IMAFA 2016- Modèles Mathématiques Continus pour la Finance
TD4 - EDS, Formule de Black et Scholes

Dans la suite, $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P}\right)$ désigne un espace probabilisé filtré de référence où $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une filtration vérifiant les *conditions habituelles*.

Exercice 1 : Modèle de Black & Scholes

On considère un modèle de marché de Black & Scholes constitué d'un actif sans risque B et d'un actif risqué S défini par

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t\,dt \\ dS_t &= S_t\mu\,dt + S_t\sigma\,dW_t, \end{aligned} \tag{1}$$

avec deux constantes $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ et $x > 0$ tel que $S_0 = x$ $\mathbb{P}$-ps.

a) Donner les formes explicites qui correspondent aux formes différentielles (1).

b) Montrer qu'il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*_T$ équivalente à $\mathbb{P}$ et calculer S_t sous $\mathbb{P}^*_T$. Quelle est la loi de S_t sous $\mathbb{P}^*_T$?

c) Le *Théorème de valorisation par arbitrage* énonce que le prix d'une option européenne à l'instant $t = 0$ est l'espérance du flux actualisé sous la probabilité risque neutre. Ainsi, pour un call européen de maturité T et de prix d'exercice K, le prix en $t = 0$ est

$$C_0^{K,T}(x) = \mathbb{E}^*\left[\exp(-rT)(S_T - K)_+\right] \tag{2}$$

Le but de cette question est d'exploiter la loi simple de la variable S_T pour en déduire une formule de prix explicite, appelée *Formule de Black & Scholes* :

1. Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que

$$C_0^{K,T}(x) = \mathbb{E}\left(x\exp\left(\sigma\sqrt{T}Z - \frac{\sigma^2}{2}T\right) - K\exp(-rT)\right)_+ \tag{3}$$

2. Soient

$$d_1(x) := \frac{\ln(\frac{x}{K}) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2(x) := d_1(x) - \sigma\sqrt{T}$$

et

$$N(d) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} \exp(-\frac{u^2}{2})\,du.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} C_0^{K,T}(x) &= \mathbb{E}\left[\left(x\exp\left(\sigma\sqrt{T}Z - \frac{\sigma^2}{2}T\right) - K\exp(-rT)\right)\mathbb{1}_{\{Z+d_2(x)\geq 0\}}\right] \\ &= xN(d_1(x)) - K\exp(-rT)N(d_2(x)). \end{aligned}$$

d) Donner une expression pour $\frac{\partial}{\partial x}\left(x \mapsto C_0^{K,T}(x)\right)$ en permutant l'espérance et la dérivation dans la formule (3) (comment justifier cette permutation ?). Calculer le *gamma* et le *thêta* d'un call européen.

e) Calculer la probabilité d'exercice du call européen sous $\mathbb{P}$ ainsi que sous $\mathbb{P}^*$.

Exercice 2 : Processus d'Ornstein Uhlenbeck

Montrer que l'EDS scalaire

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha X_t \, dt + \sigma \, dW_t \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

admet comme solution

$$X(t) = e^{\alpha t} x_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \, dW_s. \tag{4}$$

On pourra montrer que X défini par (4) vérifie l'EDS.

Exercice 3 : Option sur moyenne et martingale exponentielle

On se place encore dans le cadre du modèle Black & Scholes. Les options sur moyenne font intervenir des quantités du type

$$Z_t := \int_0^t S_\theta \, d\theta,$$

par exemple le call sur moyenne est défini par le flux $h = \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_s \, ds - K\right)_+$.

Calculer $\mathbb{E}^* Z_t$ et $\mathbb{E}^*\left[Z_t | \mathcal{F}_s\right]$ pour $s \leq t \leq T$.

Exercice 4 : Formule de parité put–call.

On se place encore dans le cadre du modèle Black & Scholes. On pose $\beta_t = \frac{1}{B_t}$ le processus d'actualisation, et C_t (respectivement P_t) le processus-prix d'un call (resp. d'un put) européen à l'instant t.

a) Démontrer la formule de parité put–call :

$$(*) \quad P_t - C_t = -S_t + K\left(\frac{\beta_T}{\beta_t}\right).$$

b) Supposons maintenant que l'évolution de S_t suit le modèle de Black et Scholes. En utilisant l'expression explicite pour le prix du call européen (voir exercice précédent)

$$F_C(t,x) = xN(d_1) - K\exp(-r(T-t))N(d_2),$$

déduire de la formule de parité $(*)$ que le prix du put est

$$F_P(t,x) = K\exp(-r(T-t))N(-d_2) - xN(-d_1).$$