Autour du 6^{eme} problème de Hilbert...

Th. Goudon

SIMPAF-INRIA Futurs & UMR 8524

David Hilbert (International Congress of Math., Paris, 1900):

It is [...] very desirable that the discussion of the foundations of mechanics be taken up by mathematicians also. Thus Boltzmann's work on the principles of mechanics suggests the problem of developing mathematically the limiting processes, there merely indicated, which lead from the atomistic view to the laws of motion of continua. Conversely one might try to derive the laws of the motion of rigid bodies by a limiting process from a system of axioms depending upon the idea of continuously varying conditions of a material filling all space continuously, these conditions being defined by parameters.

Du Microscopique au Macroscopique

N particules	$\longmapsto$ Equation de Boltzmann
Na^2 fixé, $N \to \infty$	Description Statistique: $f(t, x, v)$
Equation de Boltzmann	$\longmapsto$ Eq. Meca Flu.
$Kn \to 0$	Densité, Vitesse, Température...

O. Lanford, 1973

Bardos, Golse, Levermore, 1989-2001, Lions-Masmoudi, 2001, Golse-Saint-Raymond, 2001...

Equation de Boltzmann

$$\underbrace{\partial_t f + v \cdot \nabla_x f}_{\text{transport}} = \frac{1}{Kn} \underbrace{Q(f)}_{\text{collisions}}$$

- Conservation: $m(v) = (1, v, v^2/2)$, $\displaystyle\int m(v) Q(f)\, \mathrm{d}v = 0$

  Lois de conservation (locales) $\partial_t \langle mf \rangle + \nabla_x \langle vmf \rangle = 0$

- Dissipation: $\displaystyle\int \Psi'(f) Q(f)\, \mathrm{d}v = 0$, Ψ convexe, donc

$$\partial_t \langle \Psi(f) \rangle + \nabla_x \langle v \Psi(f) \rangle \leq 0$$

- Etats d'équilibre: $Q(f_{\mathrm{eq}}) = 0$ ssi

$$f_{\mathrm{eq}} = \frac{\rho(t,x)}{(2\pi T(t,x))^{3/2}} \exp\left(- \frac{|v - u(t,x)|^2}{2T(t,x)} \right)$$

Modèle BGK

$$Q(f) = M_{\rho,u,T}(v) - f$$

avec

$$M_{\rho,u,T}(v) = \frac{\rho(t,x)}{(2\pi T(t,x))^{3/2}} \exp\Big(- \frac{|v-u(t,x)|^2}{2T(t,x)} \Big)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} f \, \mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \end{pmatrix} M_{\rho,u,T} \, \mathrm{d}v = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho u^2 + 3\rho T \end{pmatrix} (t,x)$$

Limite Hydrodynamique

Quand $Kn \to 0$ alors $f \simeq f_{\mathrm{eq}}$ et les lois de conservation deviennent

$$\partial_t \langle m f_{\mathrm{eq}} \rangle + \nabla_x \langle v m f_{\mathrm{eq}} \rangle = 0$$

$$= \partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho u^2 + 3\rho T \end{pmatrix} + \nabla_x \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u \otimes u + \rho T \mathbb{I} \\ (\rho u^2 + 5\rho T) u \end{pmatrix} = 0$$

EQUATIONS D'EULER

Modèles Incompressibles

Perturbation d'un équilibre global $f = M(1 + \epsilon^r g)$,
$M(v) = (2\pi)^{-3/2} e^{-v^2/2}$ avec le scaling $Kn = \epsilon^q$ et $\partial_t \to \epsilon \partial_t$.

$$\begin{aligned}
\epsilon \partial_t g + v \cdot \nabla_x g &= \frac{1}{\epsilon^q} \, \frac{1}{\epsilon^r M} \Big(Q(M) + \epsilon^r DQ(M)(g) \\
&\qquad + \epsilon^{2r} D^2 Q(M)(g,g) \dots \Big) \\
&= \frac{1}{\epsilon^q} \Big(\mathcal{L}(g) + \epsilon^r \mathcal{R}(g,g) \dots \Big)
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{M} DQ(M)(g)$ définit un opérateur auto-adjoint, Fredholm sur $L^2(M \, \mathrm{d}v)$ avec $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \mathrm{Ker}\{1, v, v^2\}$.

Quand $\epsilon \to 0$, $g \to g_0$

- $\mathcal{L} g_0 = 0$ donc $g_0 = \rho + u \cdot v + \theta(v^2 - 3)/2$.
- $\epsilon \partial_t \Big(\int m(v)\ gM \,\mathrm{d}v \Big) + \nabla_x \Big(\int v\ m(v)\ gM \,\mathrm{d}v \Big) = 0$ conduit à

  $\nabla_x \Big(\int v\ m(v)\ g_0 M \,\mathrm{d}v \Big) = 0$ c'est-à-dire $\nabla_x(\rho + \theta)$ et $\nabla_x \cdot u = 0$

  (relations de Boussinesq et incompressibilité)

On réécrit $\epsilon\partial_t \int vgM\,\mathrm{d}v + \nabla_x \int v \otimes vgM\,\mathrm{d}v = 0$ comme

$$\partial_t \int vgM\,\mathrm{d}v + \nabla_x \int \frac{1}{\epsilon} \underbrace{\left(v \otimes v - \frac{v^2}{3}\mathbb{I}\right)}_{\substack{\in (\mathrm{Ker}(\mathcal{L}))^\perp \\ = \mathcal{L}\chi}} gM\,\mathrm{d}v = -\underbrace{\frac{1}{\epsilon}\nabla_x \int v^2 gM\,\mathrm{d}v}_{\substack{\textit{Gradient} \\ \in \{\phi,\ \nabla\cdot\phi = 0\}^\perp}}$$

Alors, le 2nd terme devient

$$\frac{\epsilon^q}{\epsilon} \int \chi \frac{1}{\epsilon^q}\mathcal{L}g\ M\,\mathrm{d}v = \frac{\epsilon^q}{\epsilon} \int \chi\Big(\epsilon\partial_t g + v\cdot\nabla_x g - \frac{\epsilon^r}{\epsilon^q}\mathcal{R}(g,g)\Big) M\,\mathrm{d}v$$

- $q = 1$, $r > 1$ donne Stokes,
- $q = 1$, $r = 1$ donne Navier-Stokes,
- $q > 1$, $r = 1$ donne Euler

(et équation de convection-diffusion pour ρ, θ).

Difficultés et outils mathématiques

- f (un peu mieux que) intégrable et $Q(f)$ quadratique $\rightarrow$ notion de sol. *renormalisées* $(Q(f)/(1+f) \simeq \frac{f}{1+f}\ f)$.
  [DiPerna-Lions, 1989]

- Lemmes de moyenne *si* f *et* $v \cdot \nabla_x f$ *sont dans* $L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ *alors* $\displaystyle\int f(x,v)\psi(v)\,\mathrm{d}v \in H^{1/2}(\mathbb{R}^N)$.
  (versions L^p, avec "pertes de dérivées", cadre L^1...)
  [Golse-Lions-Perthame-Sentis, 1888 ; DiPerna-Lions-Meyer 1990 ; Perthame-Souganidis, '00 ; Golse-SaintRaymond, '01...]

- Dissipation d'entropie, entropie relative
  [Yau, 1991; Brenier, '00; Golse-Levermore-SaintRaymond '00...]

- Arguments de compacité par compensation
  [Lions-Masmoudi, '01]...

Tout savoir sur les limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann...

C. Villani, Séminaire Bourbaki, n. 893, 2001.

Ici, l'enjeu est de relier différents niveaux de modélisation, d'établir des liens rigoureux entre deux grandes équations de la physique et d'améliorer la compréhension de ces modèles...

mais on retrouve cette problématique pour d'autres questions issues de la physique, avec des enjeux pratiques importants.

Transfert radiatif

$$\epsilon\partial_t f + v\cdot\nabla_x f = \frac{1}{\epsilon}\sigma(\rho)\big(\rho - f\big), \qquad \rho(t,x) = \int f\,\mathrm{d}v, \quad v\in\mathbb{S}^{N-1}$$

Développement de Hilbert $f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2\ldots$ conduit à

- $\sigma(\rho_0)(\rho_0 - f_0) = 0$ donc $f_0 = \rho(t,x)$,
- $\sigma(\rho)(\rho_1 - f_1) = v\cdot\nabla_x\rho$ donne $f_1 = -\dfrac{v}{\sigma(\rho)}\cdot\nabla_x\rho$,
- Et finalement

  $$\partial_t\int f_0\,\mathrm{d}v + \nabla_x\int v f_1\,\mathrm{d}v = 0 = \partial_t\rho - \nabla_x\Big(\int v\otimes v\,\mathrm{d}v\;\nabla_x F(\rho)\Big) = 0$$

  avec $F'(\rho) = 1/\sigma(\rho)$.

Bardos-Santos-Sentis, 1984 ; Bardos-Golse-Perthame-Sentis, 1988 ;

Compacité par compensation vs. lemme de moyenne :
Marcati-Milani, 1990 Lions-Toscani, 1998 ; G.-Poupaud '01;
Dolbeault-Markowich-Oelz-Schmeiser, '06...

Neutronique : Homogénéisation

Recherche de *modèles réduits* pour des calculs de routine en sécurité nucléaire impliquant des *coefficients effectifs* tenant compte des variations du milieu

[Allaire avec Bal, Capeboscq, Sieiss ; G.-Poupaud, G.-Mellet]

$$\begin{aligned}\epsilon\partial_t f + v\cdot\nabla_x f \\ &= \frac{1}{\epsilon}\Big(\int \sigma(x, x/\epsilon, v, v_\star) f(v_\star)\,\mathrm{d}v_\star - \int \sigma(x, x/\epsilon, v_\star, v)\,\mathrm{d}v_\star\ f(v)\Big)\end{aligned}$$

On note $T = v\cdot\nabla_y - Q$, $y = x/\epsilon$

- $Tf_0 = 0$ admet pour sol. $\rho(t,x)M(x,y,v)$
- $Tf_1 = v\cdot\nabla_x f_0 = vM\cdot\nabla_x\rho + v\cdot\nabla_x M\rho$. Si $\int vM\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}y = 0$ alors $f_1 = -\chi\cdot\nabla_x\rho + \lambda\rho$ avec

$$T\chi = -vM, \qquad T\lambda = v\cdot\nabla_x M$$

Finalement, on obtient

$$\partial_t \rho - \nabla_x \cdot (D(x) \nabla_x \rho - U(x) \rho) = 0,$$

$$D(x) = \int \int v \otimes \chi(x, y, v) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}y, \qquad U(x) = \int \int v \lambda(x, y, v) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}y$$

terme de convection lié à la dépendance en espace des fonctions d'équilibre.

[Degond-G.-Poupaud, 2003 ;
Chalub-Markowich-Perthame-Schmeiser, 2004]

Semi-conducteurs, Physique des plasmas

Prise en compte des forces électriques (ou électromagnétiques)

$$\epsilon \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f = \frac{1}{\epsilon} Q(f)$$

Ex.: force auto-consistante définie via l'éq. de Poisson

$$F(t,x) = -\nabla_x \Phi(t,x), \qquad -\Delta_x \Phi(t,x) = \int f(t,x,v)\,\mathrm{d}v$$

ou les équations de Maxwell...

Régime de diffusion, champ faible : Golse-Poupaud, 1991 ; Poupaud-Soler, 1999

Champ fort Poupaud, 1991 ; Nieto-Poupaud-Soler, 2000

Autres applications : Tokamaks, charge de satellites

Astrophysique

Les régimes de diffusion peuvent conduire à des phénomènes de singularités! Ex.: Vlasov-Poisson-Fokker-Planck

$$\begin{aligned} \epsilon\partial_t f + v\cdot\nabla_x f - \nabla_x\Phi\cdot\nabla_v f &= \frac{1}{\epsilon}\nabla_v\cdot(vf+\nabla_v f) \\ &= \frac{1}{\epsilon}\nabla_v\cdot(M\nabla_v(f/M)) \end{aligned}$$

avec $\Delta\Phi = \rho$ [Chandrasekhar, 1943]

On devine que $f \simeq \rho(t,x)M(v)$ avec ρ sol. de l'éq. de Smoluchowski (ou Keller-Segel en Biologie!)

$$\partial_t\rho - \nabla_x\cdot(\nabla_x\rho + \rho\nabla_x\Phi) = 0, \qquad \Delta\Phi = \rho$$

$\rho(t,x) \to \delta(x=0)$ en temps fini si la masse initiale est assez grande...

Couplages complexes

- Transfert radiatif

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, n, u, \theta)$$

où n, u, θ vérifient les éq. d'Euler avec des échanges d'énergie et d'impulsion.

[Buet-Després, 2005-06, G.-Lafitte, 05-06].

- Fluide-Particules

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot ((u - v) f) = \Delta_v f$$

couplé avec une équation donnant l'évolution de u.

[Domelevo, Hamdache, Baranger, Jabin, G.-Jabin-Vasseur, Carrillo-G....]

Limites Hydrodynamiques et Schémas Numériques

On peut s'inspirer du passage Boltzmann→Euler pour écrire de nouveaux schémas numériques [Brenier ; Giga-Miyakawa]

Ex. : Modèle de Perthame-Tadmor

$$\partial_t f + v\partial_x f = \frac{1}{\epsilon}(\mathbb{1}_{0\leq v\leq \rho} - f), \qquad \rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}v$$

On montre que le terme de droite s'écrit $\partial_v \mu_\epsilon$, μ_ϵ mesure ≥ 0 bornée. Quand $\epsilon \to 0$, $f \simeq \mathbb{1}_{0\leq v\leq \rho}$ et

$$\partial_t \int f \,\mathrm{d}v + \partial_x \int v f \,\mathrm{d}v = 0$$

devient

$$\partial_t \int \mathbb{1}_{0\leq v\leq \rho} \,\mathrm{d}v + \partial_x \int v\mathbb{1}_{0\leq v\leq \rho} \,\mathrm{d}v = 0 = \partial_t \rho + \partial_x(\rho^2/2) = 0$$

En fait, la limite est l'unique sol. entropique de l'éq. de Burgers.

Schémas Cinétiques

$$\partial_t U + \nabla_x \cdot F(U) = 0$$

est vu comme la limite $\epsilon \to 0$ de

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\epsilon}(M_f - f)$$

Avantage : non linéarité $\rightarrow$terme source, ordre 0 plus facile à traiter. Méthode de splitting

Etape 1: transport $\quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0,$

Etape 2: termes raides $\quad \partial_t f = \frac{1}{\epsilon}(M_f - f) \quad$ (projection : $f = M_f$)

Prix à payer : introduction d'une variable supplémentaire.
Construction de la Maxwellienne M_f avec
$\int m(v) M_f \,\mathrm{d}v = U = \int m(v) f \,\mathrm{d}v$, $\int v m(v) M_f \,\mathrm{d}v = F(U)$.

[Bouchut ; Natalini ; Aregba-Natalini ; Perthame]

Schéma de Jin-Xin

$$\partial_t \varrho + \partial_x f(\varrho) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R},\ \varrho(t,x) \in \mathbb{R})$$

et vu comme la limite $\epsilon \to 0$ de

$$\partial_t \rho + \partial_x J = 0 \qquad \partial_t J + \lambda^2 \partial_x \rho = \frac{1}{\epsilon}\big(f(\rho) - J\big)$$

On a $J = f(\rho) - \epsilon(\partial_t J + \lambda^2 \partial_x \rho)$ donc

$$\partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = \epsilon \partial_x \left[\left(\lambda^2 - \big(f'(\rho)\big)^2 \right) \partial_x \rho \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

qui motive $\lambda^2 > \sup_z \big(f'(z)\big)^2$.

Soit $f_\pm = \rho \pm J/\lambda$ donc $\rho = (f_+ + f_-)/2$ et $J = \lambda(f_+ + f_-)/2$. On a

$$\partial_t f_\pm \lambda \partial_x f_\pm = \pm \frac{1}{\lambda\epsilon}\big(f(\rho) - J)\big)$$