# IMAFA 2016– Modèles Mathématiques Continus pour la Finance
# TD4 - EDS, Formule de Black et Scholes

December 6, 2016

## Correction Exercice 1 : Modèle de Black & Scholes

### Item a

D'après l'exo 1 (on applique Itô à $\ln(S_t)$):

$$S_t = x \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

### Item b

Sous la probabilité risque-neutre, le prix actualisé des actifs est une martingale.

On a sous la probabilité historique $\mathbb{P}$ :

$$dB_t^{-1}S_t = S_t\,dB_t^{-1} + B_t^{-1}\,dS_t$$

On a que $B_t = \exp(rt)$ donc $B_t^{-1} = \exp(-rt)$. Donc:

$$dB_t^{-1} = -rB_t^{-1}\,dt$$

donc

$$\begin{aligned}
dB_t^{-1}S_t &= S_t\,dB_t^{-1} + B_t^{-1}\,dS_t = -rS_tB_t^{-1}\,dt + \mu B_t^{-1}S_t\,dt + \sigma B_t^{-1}S_t\,dW_t \\
&= (\mu - r)B_t^{-1}S_t\,dt + \sigma B_t^{-1}S_t\,dW_t \\
&= \sigma B_t^{-1}S_t\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\,dt + \,dW_t\right) \\
&= \sigma B_t^{-1}S_t\,d\left(\frac{\mu - r}{\sigma}t + W_t\right)
\end{aligned}$$

On note, pour $t \leq T$:

$$Z_t = \exp\left(\frac{r-\mu}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\frac{(r-\mu)^2}{\sigma^2}t\right)$$

alors, d'après la condition de Novikov

$$\mathbb{E}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(r-\mu)^2}{\sigma^2}\,dt\right) = \exp\left(\frac{T}{2}\frac{(r-\mu)^2}{\sigma^2}\right) < +\infty$$

le processus $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ est une $\mathbb{P}$ −martingale (On peut aussi regarder l'exo 3 TD 3 sur la martingale de Wald). Donc on peut introduire une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ , notée $\mathbb{P}^*$ telle que pour toute variable aléatoire $Y$ :

$$\mathbb{E}^*(Y) = \mathbb{E}\,YZ_T$$

On considère aussi le processus:

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

On montre que pour toute fonction $f$ mesurable bornée et tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}^* f(W_t^*) = \mathbb{E}\, f(W_t^*) Z_T = \mathbb{E}\, f(W_t)$$

donc $W_t^*$ est une processus Gaussien sous $\mathbb{P}^*$
Donc sous la probabilité $\mathbb{P}^*$:

$$d\tilde{S}_t = dB_t^{-1} S_t = \sigma B_t^{-1} S_t \, dW_t^* = \sigma \tilde{S}_t \, dW_t^*$$

donc le processus $(\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale locale sous $\mathbb{P}^*$.
Il faut montrer maintenant que c'est une vraie martingale. On a que:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_t &= x \exp\left( \left( \mu - r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) = x \exp\left( \left( \mu - r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \left( W_t^* - \frac{\mu - r}{\sigma} t \right) \right) \\ &= x \exp\left( -\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t^* \right)\end{aligned}$$

Sous $\mathbb{P}^*$, $W_t^*$ est un mouvement brownien, donc $\tilde{S}$ est une vraie martingale.
Ce qui montre que $\mathbb{P}^*$ est la probabilité risque-neutre.
On a de plus:

$$\begin{aligned}S_t &= x \exp\left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) = x \exp\left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t^* - \frac{\mu - r}{\sigma} t \right) \\ &= x \exp\left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t^* \right)\end{aligned}$$

donc sous $\mathbb{P}^*$, $S_t$ est un mouvement brownien géométrique, ayant $r$ le taux d'intérêt de l'actif sans risque comme drift.

## Item c

1. D'après la question précédente:

$$\begin{aligned}C_0^{K,T}(x) &= \mathbb{E}^*(\exp(-rT)(S_T - K)_+) = \mathbb{E}^*\left( \exp(-rT) \left( x \exp\left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T^* \right) - K \right)_+ \right) \\ &= \mathbb{E}^*(\exp(-rT)(S_T - K)_+) = \mathbb{E}^*\left( x \exp\left( -rT + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T^* \right) - K \exp(-rT) \right)_+ \\ &= \mathbb{E}^*\left( x \exp\left( -\frac{\sigma^2}{2} T + \sigma W_T^* \right) - K \exp(-rT) \right)_+ \\ &= \mathbb{E}\left( x \exp\left( -\frac{\sigma^2}{2} T + \sigma \sqrt{T} Z \right) - K \exp(-rT) \right)_+\end{aligned}$$

2.
La fonction $x \mapsto (x)_+$ est nulle si et seulement si $x < 0$, donc:

$$
\begin{aligned}
&\left(x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}Z\right)-K\exp(-rT)\right)_+ = 0 \iff x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}Z\right)-K\exp(-rt)<0\\
&\iff x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}Z\right)<K\exp(-rT)\\
&\iff \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}Z\right)<\frac{K}{x}\exp(-rT)\\
&\iff -\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}Z<-rT+\ln\left(\frac{K}{x}\right)\\
&\iff \sigma\sqrt{T}Z<-\left(rT-\frac{\sigma^2}{2}T+\ln\left(\frac{x}{K}\right)\right)\\
&\iff Z<-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(rT-\frac{\sigma^2}{2}T+\ln\left(\frac{x}{K}\right)\right)\\
&\iff Z+\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(rT-\frac{\sigma^2}{2}T+\ln\left(\frac{x}{K}\right)\right)<0\\
&\iff Z+d_2<0
\end{aligned}
$$

De plus, si $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z+x\geq 0\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz = 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz\\
&\overset{z\to -z}{=} 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz\\
&= N(x)
\end{aligned}
$$

Donc:

$$
\begin{aligned}
C_0^{K,T}(x) &= \mathbb{E}\left(x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}Z\right)-K\exp(-rT)\right)_+\\
&= \mathbb{E}\left(x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}Z\right)-K\exp(-rT)\right)\mathbb{1}_{Z+d_2\geq 0}\\
&= x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\sigma\sqrt{T}Z\right)\mathbb{1}_{Z+d_2\geq 0}\right)-K\exp(-rT)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{Z+d_2\geq 0}\right)\\
&= x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T\right)\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}e^{\sigma\sqrt{T}z}\,dz-K\exp(-rT)N(d_2)\\
&= x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}+z\sigma\sqrt{T}-\frac{\sigma^2 T}{2}}\,dz-K\exp(-rT)N(d_2)\\
&= x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma\sqrt{T}\right)^2}\,dz-K\exp(-rT)N(d_2)\\
&\overset{z\to z\pm\sigma\sqrt{T}}{=} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz-K\exp(-rT)N(d_2)\\
&= xN(d_1)-K\exp(-rT)N(d_2)
\end{aligned}
$$

## Item d

Soient $h : x \mapsto h(x)$ une fonction dérivable, $g$ une fonction mesurable et $Z$ une variable aléatoire tel que:

$$h(x) = \mathbb{E}\,g(x,Z)$$

Si $\frac{\partial}{\partial x}g(x,Z)$ est dans $L^1$, alors:

$$\frac{d}{dx}h(x) = \mathbb{E}\,\frac{\partial}{\partial x}g(x,Z)$$

Dans notre cas, on a que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}Z\right)-K\exp(-rT)\right)_+ = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}Z\right)\mathbb{1}_{Z+d_2\geq 0}$$

qui est dans $L^1$, donc

$$\frac{\partial}{\partial x}C_0^{K,T}(x) = \mathbb{E}\,\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}Z\right)\mathbb{1}_{Z+d_2\geq 0} = N(d_1)$$

On a utilisé les calculs de l'item b.
Pour calculer le $\Gamma$, on dérive cette formule:

$$\begin{aligned}\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2}C_0^{K,T}(x) &= \frac{\partial}{\partial x}N(d_1) = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial x}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right)\frac{1}{\sigma x\sqrt{T}}\end{aligned}$$

Maintenant le $\theta$:

$$\begin{aligned}-\theta = \frac{\partial}{\partial T}C_0^{K,T}(x) &= \frac{\partial}{\partial T}(xN(d_1)-K\exp(-rT)N(d_2))\\ &= xN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T}+rKe^{-rT}N(d_2)-Ke^{-rT}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T}\end{aligned}$$

On rappelle que:

$$d_1 = d_2+\sigma\sqrt{T}$$

d'où $\frac{\partial d_1}{\partial T} = \frac{\partial d_2}{\partial T}+\frac{\sigma}{2\sqrt{T}}$
Ainsi:

$$\frac{\partial}{\partial T}C_0^{K,T}(x) = xN'(d_1)\left(\frac{\partial d_2}{\partial T}+\frac{\sigma}{2\sqrt{T}}\right)+rKe^{-rT}N(d_2)-Ke^{-rT}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T}$$

En utilisant que:

$$xN'(d_1) = N'(d_2)e^{-rT}K$$

on a que:

$$\theta = -\frac{\partial}{\partial T}C_0^{K,T} = -\frac{xN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}-rKe^{-rT}N(d_2).$$

## Item e

Sous la probabilité $\mathbb{P}^*$, $\ln(S_T)\sim\mathcal{N}(\ln(x)+(r-\frac{\sigma^2}{2})T,\sigma^2T)$, d'où:

$$\mathbb{P}^*(S_T\geq K) = 1-\mathbb{P}^*(S_T\leq K) = 1-\mathbb{P}^*(\ln(S_T)\leq\ln(K))$$

$$\mathbb{P}^*(\ln(S_T) \leq \ln(K)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{-\infty}^{\ln(K)} \exp\left(-\frac{(z - rT - \ln(x))^2}{2\sigma^2 T}\right) dz$$

On pose $y = \dfrac{z - rT - \ln(x)}{\sigma\sqrt{T}} \implies \sigma\sqrt{T}\, dy = dz$ d'où

$$\mathbb{P}^*(\ln(S_T) \leq \ln(K)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K) - rT - \ln(x)}{\sigma\sqrt{T}}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy = N(-d_1)$$

ainsi:

$$\mathbb{P}^*(S_T \geq K) = 1 - \mathbb{P}^*(S_T \leq K) = 1 - N(-d_1) = N(d_1)$$

Sous $\mathbb{P}$ : $\ln(S_T) \sim \mathcal{N}(\ln(x) + (\mu - \dfrac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$ donc dans la formule précédente on remplace $r$ par $\mu$:

$$\mathbb{P}(S_T \geq K) = N(d)$$

avec:

$$d = \frac{\ln(\frac{x}{K}) + (\mu + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}$$

# Correction Exercice 2 : Processus d'Ornstein Uhlenbeck

$$\begin{aligned}
dX_t &= x_0 \alpha e^{\alpha t}\, dt + d\left(e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s}\, dW_s\right) = x_0 \alpha e^{\alpha t}\, dt + \left(\int_0^t e^{-\alpha s}\, dW_s\right) \alpha e^{\alpha t}\, dt + e^{\alpha t} e^{-\alpha t}\, dW_t \\
&= \alpha\left(x_0 e^{\alpha t} + \int_0^t e^{\alpha(t-s)}\, dW_s\right) dt + dW_t \\
&= \alpha X_t\, dt + dW_t
\end{aligned}$$

Comme les fonctions $x \mapsto \alpha x$ et $x \mapsto \sigma$ sont globalement Lipschitz et à croissance linéaire, alors on a une solution unique.

# Correction Exercice 4 : Formule de parité put–call.

## Item a

Dans un marché dans le quel on fait l'hypothèse AOA, deux actifs qui ont la même valeur à une date $T$, ont la même valeur à tout instant $0 \leq t \leq T$. Soient $C_t$ et $P_t$ les prix respectifs en $t$ du call et du put européen de strike $K$ et de maturité $T$ et même sous-jacent $S$.

En achetant 1 call et en vendent 1 put en $t$, on paie $C_t - P_t$. On est garantit d'obtenir à l'échéance $T$ le flux:

$$(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K$$

On montre cela en supposant $S_T - K \geq 0$ et $S_T - K < 0$.

D'autre part ce flux en $T$ , $S_T - K$ peut être obtenu par la construction d'un actif en $t$:

- achat du titre $S$
- vente de $K$ zero-coupon ($K$ actifs non risqués) placés au taux d'intérêt $r$ fixe.

En $t$ le prix de ce actif est $S_t - Ke^{-r(T-t)}$ qui à la date $T$ vaut $S_T - K$.

L'AOA garantit l'égalité que le prix des deux actifs sont égaux:

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

## Item b

On note $x = S_t$. Alors le prix du put à partir de la formule de parité:

$$F_P(t,x) = F_C(t,x) - x + Ke^{-r(T-t)}$$

d'où

$$\begin{aligned} F_P(t,x) &= xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - x + Ke^{-r(T-t)} \\ &= Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) + x(N(d_1) - 1) \end{aligned}$$

or $N(d_2) = \mathbb{P}(X \leq d_2)$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et donc

$$\begin{aligned} 1 - N(d_2) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq d_2) \\ &= \mathbb{P}(X \geq d_2) \\ &= \mathbb{P}(X \leq -d_2) \\ &= N(-d_2) \end{aligned}$$

idem pour $N(d_1)$.
D'où $F_P(t,x) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - xN(-d_1)$.