IMAFA 2017– Modèles Mathématiques Continus pour la Finance
TD1 – Partie 2
Révisions calcul stochastique

Exercice 1 Rappel sur les changements de probabilité dans un cadre brownien

1. Soit $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard défini sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Montrer que le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ défini par $X_t = Z_t^2 - t$ pour $t \geq 0$ est une $\mathcal{F}_t$–martingale.
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.
   (ii) $Z_0 = 0$ et pour tout λ réel, le processus $\left(\exp\left(\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\right)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$–martingale.
3. Soit λ fixé. On définit le processus $L = (L_t)_{t\geq 0}$ par $L_t = \exp\left(\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$.
   a) Soit $T > 0$ fixé et $A \in \mathcal{F}_T$. On pose $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T \mathbf{1}_A]$. Montrer que $\mathbb{Q}$ définie une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. On peut donc, pour tout λ réel, définir un changement de probabilité grâce au processus L. Le processus L est la densité de Radon-Nikodym associée au changement de probabilité $\mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ et on note :
   $$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_T.$$
   b) Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, l'espérance de X sous $\mathbb{Q}$ est définie par :
   $$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T X].$$
   Montrer que pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_t$–mesurable avec $0 \leq t \leq T$, on a $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t X]$
   c) Montrer la formule de Bayes suivante. Pour tout $Y \in L^2(\mathbb{P})$:
   $$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[Y \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{L_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[L_T Y \mid \mathcal{F}_t\right].$$
4. Soit $Z^* = (Z_t^*)_{t\geq 0}$, le processus défini par $Z_t^* = Z_t - \lambda t$, $t \in [0, T]$.
   a) Montrer que pour tout $0 \leq s < t \leq T$ et tout réel α :
   $$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\alpha(Z_t^* - Z_s^*)\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)\right).$$
   b) En déduire que Z^* est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$.
5. Soit r le taux d'intérêt sans risque que l'on suppose constant. Considérons un actif risqué S_t dont la dynamique de prix sous $\mathbb{P}$ est régie par l'EDS
   $$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t,$$

où μ désigne le rendement attendu et σ la volatilité. Déterminer le paramètre λ de la densité de Radon-Nikodym L tel que sous la nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$, la dynamique de l'actif ait la forme suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dZ_t^*.$$

Expliquer pourquoi $\mathbb{Q}$ est aussi appelée “probabilité risque neutre”.

6. Montrer que sous $\mathbb{Q}$, le prix $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ de l'actif actualisé au taux sans risque est une $\mathcal{F}_t$–martingale.

Exercice 2 On considère un processus d'Itô X défini pour tout $t \geq 0$ par :

$$X_t = \int_0^t (1 + X_s)dW_s.$$

où W est un mouvement brownien standard.

1. Donner l'equation différentielle stochastique vérifiée par le processus Y tel que $\forall t \geq 0$, $Y_t = \ln(1 + X_t)$.
2. En déduire pour tout $t \geq 0$ une expression de X_t en fonction de W_t.

Exercice 3 On considère le modèle de Vasicek où l'évolution des taux d'intérêt court-terme est modélisée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck défini par l'EDS suivante :

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \sigma dW_t,$$

où α, β, σ sont des constantes positives et W est un mouvement brownien standard.

1. Soit Y le processus défini par $Y_t = e^{\beta t}X_t$. Determiner l'EDS vérifiée par Y.
2. En déduire une expression analytique pour X_t, faisant intervenir une intégrale de Wiener.
3. Déterminer la loi de X_t pour tout $t \geq 0$.
4. A quoi correspond le coefficient $\frac{\alpha}{\beta}$?
5. Quel est le principal inconvenient du modèle de Vasicek pour les taux d'intérêt ?

Exercice 4 On souhaite maintenant modéliser l'évolution des taux d'intérêt par un processus CIR (Cox-Ingersoll-Ross) défini par l'EDS suivante :

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t,$$

où α, β, σ sont des constantes positives et W est un mouvement brownien standard. On peut montrer que si la volatilité n'est pas trop élevée par rapport au paramètre α, i.e., lorsque $\alpha > \frac{1}{2}\sigma^2$, alors $X_t \geq 0$ presque sûrement si $X_0 \geq 0$.

1. En considérant le processus $Y_t = e^{\beta t}X_t$, montrer que l'espérance de X_t est la même que dans le modèle de Vasicek.
2. Calculer la variance de X_t pour tout $t \geq 0$ (On pourra considérer le processus $Z_t = Y_t^2$).