IMAFA 2016– Modèles Mathématiques Continus pour la Finance
TD1 – Exercices de probabilités

Dans toute la feuille, on note Ω l'espace probabilisé de référence, $\mathcal{F}$ la tribu associée et $\mathbb{P}$ une loi de probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Exercice 1 : Calculs sur la loi gaussienne

1. Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Après avoir rappelé la fonction de densité de X (que l'on notera g_X), calculer successivement $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et $\mathbb{E}(\exp\{\lambda X\})$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Inégalités sur les lois

1. Soit X une variable aléatoire réelle qui appartient à l'espace $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$. Prouvez l'inégalité de Tchebychev :

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \mathbb{E}(|X|^p).$$

   Indication : Poser $A := \{\omega : |X| \geq \lambda\}$ et établir que : $\int_\Omega |X|^p d\mathbb{P} \geq \int_A |X|^p d\mathbb{P}$

2. En déduire que, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $M = \mathbb{E}(\exp(\alpha|X|)) < \infty$, on a, pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq M e^{-\alpha\lambda}$$

Exercice 3 : Simulation de v.a. : algorithme de Box-Müller

Soient U_1 et U_2 deux v.a. indépendantes uniformément distribuées sur $(0, 1)$. Déterminer la loi jointe des v.a. $R = \sqrt{-2 \ln U_1}$ *et* $\theta = 2\pi U_2$. Faire de même pour le couple (X, Y) défini par $X = R\cos(\theta)$ *et* $Y = R\sin(\theta)$. Démontrer que X et Y sont indépendantes.
Indication : on se rappellera de la formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 4 : Vecteurs gaussiens et corrélation

Soient $\rho \in [-1, 1]$, $\mu_j \in \mathbb{R}$ et $\sigma_j^2 \in \mathbb{R}_+^2$ pour $j = 1$ et 2. Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit

$$X_1 = \mu_1 + \sigma_1 Y_1 \quad \text{et} \quad X_2 = \mu_2 + \sigma_2(\rho Y_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\, Y_2).$$

1. Calculer la matrice de covariance de X_1 et X_2, puis calculer leur corrélation, définie par

$$\mathrm{Cor}(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2)}}.$$

2. Quelle est la densité de (X_1, X_2) ? En déduire que la densité conditionnelle $f_{X_1=x}(y)$ de X_2 sachant $X_1 = x$ est la densité d'une variable aléatoire réelle gaussienne de moyenne $\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$ et de variance $\sigma_2^2(1 - \rho^2)$.

Exercice 5 : Convergence de variables aléatoires

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. gaussiennes de paramètres (m_n, σ_n^2) telle que $\lim_n \sigma_n = \sigma > 0$ et $\lim_n m_n = m$. Établir que X_n converge en loi vers une v.a. gaussienne X. Évaluer ses paramètres.

Indication : on pourra utiliser le théorème de Lévy.

Exercice 6 : L'espérance conditionnelle

On admet que si $\mathcal{H}$ est une tribu indépendante de $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ alors :

$$\mathbb{E}[X \mid \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$$

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. sommables et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On va montrer que $\mathbb{E}[X_1 \mid S_n] = \cdots = \mathbb{E}[X_n \mid S_n] = \frac{S_n}{n}$. On pose :

$$\mathcal{G}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots) = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots).$$

1. Montrer, en utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle, que :

$$\mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[X_1 \mid S_n]$$

2. Montrer que $\mathbb{E}[X_1 \mid S_n] = \cdots = \mathbb{E}[X_n \mid S_n]$.
   (On montrera que pour tout borélien B, $\mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{S_n \in B}) = \cdots = \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{S_n \in B})$.)
3. En déduire que

$$\mathbb{E}[X_1 \mid S_n] = \cdots = \mathbb{E}[X_n \mid S_n] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n \mid S_n] = \frac{1}{n} S_n$$

Exercice 7 : Quelques propriétés du mouvement brownien.

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.

— Rappeler la définition d'un mouvement brownien.

— Pour c une constante strictement positive, montrer que le processus $\hat{B}_t := \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est également un mouvement brownien.

— Soit $a \geq 0$. Montrer que $\tilde{B}_t := B_{a+t} - B_a$ est un mouvement brownien.

— Montrer que le processus $\tilde{W}_t := t B_{\frac{1}{t}}$ est un mouvement brownien.

Exercice 8 : Intégrale du mouvement brownien.

Pour $t > 0$ on définit la primitive

$$I_t := \int_0^t B_s ds$$

1. Établir qu'à chaque instant t cette intégrale est bien définie (au sens $\mathbb{P}$-presque sûr).
2. En utilisant la définition de l'intégrale de Riemann, établir que I_t est de loi gaussienne et déterminer ses paramètres caractéristiques.
3. Montrer que, pour $s < t$, la variable aléatoire $I_t - I_s - (t - s)B_s$ est indépendante de B_s.
4. Calculer la matrice de covariance du vecteur (B_t, I_t).