IMAFA 2016– Modèles Mathématiques Continus pour la Finance
TD3 – Intégrale stochastique, formule d'Itô et EDS

November 28, 2016

Exercice 1 : Application de la formule d'Itô.

Item 1

$$dB_t^2 = 2B_t\, dB_t + dt$$

Item 2

$$dX_t = dt + \exp(B_t)\, dB_t + \frac{1}{2}\exp(B_t)\, dt = (1 + \frac{1}{2}\exp(B_t))\, dt + \exp(B_t)\, dB_t$$

Item 3

$$dX_t = (1, 0)\, dt + (0, 1)\, dB_t$$

Item 4

$$dX_t = B_t\, dt$$

Item 5

$$dX_t = \cos(B_t)\, dt - \frac{1}{2}\sin(B_t)\, dt$$

Item 6

On note $Y_t = \int_0^t \theta(s,\omega)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s,\omega)\, ds$ alors:

$$dY_t = \theta(t,\omega)\, dB_s - \frac{1}{2}\theta^2(t,\omega)\, dt$$

En appliquant la formule d'Itô à $X_t = \exp(Y_t)$, on obtient:

$$\begin{aligned}
dX_t &= \exp(Y_t)\, dY_t + \frac{1}{2}\exp(Y_t)\theta^2(t,\omega)\, dt \\
&= \exp(Y_t)\theta(t,\omega)\, dB_s + \frac{1}{2}\exp(Y_t)\theta^2(t,\omega)\, dt - \frac{1}{2}\exp(Y_t)\theta^2(t,\omega)\, dt \\
&= \exp(Y_t)\theta(t,\omega)\, dB_s \\
&= X_t\theta(t,\omega)\, dB_s
\end{aligned}$$

Item 7

Soit $t \in [0, 1[$:

$$dX_t = -\frac{B_t}{(1+t)^2}\, dt + \frac{1}{1+t}\, dB_t$$

Item 8

Formule d'Itô multidimensionnelle

Soit $X = (X^1, \cdots, X^d)$ un processus d'Ito dans $\mathcal{R}^d$, ainsi pour chaque $i = 1, \cdots, d$:

$$\mathbb{P} - \text{p.s.} \quad X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_s^i \, ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_s^{i,j} \, dW_s^j$$

Alors, la formule d'Itô appliqué à $u \in C^{1,2}$, s'écrit:

$$\begin{aligned}
u(t, X_t) &= u(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}(s, X_s) \, ds + \int_0^t \nabla u(s, X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \text{Trace}(\sigma_s \sigma_s^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, X_s)) \, ds \\
&= u(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}(s, X_s) \, ds + \int_0^t \nabla u(s, X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^2 \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^r \sigma_s^{ik} \sigma_s^{j,k} \, ds
\end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô à la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto (xy)^2$:

$$dX_t = 2B_t^{(1)} {B_t^{(2)}}^2 \, dB_t^{(1)} + 2B_t^{(2)} {B_t^{(1)}}^2 \, dB_t^{(2)} + ({B_t^{(2)}}^2 + {B_t^{(2)}}^2) \, dt$$

On a utilisé le fait que $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ est un mouvement brownien standard, donc $\langle B^{(1)}, B^{(2)} \rangle_t = 0$.

Item 9

On applique la formule d'Itô aux fonctions: $f : (x, y, z) \mapsto x + y + z$ et $etg : (x, y, z) \mapsto y^2 - xz$ et on utilise le fait que $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)})$ et un mouvement brownien.

$$df(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)}) = dB_t^{(1)} + dB_t^{(2)} + dB_t^{(3)}$$

et

$$df(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)}) = -B_t^{(3)} \, dB_t^{(1)} + 2B_t^{(2)} \, dB_t^{(2)} - B_t^{(1)} \, dB_t^{(3)} + dt$$

Correction Exercice 2 : La martingale de Wald.

On a que $dX_t = \mu \, dt + \sigma \, dB_t$.

On applique la formule d'Ito à $Z_t^u = f(t, X_t)$ où $f \colon (t, x) \mapsto \exp(ux - ut(\mu + u\sigma^2/2))$:

$$\begin{aligned}
dZ_t^u &= u\mu \exp\left(uX_t - ut\left(\mu + u\frac{\sigma^2}{2}\right)\right) dt + u\sigma \exp\left(uX_t - ut\left(\mu + u\frac{\sigma^2}{2}\right)\right) dBt + \\
&\quad + \frac{u^2\sigma^2}{2} \exp\left(uX_t - ut\left(\mu + u\frac{\sigma^2}{2}\right)\right) dt - u\left(\mu + u\frac{\sigma^2}{2}\right) \exp\left(uX_t - ut\left(\mu + u\frac{\sigma^2}{2}\right)\right) dt \\
&= u\sigma \exp\left(uX_t - ut\left(\mu + u\frac{\sigma^2}{2}\right)\right) dBt
\end{aligned}$$

On montre facilement que pout tout $T > 0$, $\mathbb{E} \displaystyle\int_0^T \left(u\sigma \exp\left(uX_t - ut\left(\mu + u\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\right)^2 < \infty$ donc d'après le cours, (Z_t^u) est une martingale.

Correction Exercice 3 : Une preuve de la formule d'Itô dans le cas simple du mouvement brownien.

Item 1

Soit $n \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(W_n - \int_0^1 f'(B_s)\,dB_s\right)^2 &= \mathbb{E}\left(W_n - \int_0^1 f'(B_s)\,dB_s\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{\frac{i}{n}})\Big(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\Big) - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f'(B_s)\,dB_s\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{\frac{i}{n}})\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} dB_s - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f'(B_s)\,dB_s\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f'(B_{\frac{i}{n}})\,dB_s - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f'(B_s)\,dB_s\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s))\,dB_s\right)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s))\,dB_s\right)^2 \\
&\quad + 2\sum_{i<j}^{n-1}\mathbb{E}\left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s))\,dB_s \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} (f'(B_{\frac{j}{n}}) - f'(B_s))\,dB_s\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s))\,dB_s\right)^2 \\
&\quad + 2\sum_{i<j}^{n-1}\mathbb{E}\left(\int_0^1 \mathbb{1}_{s\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]}(f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s))\,dB_s \int_0^1 \mathbb{1}_{s\in\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]}(f'(B_{\frac{j}{n}}) - f'(B_s))\,dB_s\right) \\
&\overset{\text{Isometrie d'Ito}}{=} \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \Big(f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s)\Big)^2 ds\right) \\
&\qquad + 2\sum_{i<j}^{n-1}\mathbb{E}\left(\int_0^1 \mathbb{1}_{s\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]}\mathbb{1}_{s\in\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]}(f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s))(f'(B_{\frac{j}{n}}) - f'(B_s))\,ds\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \Big(f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s)\Big)^2 ds\right) \\
&\quad + 2\sum_{i<j}^{n-1}\mathbb{E}\left(\int_0^1 \mathbb{1}_{s\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]\bigcap\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]}(f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s))(f'(B_{\frac{j}{n}}) - f'(B_s))\,ds\right)
\end{aligned}
$$

mais si $i < j$, alors $\left[\dfrac{i}{n},\dfrac{i+1}{n}\right]\bigcap\left[\dfrac{j}{n},\dfrac{j+1}{n}\right] = \emptyset$ donc $\mathbb{1}_{\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]\bigcap\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]} = \mathbb{1}_{\emptyset} = 0$ ce qui montre que le terme $\displaystyle\sum_{i<j}\cdots$ est nul.

Donc:

$$
\mathbb{E}\left(W_n - \int_0^1 f'(B_s)\,dB_s\right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \Big(f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s)\Big)^2 ds\right)
$$

La fonction f' est dérivable et sa dérivée est bornée sur $\mathbb{R}$, donc elle est globalement Lipschitz, c'est-à-dire, il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$
|f'(x) - f'(y)| \leq K|x - y|
$$

donc:

$$
|f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s)| \leq K|B_{\frac{i}{n}} - B_s| \implies |f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s)|^2 \leq K^2|B_{\frac{i}{n}} - B_s|^2
$$

On écrit alors que:

$$\mathbb{E}\left(W_n - \int_0^1 f'(B_s)\,dB_s\right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \left(f'(B_{\frac{i}{n}}) - f'(B_s)\right)^2 ds\right) \leq K^2\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \left(B_{\frac{i}{n}} - B_s\right)^2 ds\right)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} K^2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \mathbb{E}\left(B_{\frac{i}{n}} - B_s\right)^2 ds$$

$$= K^2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (s - \frac{i}{n})\,ds$$

$$\leq K^2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n})\,ds = K^2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} ds$$

$$= K^2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n^2} = K^2\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{0}$$

Donc on a montré que:

$$\mathbb{E}\left(W_n - \int_0^1 f'(B_s)\,dB_s\right)^2 \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

donc W_n converge en L^2 vers $\displaystyle\int_0^1 f'(B_s)\,dB_s$.

Item 2

Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right|^3\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right|^3$$

Comme B_t est un mouvement brownien, alors $B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{N}(0,1)$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right|^3 = \frac{1}{\varepsilon}n\frac{1}{n\sqrt{n}}\mathbb{E}\,|B_1|^3 \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

En prenant $K = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'''(t)|$, on a que:

$$|Z_n| \leq \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1}|f'''(B_{\frac{i+\theta_i}{n}})|\left|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right|^3 \leq \frac{K}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right|^3$$

donc:

$$\mathbb{P}\left(|Z_n| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right|^3 \geq \varepsilon\frac{6}{K}\right) \overset{\text{ineg de Markov}}{\leq} \frac{K}{6\varepsilon}\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right|^3\right) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Item 3

Soit $k \geq 2$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[V_k^2 \mid \mathcal{F}_{\frac{k-1}{n}}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(V_{k-1} + f''(B_{\frac{k-1}{n}})\left[\left(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right)^2 - \frac{1}{n}\right]\right)^2 \mid \mathcal{F}_{\frac{k-1}{n}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[V_{k-1}^2 + 2V_{k-1}f''(B_{\frac{k-1}{n}})\left[\left(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right)^2 - \frac{1}{n}\right] + \left(f''(B_{\frac{k-1}{n}})\left[\left(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right)^2 - \frac{1}{n}\right]\right)^2 \mid \mathcal{F}_{\frac{k-1}{n}}\right] \\
&= V_{k-1}^2 + 2V_{k-1}f''(B_{\frac{k-1}{n}})\mathbb{E}\left[\left(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right)^2 - \frac{1}{n} \mid \mathcal{F}_{\frac{k-1}{n}}\right] + f''(B_{\frac{k-1}{n}})^2\mathbb{E}\left[\left[\left(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right)^2 - \frac{1}{n}\right]^2 \mid \mathcal{F}_{\frac{k-1}{n}}\right] \\
&= V_{k-1}^2 + 2V_{k-1}f''(B_{\frac{k-1}{n}})\mathbb{E}\left(\left(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right)^2 - \frac{1}{n}\right) + f''(B_{\frac{k-1}{n}})^2\mathbb{E}\left(\left[\left(B_{\frac{k}{n}} - B_{\frac{k-1}{n}}\right)^2 - \frac{1}{n}\right]^2\right) \\
&= V_{k-1}^2 + f''(B_{\frac{k-1}{n}})^2\mathbb{E}\left(\left[\frac{1}{n}B_1^2 - \frac{1}{n}\right]^2\right) \\
&= V_{k-1}^2 + \frac{f''(B_{\frac{k-1}{n}})^2}{n^2}\mathbb{E}\left(\left[B_1^2 -\right]^2\right) \\
&= V_{k-1}^2 + \frac{2f''(B_{\frac{k-1}{n}})^2}{n^2} \leq V_{k-1}^2 + \frac{2C^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

En prenant l'espérance, on a que:

$$
\mathbb{E}\, V_n^2 \leq \mathbb{E}\, V_{n-1}^2 + \frac{2C^2}{n^2} \leq \mathbb{E}\, V_{n-2}^2 + 2 \cdot \frac{2C^2}{n^2} \leq \mathbb{E}\, V_{n-3}^2 + 3 \cdot \frac{2C^2}{n^2} \leq \cdots \leq \mathbb{E}\, V_1^2 + (n-1)\frac{2C^2}{n^2}
$$

et

$$
\mathbb{E}\, V_1^2 = \mathbb{E}\, f''(0)^2 \left(B_{\frac{1}{n}}^2 - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{2C}{n^2}
$$

donc

$$
\mathbb{E}\, V_n^2 \leq \frac{2C}{n^2} + (n-1)\frac{2C^2}{n^2} = \frac{2C^2}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0
$$

donc d'après l'inégalité de Markov, X_n converge en probabilités vers 0.

Item 4

D'après la définition de l'intégrale de Riemann, $\mathbb{P}$ p.s:

$$
Y_n \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}\int_0^1 f''(B_s)\, ds
$$

donc Y_n converge en probabilités vers $\frac{1}{2}\int_0^1 f''(B_s)\, ds$.

(X_n) et Z_n convergent en probabilités vers 0.

On a que (W_n) converge en L^2 donc elle converge en probabilités vers la même limite.

On utilise le fait que si deux suites A_n et B_n convergent en probabilités vers deux variables aléatoires A et respectivement B alors leurs loi jointe (A_n, B_n) converge en probabilités vers (A, B).

Donc le vecteur (W_n, X_n, Y_n, Z_n) converge en probabilités vers $\int_0^1 f'(B_s)\, dB_s, \frac{1}{2}\int_0^1 f''(B_s), 0, 0$

Donc il existe une sous-suite extraite $(W_{k_n}, X_{k_n}, Y_{k_n}, Z_{k_n})$ qui convergent $\mathbb{P}$ −p.s. vers $\int_0^1 f'(B_s)\, dB_s, \frac{1}{2}\int_0^1 f''(B_s), 0, 0$.

La fonction $h : (w, x, y, z) \mapsto w + x + y + z$ est continue, donc en passant à la limite on a $\mathbb{P}$ −p.s.:

$$
f(B_1) - f(0) = \lim_{k_n\to\infty} h(W_{k_n}, X_{k_n}, Y_{k_n}, Z_{k_n}) = \int_0^1 f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^1 f''(B_s)\, ds
$$