2, 345–357.
- [Per89] B. Perthame, *Global existence to the BGK model of Boltzmann equation*, J. Differential Equations **82** (1989), no. 1, 191–205. MR MR1023307 (91a :35158)
- [Per92] ———, *Second order Boltzmann schemes for compressible Euler equations in one and two space dimensions*, SIAM J. Numer. Anal. **29** (1992), no. 1, 1–19.
- [Per02] ———, *Kinetic formulation of conservation laws*, Oxford Lecture Series in Math. and its Appl., vol. 21, Oxford Univ. Press, 2002.
- [Pfa92] K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimension for general initial data*, Journal of Differential Equation (1992), no. 95-1, 281–303.
- [Pou90] F. Poupaud, *Solutions stationnaires des équations de Vlasov-Poisson*, C.R. Acad. Sci. Paris (1990), no. 311-1, 307–312.
- [PP93] B. Perthame and M. Pulvirenti, *Weighted L^∞ bounds and uniqueness for the Boltzmann BGK model*, Arch. Rational Mech. Anal. **125** (1993), no. 3, 289–295. MR MR1245074 (94j :82068)
- [PRV95] F. Poupaud, M. Rasclé, and J.-P. Vila, *Global solutions to the isothermal Euler-Poisson system with arbitrarily large data*, J. Differential Equations **123** (1995), no. 1, 93–121.
- [PV05] Y. J. Peng and I. Violet, *Asymptotic expansions in a steady state Euler-Poisson system and convergence to the incompressible Euler equations*, M3AS (2005), no. 15, 5, 717–736.
- [PV06] Y.J. Peng and I. Violet, *Example of supersonic solutions to a steady-state Euler-Poisson system*, Appl. Math. Lett. (2006), no. 19, 1335–1340.
- [RC92] P.A. Robinson and P. Coakley, *Spacecraft charging : Progress in the study of dielectrics and plasmas*, IEEE Trans. on Electrical Insulation **27** (Oct. 1992), no. 5, 944–960.
- [RF62] D. Rapp and W.E. Francis, *Charge exchange between gaseous ions and atom*, Journal of Physical Physics (1962), no. 37-11, 2631–2645.

- [RRL⁺03] J. F. Roussel, F. Rogier, M. Lemoine, D. Volpert, G. Rousseau, G. Sookahet, P. Sng, and A. Hilgers, *Design of a new modular spacecraft plasma interaction modeling software (SPIS)*, Proceedings of the 8th Spacecraft Charging Tech. Conf., Huntsville, AL (October 2003), no. 19.
- [Ser99] D. Serre, *Systems of conservation laws. volume 1 : Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Ser00] ———, *Systems of conservation laws. volume 2 : Geometric structures, oscillation and mixed problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [sita] <http://www.eas.asu.edu/holbert/eee560/spc-chrg.html>.
- [sitb] <http://www.futura-sciences.com>.
- [sitc] <http://www.science-et-vie.net/definition-magnetosphere-485.html>.
- [SNA75] R.R. Shae, J.E. Nanevich, and R.C. Adamo, *Observations of electrical discharges caused by differential satellite-charging*, from the AIAA Symposium on Spacecraft Charging by Magnetospheric Plasmas, held in Washington, D.C. Progress in Astronautics and Aeronautics **47** (June 1975), 61–76.
- [SOA89] Y. Sone, T. Ohwada, and K. Aoki, *Evaporation and condensation on a plane condensed phase : Numerical analysis of the linearized Boltzmann equation for hard-sphere molecules*, Phys. Fluids **1** (1989), no. 8, 1398–1405.
- [Son02] Y. Sone, *Kinetic theory and fluid dynamics*, Modeling and simulation in science, engineering and technology, Birkhauser, 2002.
- [SR03a] L. Saint-Raymond, *Convergence of solutions to the Boltzmann equation in the incompressible Euler limit*, Arch. Ration. Mech. Anal. **166** (2003), no. 1, 47–80. MR MR1952079 (2004d :35038)
- [SR03b] ———, *From the BGK model to the Navier-Stokes equations*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **36** (2003), no. 2, 271–317. MR MR1980313 (2004f :76042)
- [Tor99] E.F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, 2nd édition, Springer, 1999.
- [UA83] S. Ukai and K. Asano, *The Euler limit and initial layer of the nonlinear Boltzmann equation*, Hokkaido Math. J. **12** (1983), no. 3, part 1, 311–332. MR MR719971 (85j :76034)
- [UYY03] S. Ukai, T. Yang, and S.-H. Yu, *Nonlinear boundary layers of the Boltzmann equation : I. existence*, Commun. Math. Phys. (2003), no. 236, 373–393.
- [Vas10] A. Vasseur, *Rigorous derivation of the kinetic/fluid coupling involving a kinetic layer on a toy problem*, Archiv. Rat. Mech. Anal. (2010), To appear.
- [VDBG10] N. Vauchelet, J.-P. Dudon, C. Besse, and T. Goudon, *Comparison of Vlasov solvers for spacecraft charging simulation*, ESAIM : M2AN **44** (2010), no. 1, 109–131.
- [Vig10] M.-H. Vignal, *A boundary layer problem for an asymptotic preserving scheme in the quasi-neutral limit for the Euler-Poisson system.*, SIAM J. Applied Math. **70** (2010), no. 6, 1761–1787.

- [Vil02] C. Villani, *Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann (d'après C. Bardos, F. Golse, C. D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond)*, Astérisque (2002), no. 282, Exp. No. 893, ix, 365–405, Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001. MR MR1975186 (2005f :82108)
- [Vio07] I. Violet, *High-order expansions in quasi-neutral limit of the Euler-Poisson system for a potential flow*, Proc. Royal Soc. Edinburgh (2007), no. 137A, 1101–1118.
- [ZH98] C. Zhu and H. Hattori, *Asymptotic behavior of the solution to a nonisentropic model of semiconductors*, J. Differ. Eqs. (1998), no. 144, 353–389.