IMAFA 2016– Modèles Mathématiques Continus pour la Finance
TD2 – Martingales et filtrations

Dans toute la feuille, on note Ω l'espace probabilisé de référence, $\mathcal{F}$ la tribu associée et $\mathbb{P}$ une loi de probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Exercice 1 : Martingales.

— Soit $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ une filtration de $\mathcal{F}$ et soit M_t une $\mathcal{F}_t$-martingale. Etablir que, pour tout $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right].$$

— Vérifier si les processus suivants sont des $\mathcal{F}_t^B$-martingales :

$$X_t = B_t + 4t,\ X_t = tB_t,\ X_t = B_t^2 - t.$$

— Soit $\left(\tilde{B}_t := (B_t^1, B_t^2);\ t \geq 0\right)$ un mouvement brownien vectoriel standard à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Pour $(\mathcal{F}_t^{\tilde{B}};\ t \geq 0)$ la filtration engrendrée par $\tilde{B}$, déterminer si $X_t = B_t^1 B_t^2$ est une $\mathcal{F}_t^{\tilde{B}}$-martingale.

Exercice 2 : Martingales et filtrations.

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique à valeurs réelles et intégrable. On note $(\mathcal{F}_t^X;\ t \geq 0)$ la filtration naturelle engendrée par X.

— Montrer que, si le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t^X$–martingale alors :

$$E[X_t] = E[X_0] \ \text{ pour tout } t \geq 0\ (*).$$

— Donner un exemple de processus $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant $(*)$ mais qui ne soit pas une $\mathcal{F}_t^X$–martingale (on pourra chercher un processus de la forme $X_t = f(t)B_t$).

— Soit $(\mathcal{N}_t;\ t \geq 0)$ une autre filtration de $\mathcal{F}$. Montrer que, si le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à $(\mathcal{N}_t;\ t \geq 0)$, il est également une martingale relativement à $(\mathcal{F}_t^X;\ t \geq 0)$.

Exercice 3 : La martingale de Wald.

Soient μ et σ deux réels positifs. On définit le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ par $X_t = \mu t + \sigma B_t$.

— Déterminer la loi de X_t.

— Pour $\mathcal{F}_t^X$ la filtration naturelle engendrée par X, établir que le processus Z_t^u défini par $Z_t^u = \exp\left\{uX_t - ut\left(\mu + \frac{u\sigma^2}{2}\right)\right\}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 : Espérance conditionnelle, martingales, temps d'arrêt : rappels du cas discret

Dans un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. telle que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Rappelons quelques définitions :

— La tribu engendrée par X_k est notée $\sigma(X_k)$ et est composée des deux événements $\{X_k = 1\}$ et $\{X_k = -1\}$, ainsi que de leur réunion Ω et l'ensemble vide.

— La tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_k$ est notée $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$, ou $\mathcal{F}_k$ et est composée de tous les événements de la forme $\{X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_k = \varepsilon_k\}$ où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ appartiennent à $\{-1, 1\}$, ainsi que toutes les réunions possibles de ces événements, et l'ensemble vide. En particulier, on a $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$.

— Une v.a. Y est $\sigma(X_k)$-mesurable si $Y = f(X_k)$ pour une fonction $f : \{1, -1\} \to \mathbb{R}$.

— Une v.a. Y est $\mathcal{F}_k$-mesurable si $Y = g(X_1, \ldots, X_k)$ pour une fonction $g : \{-1, 1\}^k \to \mathbb{R}$.

— Soit une v.a. Y sur Ω. L'espérance conditionnelle de Y sachant X_k est la v.a.

$$\mathbb{E}[Y \mid \sigma(X_k)] = \mathbb{E}(Y \mid X_k) = \begin{cases} \mathbb{E}(Y \mid X_k = -1) & \text{sur l'événement } \{X_k = -1\}, \\ \mathbb{E}(Y \mid X_k = 1) & \text{sur l'événement } \{X_k = 1\}. \end{cases}$$

— L'espérance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{F}_k$ est la v.a.

$$\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(Y \mid X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_k = \varepsilon_k) \quad \text{sur l'événement } \{X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_k = \varepsilon_k\}.$$

1. Vérifier que $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1}$.
   Remarque : On dit que $(\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$ est une **filtration**.
2. Calculer

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y \mid X_k)], \qquad \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k], \qquad \mathbb{E}[f(X_k) Y \mid X_k], \qquad \mathbb{E}[f(X_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k].$$

3. On considère que X_k est le résultat du k-ième tirage d'un jeu de pile ou face (ou d'un jeu équilibré au casino), et on suppose que le joueur peut miser une quantité de son choix avant chaque tirage. Justifier que sa fortune Z_k après le k-ième tirage est donnée par

$$Z_k = z + M_1 X_1 + \ldots + M_k X_k,$$

   où z est la richesse initiale et M_i est la mise du i-ième tirage. Justifier le fait qu'on doit supposer que

$$M_k \text{ est } \mathcal{F}_{k-1}\text{-mesurable.}$$

4. On suppose également que M_k est borné pour tout $k \geq 1$. Montrer que

$$\mathbb{E}(Z_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = Z_k.$$

   Que vaut $\mathbb{E}(Z_{k+n} \mid \mathcal{F}_k)$? $\mathbb{E}(Z_k)$? Que peut-on en déduire sur le gain que le joueur peut espérer ?
5. Soit un temps aléatoire T tel que $\{T \leq k\} \in \mathcal{F}_k$ pour tout $k \geq 1$. On dit que T est un **temps d'arrêt**. En appliquant la question précédente à un autre choix des mises M'_i, montrer que le processus $(Z_{T \wedge k})_{k \geq 1}$ est une martingale.
   En déduire que si T est borné, $\mathbb{E}(Z_T) = z$.
6. Soit T le premier instant k tel que $Z_k \geq z + 1$. Montrer que T est un temps d'arrêt. Déduire de la question précédente que T n'est pas borné.

Exercice 5 : L'intégrale d'Itô pour des processus élémentaires.

Soient T un réel strictement positif, $\{t_i\}_{i=1}^N$, une partition finie de l'intervalle $[0, T]$ vérifiant

$$0 = t_0 \ < \ t_1 \ < \ t_2 \ < \ \ldots < \ t_N = T,$$

et $\{c_i\}_{i=1}^N$, une suite de v.a. réelles de carré intégrables et telle que, pour tout i, c_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable. On définit alors le processus $(\phi_t;\ t \geq 0)$ par $\phi_t = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \mathbb{1}_{\{t \in [t_i, t_{i+1}[\}}$.

— Pour $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus défini par

$$X_t = \int_0^t \phi_s \, dB_s,$$

établir que X_t est une $\mathcal{F}_t^B$-martingale.

— Établir que $\mathbb{E}\left[X_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1} c_i^2 (t_{i+1} - t_i)\right]$.