IMAFA 2016- Modèles Mathématiques Continus pour la Finance
TD3 - Intégrale stochastique, formule d'Itô et EDS

Dans la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t;\ t \geq 0), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé filtré de référence, où $(\mathcal{F}_t;\ t \geq 0)$ est une filtration vérifiant les *conditions habituelles*, et $(B_t)_{t\geq 0}$, un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard.

Exercice 1 : Application de la formule d'Itô.

Utiliser la formule d'Itô pour identifier les processus b_t et σ_t associés au processus d'Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dB_s,$$

dans chacun des cas suivants :

1. $X_t = (B_t)^2$
2. $X_t = 2 + t + \exp(B_t)$
3. $X_t = (t_0 + t, B_t)$
4. $X_t = \int_0^t B_s\, ds$
5. $X_t = \sin B_t$
6. $X_t(\omega) = \exp\left[\int_0^t \theta(s,\omega)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s,\omega)^2\, ds\right]$
7. $X_t = \frac{B_t}{1+t}$
8. $X_t = \left(B_t^{(1)} B_t^{(2)}\right)^2$, où $\left(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}\right)$ est un mouvement brownien de dimension 2.
9. $X_t = \left(B_t^{(1)} + B_t^{(2)} + B_t^{(3)}, \left(B_t^{(2)}\right)^2 - B_t^{(1)} B_t^{(3)}\right)$ où $\left(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)}\right)$ désigne un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 : La martingale de Wald.

Soient μ et σ deux réels positifs. On définit le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ par $X_t = \mu t + \sigma B_t$.

- Pour $\mathcal{F}_t^X$ la filtration naturelle engendrée par X, montrer à l'aide de la formule d'Itô que le processus Z_t^u défini par $Z_t^u = \exp\left\{uX_t - ut\left(\mu + \frac{u\sigma^2}{2}\right)\right\}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Une preuve de la formule d'Itô dans le cas simple du mouvement brownien.

Soit f une fonction bornée C^3 sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre 3 sont bornées. On va chercher à démontrer la formule d'Itô pour $f(B_1)$. Pour tout $n \geq 1$, on commence par écrire

$$f(B_1) - f(0) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(B_{\frac{i+1}{n}}) - f(B_{\frac{i}{n}})\right],$$

puis on fait un développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 de chaque terme de la somme :

$$f(B_1) = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{\frac{i}{n}}) \left[B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f''(B_{\frac{i}{n}})}{2} \left[\left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right)^2 - \frac{1}{n}\right]$$
$$+ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f''(B_{\frac{i}{n}})}{2} + \sum_{i=0}^{i-1} \frac{f'''(B_{\frac{i+\theta_i}{n}})}{6} \left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right)^3,$$

où les θ_i sont des nombres dans $]0, 1[$. Pour alléger l'écriture, on introduit les notations W_n, X_n, Y_n, Z_n pour les quatre sommes dans l'équation précédente (dans cet ordre) :

$$f(B_1) = f(0) + W_n + X_n + Y_n + Z_n.$$

1. Montrer que W_n converge dans L^2 vers $\displaystyle\int_0^1 f'(B_s)dB_s$.
   Indication : on utilisera l'isométrie d'Itô.

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right|^3$ converge vers 0 en probabilité. En déduire que Z_n converge vers 0 en probabilités.
   Indication : on calculera l'espérance de cette somme puis on utilisera l'inégalité de Markov (cf. TD1).

3. Pour tout $k \geq 1$, soit $V_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} f''(B_{\frac{i}{n}}) \left[\left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right)^2 - \frac{1}{n}\right]$.On remarque que $V_n = 2X_n$.

   (a) Pour tout $k \geq 2$, montrer que $\mathbb{E}(V_k^2 \mid \mathcal{F}_{\frac{k-1}{n}}) \leq V_{k-1}^2 + \dfrac{2C^2}{n^2}$, où $C = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

   (b) En déduire que $\mathbb{E}(V_n^2) \leq \dfrac{2C^2}{n}$.

   (c) Déduire de l'inégalité de Tchébychev que X_n converge vers 0 en probabilités.

4. Conclure en utilisant le fait la convergence d'une suite de v.a. dans L^2 implique la convergence en probabilités, qui implique à son tour la convergence presque sûre d'une sous-suite (cf. la partie *IV* du cours).