IMAFA 2017– Modèles Mathématiques Continus pour la Finance
TD1 – Partie 2
Révisions calcul stochastique

Exercice 1

Item 1

Soient $s < t$

$$\mathbb{E}\left[Z_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[Z_t^2 - Z_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + Z_s^2 - t = \mathbb{E}\left[(Z_t - Z_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + Z_s^2 - t = \mathbb{E}\,(Z_t - Z_s)^2 + Z_s^2 - t = Z_s^2 - s$$

donc $X_t = B_t^2 - t$ est une martingale.

Item 2

On note $L_t^\lambda = \exp\left(\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Voir feuilles de TD précédentes.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

On a que $Z_0 = 0$. On montre que les incréments sont stationnaires, donc que $Z_t - Z_s \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t-s})$ pour tout $t \leq s$. Soient $s < t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\frac{L_t^\lambda}{L_s^\lambda} &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{L_t^\lambda}{L_s^\lambda} \mid \mathcal{F}_s\right]\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{L_s^\lambda}\mathbb{E}\left[L_t^\lambda \mid \mathcal{F}_s\right]\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{L_s^\lambda}L_s^\lambda\right] = 1 \\ &= \mathbb{E}\,\exp\left(\lambda(Z_t - Z_s) - \frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right) \end{aligned}$$

donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{E}\,\exp\left(\lambda(Z_t - Z_s)\right) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right)$. On reconnait la transformation de Laplace de la variable aléatoire $Z_t - Z_s$ qui est égale à la transformée de Laplace d'une loi normale centrée et de variance $t - s$, donc $Z_t - Z_s \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t-s})$.

On montre maintenant l'indépendance des accroissements. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $s < t$. Alors:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp(\lambda(Z_t - Z_s) + \mu Z_s) &= \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}t + \frac{(\mu-\lambda)^2}{2}s\right)\mathbb{E}\exp\left(\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\exp\left((\mu-\lambda)Z_s - \frac{(\mu-\lambda)^2}{2}s\right) \\
&= \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}t + \frac{(\mu-\lambda)^2}{2}s\right)\mathbb{E}\left[L_s^{\mu-\lambda}\mathbb{E}\left[L_t^{\lambda} \mid \mathcal{F}_s\right]\right] \\
&= \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}t + \frac{(\mu-\lambda)^2}{2}s\right)\mathbb{E}\, L_s^{\mu-\lambda}L_s^{\lambda} \\
&= \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}t + \frac{(\mu-\lambda)^2}{2}s\right)\mathbb{E}\exp\left(\mu Z_s - \frac{\lambda^2}{2}s - \frac{(\mu-\lambda)^2}{2}s\right) \\
&= \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}(t-s) + \frac{\mu^2}{2}s\right)\mathbb{E}\exp\left(\mu Z_s - \frac{\mu^2}{2}s\right) \\
&= \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}(t-s) + \frac{\mu^2}{2}s\right)
\end{aligned}
$$

donc on constate que la transformée de Laplace de $(Z_t - Z_s, Z_s)$ est égale au produit des transformées de Laplace des marginales. Cela implique alors que $Z_t - Z_s \perp\!\!\!\perp Z_s$.

Donc par les trois propriétés, on arrive à la conclusion que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Item 3

i)

L'image de $\mathbb{Q}$ est dans $[0,1]$. Soit $A \in \mathcal{F}_T$ parce que:

$$
0 \leq \mathbb{E}\, L_T \mathbb{1}_A \leq \mathbb{E}\, L_T = 1
$$

ii)

$\mathbb{Q}(\Omega) = 1$:

$$
\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}\, L_T \mathbb{1}_\Omega = \mathbb{E}\, L_T = 1
$$

iii)

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'événements disjoints dans $\mathcal{F}_T$. Alors:

$$
\mathbb{Q}\left(\cup_{n\geq 0} A_n\right) = \mathbb{E}\, L_T \mathbb{1}_{\cup_{n\geq 0} A_n} = \mathbb{E}\, L_T\left(\sum_{n\geq 0}\mathbb{1}_{A_n}\right) = \mathbb{E}\sum_{n\geq 0} L_T \mathbb{1}_{A_n} = \sum_{n\geq 0}\mathbb{E}\, L_T\mathbb{1}_{A_n} = \sum_{n\geq 0}\mathbb{Q}(A_n)
$$

La deuxième égalité est valide parce que les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'inversion intégrale et sommation se fait parce que les éléments de la somme sont positifs.

Par ces trois items **i**, **ii** et **iii**, on obtient que $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité.

Soit $t \in [0,T]$:

$$
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} X = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} L_T X = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T X \mid \mathcal{F}_t]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T \mid \mathcal{F}_t]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} X L_t
$$

Soit $A \in \mathcal{F}_t$, alors:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{F}_t]\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} Y\mathbb{1}_A = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} L_T Y \mathbb{1}_A = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T Y \mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T Y \mid \mathcal{F}_t]\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(\mathbb{1}_A \frac{1}{L_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T Y \mid \mathcal{F}_t]\right) L_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_A \frac{1}{L_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T Y \mid \mathcal{F}_t]\right]
\end{aligned}
$$

en utilisant la propriété précédente pour la dernière égalité. Donc par la définition de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$, on conclut que:

$$
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{L_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T Y \mid \mathcal{F}_t]
$$

Item 4

a)

On a que $(Z_t^*)_{t\in[0,T]}$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}-$adaptée. Soient $0 \leq s < t \leq T$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\alpha(Z_t^* - Z_s^*)\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \frac{1}{L_s^\lambda}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[L_T^\lambda \exp\left(\alpha(Z_t^* - Z_s^*)\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \frac{1}{L_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[L_t \exp\left(\alpha(Z_t^* - Z_s^*)\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \frac{1}{L_s^\lambda}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\exp\left(\alpha(Z_t - Z_s) - \alpha\lambda(t-s)\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \frac{1}{L_s^\lambda}\exp\left(\frac{(\alpha+\lambda)^2}{2}t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\exp\left(-\alpha Z_s - \alpha\lambda(t-s)\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[L_t^{\alpha+\lambda} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \frac{1}{L_s^\lambda}\exp\left(\frac{(\alpha+\lambda)^2}{2}t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\exp\left(-\alpha Z_s - \alpha\lambda(t-s)\right)L_s^{\alpha+\lambda} \\
&= \exp\left(-\lambda Z_s + \frac{\lambda^2}{2}s\right)\exp\left(\frac{(\alpha+\lambda)^2}{2}t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\exp\left(-\alpha Z_s - \alpha\lambda(t-s)\right)\exp\left((\alpha+\lambda)Z_s - \frac{(\alpha+\lambda)^2}{2}s\right) \\
&= \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}(t-s)\right)
\end{aligned}
$$

b)

On peut introduire un nouveau processus $L_t^* = \exp(\alpha Z_t^* - \frac{1}{2}\alpha t)$ et on a, d'après la formule précédente que $(L_t^*)_{t\in[0,T]}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (en vérifiant aussi les deux propriétés qui restent, processus adapté et intégrable). Et donc, d'après la question 2, $(Z_t^*)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$.

Item 5

On sait que $Z_t^* = Z_t - \lambda t$ alors

$$r\,dt + \sigma\,dZ^*t = (r - \lambda\sigma)\,dt + \sigma\,dZ_t$$

Par unicité du processus d'Ito, il faut que $\mu = r - \lambda\sigma$, soit $\lambda = \dfrac{r-\mu}{\sigma}$. $\mathbb{Q}$ s'appelle la probabilité risque neutre parce que sous cette probabilité l'actif risqué et l'actif sans risque ont le même rendement.

Item 6

$$d\tilde{S}_t = d\left(e^{-rt}S_t\right) = -re^{-rt}S_t\,dt + e^{-rt}\,dS_t = -r\tilde{S}_t\,dt + rS_t\,dt + \sigma S_t\,dZ_t^* = \sigma S_t\,dZ_t^* \tag{1}$$

Comme $(Z_t^*)_{t\in[0,T]}$ est une brownien sous $\mathbb{Q}$ et par la condition de Novikov, on a que $(\tilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale.

Exercice 2

1)

On a que $dX_t = (1 + X_t)\,dW_t$:

$$dY_t = \frac{1}{1+X_t}\,dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+X_t)^2}(1+X_t)^2\,dt = -\frac{1}{2}\,dt + dW_t \tag{2}$$

donc $Y_t = -\frac{1}{2}t + W_t$

2)

Comme $X_t = 1 + e^{Y_t}$, on a que $X_t = 1 + \exp\left(-\frac{1}{2}t + W_t\right)$

Exercice 3

1)

$$dY_t = \beta Y_t\,dt + e^{\beta t}(\alpha - \beta X_t)\,dt + \sigma e^{\beta t}\,dW_t = \alpha e^{\beta t}\,dt + \sigma e^{\beta t}\,dW_t$$

donc

$$Y_t = x_0 + \alpha \int_0^t e^{\beta s}\,ds + \sigma \int_0^t e^{\beta s}\,dW_s$$

2)

$$X_t = e^{-\beta t}Y_t = x_0 e^{-\beta t} + \alpha \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\,ds + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\,dW_s = x_0 e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\,dW_s$$

3)

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(x_0 e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}), \sigma^2 \int_0^t e^{-2\beta(t-s)}\,ds\right)$$

donc

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(x_0 e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}), \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})\right)$$

4)

$\frac{\alpha}{\beta}$ représente la moyenne en temps longue de X_t.

5)

Le modèle Vasicek a une probabilité non nulle d'avoir des valeur négatives.

4)

1)

$$dY_t = \beta e^{\beta t} X_t\,dt + e^{\beta t}(\alpha - \beta X_t)\,dt + \sigma e^{\beta t}\sqrt{X_t}\,dW_t = \alpha e^{\beta t}\,dt + \sigma e^{\beta t}\sqrt{X_t}\,dW_t$$

et en prenant l'espérance, on obtient:

$$d\mathbb{E}\,Y_t = \alpha e^{\beta t}\,dt \implies \mathbb{E}\,Y_t = x_0 + \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t} - 1)$$

alors:

$$\mathbb{E}\,X_t = e^{-\beta t}\mathbb{E}\,Y_t = x_0 e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$$

On peut prendre l'espérance parce que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,X_t &\leq \left|\mathbb{E}\int_0^t (\alpha - \beta X_s)\,ds\right| + \mathbb{E}\left|\int_0^t e^{\beta s}\sqrt{X_s}\,dW_s\right| \\
&\leq \alpha t + \beta \int_0^t \mathbb{E}\,X_s\,ds + C\mathbb{E}\sqrt{\int_0^t e^{2\beta s} X_s\,ds} \\
&\leq \alpha t + \beta \int_0^t \mathbb{E}\,X_s\,ds + C + C\mathbb{E}\int_0^t e^{2\beta s} X_s\,ds
\end{aligned}$$

en on conclut par le lemme de Gronwall. L'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy pour passer de la première à la deuxième ligne.

2)

$$\begin{aligned} dZ_t = d(e^{2\beta t}X_t^2) &= 2\beta e^{2\beta t}X_t^2\,dt + 2e^{2\beta t}X_t\,dX_t + \sigma e^{2\beta t}X_t\,dt \\ &= \beta Z_t\,dt + 2e^{2\beta t}X_t(\alpha - \beta X_t)\,dt + 2\beta e^{2\beta t}X_t\sqrt{X_t}\,dW_t + \sigma e^{2\beta t}X_t\,dt \\ &= 2\alpha e^{2\beta t}X_t\,dt + \sigma e^{2\beta t}X_t\,dt + 2\beta e^{2\beta t}X_t\sqrt{X_t}\,dW_t \end{aligned}$$

donc:

$$d\mathbb{E}\,Z_t = (2\alpha + \beta)e^{2\beta t}\mathbb{E}\left[X_t\right]dt$$

qui permet de conclure