IMAFA 2016– Modèles Mathématiques Continus pour la Finance
TD2 – Martingales et filtrations

Correction Exercice 1 : Martingales.

Item 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[M_t^2 + M_s^2 - 2M_sM_t \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2M_s\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[M_t^2 + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2M_s^2 = \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right]\end{aligned}$$

Item 2

$B_t + 4t$ n'est pas une martingale parce qu'elle n'est pas de moyenne constante.

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[tB_t \mid \mathcal{F}_s\right] = t\mathbb{E}\left[B_t \mid \mathcal{F}_s\right] = tB_s = \frac{t}{s}X_s \neq X_s$$

Donc tB_t n'est pas une martingale.

$$\mathbb{E}\left[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + B_s^2 - t \overset{\text{Item 1}}{=} \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + B_s^2 - t = \mathbb{E}\left(B_t - B_s\right)^2 + B_s^2 - t = B_s^2 - s$$

donc $B_t^2 - t$ est une martingale.

Item 3

Comme $\tilde{B}$ est une mouvement brownien standard sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alors B^1 et B^2 sont des mouvements browniens par rapport à $\mathcal{F}_s^{\tilde{B}}$.

Soit $s < t$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[B_t^1B_t^2 \mid \mathcal{F}_s^{\tilde{B}}\right] &= \mathbb{E}\left[(B_t^1 - B_s^1)(B_t^2 - B_s^2) \mid \mathcal{F}_s^{\tilde{B}}\right] + \mathbb{E}\left[B_t^1B_s^2 \mid \mathcal{F}_s^{\tilde{B}}\right] + \mathbb{E}\left[B_s^1B_t^2 \mid \mathcal{F}_s^{\tilde{B}}\right] - \mathbb{E}\left[B_s^1B_s^2 \mid \mathcal{F}_s^{\tilde{B}}\right] \\ &\mathbb{E}\left((B_t^1 - B_s^1)(B_t^2 - B_s^2)\right) + B_s^2\mathbb{E}\left[B_t^1 \mid \mathcal{F}_s^{\tilde{B}}\right] + B_s^1\mathbb{E}\left[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s^{\tilde{B}}\right] - B_s^1B_s^2 \\ &= \mathbb{E}\left((B_t^1 - B_s^1)\right)\mathbb{E}\left((B_t^2 - B_s^2)\right) + B_s^2B_s^1 + B_s^1B_s^2 - B_s^1B_s^2 \\ &= B_s^1B_s^2\end{aligned}$$

On a aussi que X_t est $\mathcal{F}_s^{\tilde{B}}-$mesurable et intégrable, donc (X_t) est une martingale.

Correction Exercice 2 : Martingales et filtrations.

Item 1

Alors $(X_t)_{t\geq 0}$ une $\mathcal{F}^X-$martingale. Alors, pour tout $t \geq 0$, $X_0 = \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_0^X\right]$ et en prenant l'espérance:

$$\mathbb{E}\left(X_0\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_0^X\right]\right) = \mathbb{E}\left(X_t\right)$$

Item 2

Soit $X_t = tB_t$ avec $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.

$$\mathbb{E}\, X_0 = t\mathbb{E}\, B_t = 0 = \mathbb{E}\, X_t$$

mais X_t n'est pas une martingale.

Item 3

Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ et X une v.a. Alors, il existe une v.a. Z, $\mathcal{G}-$mesurable tel que pour toute v.a. U $\mathcal{G}-$mesurable, on a:

$$\mathbb{E}\, XU = \mathbb{E}\, ZU \quad \text{avec} \quad Z = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$$

On sait que $(X_t)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{N}_t-$adapté. $\mathcal{F}_t^X$ est la filtration naturelle de (X_t) donc pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{N}_t$.
Soit U une v.a. $\mathcal{F}_s^X-$mesurable et X_t une v.a. Alors par définition:

$$\mathbb{E}\ (X_t U) = \mathbb{E}\ \left(\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s^X\right] U\right)$$

mais $\mathcal{F}_s^X \subset \mathcal{N}_s$ donc U est aussi une v.a. $\mathcal{N}_s-$mesurable et donc on a:

$$\mathbb{E}\,(X_t U) = \mathbb{E}\ (\mathbb{E}\,[X_t \mid \mathcal{N}_s] U)$$

De plus, X_t est une $\mathcal{N}_t-$martingale.
Donc:

$$\mathbb{E}\,[X_t \mid \mathcal{N}_s] = X_s = \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s^X\right]$$

donc $(X_t)_{t\geq 0}$ est aussi une $\mathcal{F}_t^X-$martingale.

Correction Exercice 3 : La martingale de Wald.

Item 1

Pour tout $t \geq 0$:
$B_t \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t})$ donc $X_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma\sqrt{t})$.

Item 2

On a que (Z_t^u) est intégrable et $\mathcal{F}_t-$mesurable
Soit $s < t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,[Z_t^u \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(uX_t - ut\left(\mu + \frac{u\sigma^2}{2}\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left(-ut(\mu + \frac{u\sigma^2}{2})\right)\mathbb{E}\,[\exp(u(\mu t + \sigma B_t)) \mid \mathcal{F}_s] = \exp\left(-\frac{tu^2\sigma^2}{2}\right)\mathbb{E}\,[\exp(u\sigma B_t) \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \exp\left(-\frac{tu^2\sigma^2}{2}\right)\exp(u\sigma B_s)\mathbb{E}\,[\exp(u\sigma(B_t - B_s)) \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \exp\left(-\frac{tu^2\sigma^2}{2}\right)\exp(u\sigma B_s)\mathbb{E}\,(\exp(u\sigma(B_t - B_s))) \\
&= \exp\left(-\frac{tu^2\sigma^2}{2}\right)\exp(u\sigma B_s)\exp\left(\frac{u^2\sigma^2(t-s)}{2}\right) \\
&= \exp\left(u\sigma B_s - \frac{u^2\sigma^2 s}{2}\right) \\
&= \exp\left(uX_s - u\mu s - \frac{u^2\sigma^2 s}{2}\right) \\
&= Z_s^u
\end{aligned}$$

donc (Z_t^u) est une martingale.

Exercice 4 : Espérance conditionnelle, martingales, temps d'arrêt : rappels du cas discret

Item 1

Soit $k \geq 0$:

$$\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \cdots, X_k) \subset \sigma(\sigma(X_1, \cdots, X_k), \sigma(X_{k+1})) = \mathcal{F}_{k+1}$$

Item 2

On utilise les propriétés de l'espérance conditionnelle:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[Y \mid X_k\right]\right) &= \mathbb{E}\, Y \\
\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{k+1}\right] \mid \mathcal{F}_k\right] &\overset{\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1}}{=} \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_k\right] \\
\mathbb{E}\left[f(X_k)Y \mid X_k\right] &\overset{f(X_k) \subseteq \mathcal{F}_k}{=} f(X_k)\mathbb{E}\left[Y \mid X_k\right] \\
\mathbb{E}\left[f(X_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k\right] &\overset{X_{k+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_k}{=} \mathbb{E}\left(f(X_{K+1})\right)
\end{aligned}$$

Item 3

La filtration $\mathcal{F}_{k-1}$ représente l'ensemble d'informations qu'on a sur le jeu après $k-1$ tirages.

La mise pour le $k-$ième tirage -M_k- doit être décidée par le joueur avant ce tirage et doit être basée seulement sur l'information qu'on a sur les tirages 1 à $k-1$. Donc la mise M_k est $\mathcal{F}_{k-1}-$mesurable.

Item 4

Soit $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}\left[z + M_1X_1 + \cdots + M_{k+1}X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right] &= z + M_1X_1 + \cdots + M_kX_k + \mathbb{E}\left[M_{k+1}X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right] \\
\overset{M_{k+1} \subseteq \mathcal{F}_k}{=} Z_k + M_{k+1}\mathbb{E}\left[X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right] &\overset{X_{k+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_k}{=} Z_k + M_{k+1}\mathbb{E}\, X_{k+1} = Z_k
\end{aligned}$$

De la même manière, on montre que $\mathbb{E}\left[Z_{k+n} \mid \mathcal{F}_k\right] = Z_k$.

On a:

$$\mathbb{E}\left[Z_{k+n} \mid \mathcal{F}_k\right] = Z_k$$

donc en passant à l'espérance:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, Z_{k+n} = \mathbb{E}\, Z_k = \mathbb{E}\, Z_1 = z + \mathbb{E}\, M_1Z_1 = z + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[M_1X_1 \mid \mathcal{F}_0\right]\right) &\overset{M_1 \subseteq \mathcal{F}_0}{=} z + \mathbb{E}\left(M_1\mathbb{E}\left[X_1 \mid \mathcal{F}_0\right]\right) \\
\overset{X_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_0}{=} z + \mathbb{E}\left(M_1\mathbb{E}\left(X_1\right)\right) = z
\end{aligned}$$

donc le gain que le joueur peut espérer de gagner est sa mise initiale z.

Item 5

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_{T\wedge(k+1)} \mid \mathcal{F}_k\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T\leq k} Z_{T\wedge(k+1)} \mid \mathcal{F}_k\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T\geq k+1} Z_{T\wedge(k+1)} \mid \mathcal{F}_k\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T\leq k} Z_T \mid \mathcal{F}_k\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T\geq k+1} Z_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right]
\end{aligned}
$$

T est un temps d'arrêt, donc, par définition, $\{T \leq k\}$ et $\{T \leq k\}^c = \{T > k\} = \{T \geq k+1\}$ sont $\mathcal{F}_k-$mesurables.
Donc la v.a:

$$
\mathbb{1}_{T\leq k} Z_T = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{1}_{T=k} Z_T = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{1}_{T=k} Z_k
$$

est $\mathcal{F}_k-$ mesurable et $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T\leq k} Z_T \mid \mathcal{F}_k\right] = \mathbb{1}_{T\leq k} Z_T$.
De plus:

$$
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T\geq k+1} Z_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right] = \mathbb{1}_{T\geq k+1} \mathbb{E}\left[Z_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right] = \mathbb{1}_{T\geq k+1} Z_k
$$

En sommant:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_{T\wedge(k+1)} \mid \mathcal{F}_k\right] &= \underbrace{\mathbb{1}_{T\leq k Z_T}}_{\mathcal{F}_k\text{mesurable}} + \underbrace{\mathbb{1}_{T\geq k+1} Z_k}_{\mathcal{F}_k\text{mesurable}} \\
&= Z_{T\wedge k}
\end{aligned}
$$

Donc $Z_{T\wedge k}$ est $\mathcal{F}_k-$mesurable. En plus, si elle est intégrable:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|Z_{T\wedge k}\right| \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left(|M_i||X_i|\right) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[|M_i||X_i| \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left(|M_i| \mathbb{E}\left[|X_i| \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left(|M_i| \mathbb{E}\left(|X_i|\right)\right) = 2\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left(|M_i|\right) \leq 2kC_M < \infty
\end{aligned}
$$

où C_M est la borne de la suite (M_k).
On suppose maintenant T borné par N. Alors, pour tout $k \leq 1$:

$$
|Z_{T\wedge N}| \leq \sum_{i=0}^{T\wedge k} |M_i X_i| \leq \sum_{i=0}^{N} |M_i X_i| \leq NC_M < \infty
$$

et $\mathbb{P}-$p.s. $\lim_{k\to\infty} Z_{T\wedge k} = Z_T$. Donc par le théorème de convergence dominée:

$$
\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\, Z_{T\wedge k} = \mathbb{E}\, Z_t
$$

mais d'après le point précèdent, $(Z_{T\wedge k})$ est une martingale donc

$$
\mathbb{E}\, Z_{T\wedge k} = \mathbb{E}\, Z_0 = z
$$

donc

$$
\mathbb{E}\, Z_T = \mathbb{E}\, Z_0 = z
$$

$\mathbb{E}\, Z_{T\wedge N} = \mathbb{E}\, Z_T$.
si T est un temps d'arrêt bornée.
Remarque: On peut appliquer directement le théorème d'arrêt pour martingales.

Item 6

Pour montrer que $T = \inf\{k \geq 1 \mid Z_k = z+1\}$ est un temps d'arrêt, il faut montrer que $\{T \leq k\}$ est dans $\mathcal{F}_k$ pour tout $k \geq 1$.

Soit $k \geq 1$:

$$\{T \leq k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{Z_i \geq z+1\}$$

Comme Z_i est $\mathcal{F}_i-$mesurable, alors l'événement $\{Z_i \geq z+1\}$ est dans $\mathcal{F}_i$. Ensuite, $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est une filtration donc pour tout $i \leq k$, $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_k$ ce qui montre que l'événement $\{Z_i \geq z+1\}$ est dans $\mathcal{F}_k$. On conclu que $\{T \leq k\}$ est l'union finie d'événements dans $\mathcal{F}_k$, donc $\{T \leq k\} \in \mathcal{F}_k$.

On conclut que T est un $\mathcal{F}_k-$temps d'arrêt.

Supposons que T est bornée. Donc

$$\mathbb{E}\, Z_T = \mathbb{E}\, Z_0 = z$$

mais par la définition de T, $Z_T \geq z+1$ $\mathbb{P}-$p.s. Donc

$$\mathbb{E}\, Z_T \geq z+1 \neq z = \mathbb{E}\, Z_T$$

Contradiction, donc T n'est par bornée.

Correction Exercice 5 : L'intégrale d'Itô pour des processus élémentaires.

Item 1

Soit $0 < u < t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_u^B\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s\, dB_s \mid \mathcal{F}_u^B\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \sum_{i=0}^{N-1} c_i \mathbb{1}_{\{s\in[t_i,t_{i+i}[\}}\, dB_s \mid \mathcal{F}_u^B\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1} c_i (B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}) \mid \mathcal{F}_u^B\right]
\end{aligned}$$

Comme $0 < u < t < T$, donc il existe un indice $j \in \{1, \cdots, N-1\}$ tel que $u \in [t_j, t_{j+1}[$. Donc:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1} c_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mid \mathcal{F}_u^B\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{j-1} c_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mid \mathcal{F}_u^B\right] + \mathbb{E}\left[c_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \mid \mathcal{F}_u^B\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\sum_{i=j+1}^{N-1} c_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mid \mathcal{F}_u^B\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{j-1} c_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mid \mathcal{F}_u^B\right] + \mathbb{E}\left[c_j (B_u - B_{t_j}) \mid \mathcal{F}_u^B\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[c_j (B_{t_{j+1}} - B_u) \mid \mathcal{F}_u^B\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{i=j+1}^{N-1} c_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mid \mathcal{F}_u^B\right]
\end{aligned}$$

On rappelle que $t_j \leq u < t_{j+1}$.

On a alors que $\sum_{i=0}^{j-2} c_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + c_j (B_u - B_{t_j})$ est $\mathcal{F}_u^B$ mesurable.

De plus, en utilisant l'indépendance des incréments, on a que $\sum_{i=j+1}^{N-1} c_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_u^B$.

Et aussi, comme $t_j \leq u$ et $c_j \in \mathcal{F}_{t_j}^B \subseteq \mathcal{F}_u^B$:

$$\mathbb{E}\left[c_j (B_{t_{j+1}} - B_u) \mid \mathcal{F}_u^B\right] = c_j \mathbb{E}\left[B_{t_{j+1}} - B_u \mid \mathcal{F}_u^B\right] \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} c_j \mathbb{E}\left(B_{t_{j+1}} - B_u\right) = 0$$

Finalement, en utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_u^B\right] &= \sum_{i=0}^{j-1} c_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + c_j(B_u - B_{t_j}) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(\sum_{i=j+1}^{N-1} c_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right) \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} c_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + c_j(B_u - B_{t_j}) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=j+1}^{N-1} \mathbb{E}\left[c_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i}^B\right]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} c_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + c_j(B_u - B_{t_j}) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=j+1}^{N-1} c_i\mathbb{E}\left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i}^B\right]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} c_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + c_j(B_u - B_{t_j}) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=j+1}^{N-1} c_i\mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right) \\
&= \int_0^u \sum_{i=0}^{N-1} c_i \mathbb{1}_{s\in[t_i,t_{i+1}[}\, dBs \\
&= \int_0^u \phi_s\, dBs \\
&= X_u
\end{aligned}
$$

De plus, X_t est $\mathcal{F}_t^B-$mesurable est intégrable comme somme de fonctions $\mathcal{F}_t^B-$mesurables et intégrables. Donc $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale.

Item 2

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\, X_t^2 &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N-1} c_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N-1} c_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right) + 2\mathbb{E}\left(\sum_{i<j}^{N-1} c_i c_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[c_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}^b\right]\right) + 2\sum_{i<j}^{N-1} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[c_i c_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_{i+1}}^B\right]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}\, c_i^2\mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2 + 2\sum_{i<j}^{N-1} \mathbb{E}\left(c_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\mathbb{E}\left[c_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_{i+1}}^B\right]\right)
\end{aligned}
$$

Pour le second terme, si $i+1=j$, alors on a pour le terme de l'espérance conditionnelle:

$$
\mathbb{E}\left[c_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}^B\right] = c_j\mathbb{E}\left[B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \mid \mathcal{F}_{t_j}^B\right] \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} c_j\mathbb{E}\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) = 0
$$

Si $i+1<j$, alors $\mathcal{F}_{t_{i+1}} \subset \mathcal{F}_{t_j}$ donc:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[c_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_{i+1}}^B\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[c_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}^B\right] \mid \mathcal{F}_{t_{i+1}}^B\right] \\
&= \mathbb{E}\left[c_j\mathbb{E}\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}^B\right] \mid \mathcal{F}_{t_{i+1}}^B\right] \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{E}\left[c_j\mathbb{E}\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) \mid \mathcal{F}_{t_{i+1}}^B\right] \overset{\mathbb{E}\, B_t = 0}{=} 0
\end{aligned}
$$

Donc finalement, on conclut que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,X_t^2 &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}\,c_i^2 \mathbb{E}\,(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}\,c_i^2 (t_{i+1} - t_i) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N-1} c_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right)
\end{aligned}$$