IMAFA 2016– Modèles Mathématiques Continus pour la Finance
TD1 – Exercices de probabilités

November 14, 2016

Correction Exercice 1 : Calculs sur la loi gaussienne

La densite de la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est:

$$g_X : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

et on a:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, X &= m \\
\mathbb{E}\, X^2 &= \sigma^2 + m^2 \\
\mathbb{E}\, \exp(\lambda X) &= \exp\left(m\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, \exp(\lambda X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda x) \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\lambda x - \frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2mx + m^2)\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2(m+\lambda\sigma^2)x + m^2)\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2(m+\lambda\sigma^2)x + (m+\lambda\sigma^2)^2) + \frac{(m+\lambda\sigma^2)^2}{2\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \exp\left(\frac{(m+\lambda\sigma^2)^2}{2\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2(m+\lambda\sigma^2)x + (m+\lambda\sigma^2)^2)\right) dx \\
&= \exp\left(\frac{(m+\lambda\sigma^2)^2}{2\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (m+\lambda\sigma^2))^2\right) dx \\
&= \exp\left(\frac{(m+\lambda\sigma^2)^2}{2\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(\lambda m + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Correction Exercice 2 : Inégalités sur les lois

Item 1

Soit $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}\, |X|^p = \int_\Omega |X|^p \, d\mathbb{P} = \int_{|X| \le \lambda} |X|^p \, d\mathbb{P} + \underbrace{\int_{|X|<\lambda} |X|^p \, d\mathbb{P}}_{\ge 0} \ge \int_{|X| \ge \lambda} |X|^p \, d\mathbb{P}$$

donc, en divisant par λ^p:

$$\frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}\,|X|^p \geq \int_{\frac{|X|}{|\lambda|}\geq 1} \left(\frac{|X|}{|\lambda|}\right)^p d\mathbb{P} \geq \int_{\frac{|X|}{|\lambda|}\geq 1} 1^p \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(|X| \geq \lambda\right) \quad \square$$

Item 2

Soient $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$

$$M = \mathbb{E}\,\exp(\alpha|X|) = \int_\Omega \exp(\alpha|X|)\,d\mathbb{P} = \int_{|X|\leq\lambda} \exp(\alpha|X|)\,d\mathbb{P} + \underbrace{\int_{|X|<\lambda} \exp(\alpha|X|)\,d\mathbb{P}}_{\geq 0}$$

$$\geq \int_{|X|\geq\lambda} \exp(\alpha|X|)\,d\mathbb{P} = \int_{\frac{|X|}{|\lambda|}\geq 1} \exp(\alpha\lambda\frac{|X|}{\lambda})\,d\mathbb{P} \geq \int_{\frac{|X|}{|\lambda|}\geq 1} \exp(\alpha\lambda)\,d\mathbb{P} = \exp(\alpha\lambda)\mathbb{P}\left(|X| \geq \lambda\right) \quad \square$$

Remarque: Soit X une variable aléatoire. Si

$$\forall\lambda > 0, \quad \lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}\mathbb{P}\left(X > x\right) = \infty$$

alors on dit que X est a queue lourde. Les lois à queue lourde sont beaucoup utilisées en finance ou économétrie (loi log-normale, loi de Pareto, lois de Weibull, Pearson type 4, etc.)

Correction Exercice 3 : Simulation de v.a. : algorithme de Box-Müller

Remarque: Soient f, g deux fonctions mesurables et X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ restent indépendantes. La loi jointe des deux variables aléatoires indépendantes est déterminée par les deux marginales.

On calcule les marginales de R et θ. Soit f une fonction mesurable:

$$\mathbb{E}\,f(\sqrt{-2\ln(U_1)}) = \int_{u\in[0,1]} f(\sqrt{-2\ln(u)})\,du \overset{u\to\exp(-r^2/2)}{=} \int_0^\infty f(r)\underbrace{r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)}_{\text{densite de } R} dr$$

Intégration par changement de variables dans $\mathbb{R}^d$

Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ une fonction intégrable et $\psi : U \mapsto \mathbb{R}^d$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et injective. Alors:

$$\int_{\psi(U)} f(v)\,dv = \int_U f(\psi(u))|\det(\text{Jac}(\psi)(u))|\,du$$

où $\text{Jac}(\psi)$ est le Jacobien de la fonction ψ

On remarque de $R^2 \sim \mathcal{E}(1/2)$.
Comme $U_2 \sim \mathcal{U}([0;1])$ alors $\theta = 2\pi U_2 \sim \mathcal{U}([0,2\pi])$.
D'après la remarque précédente, la loi jointe du couple (R,θ) est déterminée par le produit des densités de R et θ:

$$p_{R.\theta} : (r,t) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \mapsto \frac{1}{2\pi} r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\mathbb{1}_{[0,\infty[}(r)\mathbb{1}_{[0,2\pi]}(t)$$

On définit le changement de variables φ:

$$(X,Y) = \varphi(R,\theta)$$

définit sur le domaine $\mathbb{R}_+ \times \left(]0,2\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}\right)$:
La formule d'inversion sur ce domaine est:

$$\varphi(r,t) = (x,y) \iff (\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), r = \sqrt{x^2+y^2})$$

On calcule le jacobien de cette transformation inverse:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et la densité se transforme en

$$\frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr d\theta \rightsquigarrow \frac{1}{2\pi}\sqrt{x^2+y^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot \underbrace{\left|\det\left(\mathrm{Jac}(\varphi^{-1})(x,y)\right)\right|}_{=1}\, dxdy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

On conclut que les variables aléatoires X et Y sont gaussiennes, centrées, réduites et indépendantes.

Remarques: L'algorithme de Box-Müller permet de simuler, à partir de deux variables uniformes indépendantes, deux variables gaussiennes, centrées, réduites et indépendantes.

Il existe d'autres algorithmes:

- Par inversion de la fonction de répartition: méthode approximative parce qu'il faut inverser la fonction erreur.
- Par rejet: la méthode polaire, la méthode de ziggourat (très rapide sur CPU donc algorithme par défaut sur Matlab)

Sur GPU, les méthodes par inversion sont préférées pour éviter le branchement de l'exécution.

Attention!

Évitez d'utiliser la méthode de Box-Müller avec un générateur linear congruentiel sur une architecture 32 bits ou moins (precision simple) parce que la v.a sera bornée par $\sqrt{-2\ln(2^{-32})} \approx 6.66$

Correction Exercice 4 : Vecteurs gaussiens et corrélation

Item 1

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X_1) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\mu_1 + \sigma_1 Y_1) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\sigma_1 Y_1) = \sigma_1^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y_1) = \sigma_1^2$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X_2) &= \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\mu_2 + \sigma_2(\rho Y_1 + \sqrt{1-\rho^2}Y_2)) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\sigma_2(\rho Y_1 + \sqrt{1-\rho^2}Y_2)) \\ &\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\sigma_2\rho Y_1) + \mathbb{V}\mathrm{ar}\,(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Y_2) = \sigma_2^2\rho^2\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y_1) + \sigma_2^2(1-\rho^2)\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y_2) = \sigma_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X_1, X_2) &= \mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X_2, X_1) = \mathbb{C}\mathrm{ov}\,(\mu_1 + \sigma_1 Y_1, \mu_2 + \sigma_2(\rho Y_1 + \sqrt{1-\rho^2}Y_2)) \\ &= \mathbb{C}\mathrm{ov}\,(\sigma_1 Y_1, \sigma_2(\rho Y_1 + \sqrt{1-\rho^2}Y_2)) = \mathbb{C}\mathrm{ov}\,(\sigma_1 Y_1, \sigma_2\rho Y_1) + \underbrace{\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(\sigma_1 Y_1, \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Y_2))}_{=0,\ \text{car } Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2} \\ &= \sigma_1\sigma_2\rho\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(Y_1) = \sigma_1\sigma_2\rho\end{aligned}$$

La matrice de covariance de X_1 et de X_2 est donc:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

et la corrélation vaut:

$$\mathbb{C}\mathrm{orr}\,(X_1, X_2) = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X_1)\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X_2)}} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2} = \rho$$

Item 2

Soit $X = (X_1, \cdots, X_d)$ un vecteur gaussien de moyenne $\mu \in \mathbb{R}^d$ et matrice de covariance $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ qu'on va supposer *inversible* $\iff \det(\Sigma) \neq 0$. La densité de X est:

$$p_X : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

Donc, on note :

$$\Sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\Sigma) = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

On va supposer que $\sigma_1 > 0$ (X_1 n'est pas une constante), $\sigma_2 > 0$ (équivalent à dire que X_2 n'est pas une constante) et que $|\rho| \neq 1$ (c'est-a-dire $\pm X_1 \neq \pm X_2$ p.s.). Si ces conditions ne sont pas remplies, la matrice Σ n'est pas de rang maximal et la densité de (X_1, X_2) n'est pas absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Il faudra alors réduire la dimension du problème.

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\det(\Sigma)}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

La densité jointe s'écrit alors:

$$p_{X_1,X_2} : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)\right)$$

La densité conditionnelle de X_2 sachant X_1 s'écrit:

$$\begin{aligned}
p_{X_1=x_1}(x_2) = \frac{p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{p_{X_1}(x_1)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\rho^2(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\frac{\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} - \frac{\rho(x_1-\mu_1)}{\sigma_1}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left(x_2-\mu_2 - \frac{\rho\sigma_2(x_1-\mu_1)}{\sigma_1}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

L'identification des paramètres permet de conclure.

Remarque: Dans un cadre plus générale, la loi conditionnelle d'un vecteur gaussien sachant un autre fait apparaitre le complement de Schur (montrant une nouvelle fois la connexion entre les variables aléatoires gaussiennes et l'algèbre linéaire).

Attention!

Soit X et Y deux variables gaussiennes.

$$\mathbb{C}\text{orr}\,(X, Y) = 0 \implies X \perp\!\!\!\perp Y \textbf{ ssi } (X, Y) \text{ est un vecteur gaussien}$$

Pour voir cela: prendre deux variables aléatoires indépendantes $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ and ϵ de loi $\mathbb{P}(\epsilon = -1) = \mathbb{P}(\epsilon = 1) = 1/2$. On montre que la variable $Y = \epsilon X$ suit une loi normale centrée, réduite et que $\mathbb{C}\text{orr}\,(X, Y) = 0$ mais évidement $X \not\perp\!\!\!\perp Y$.

Correction Exercice 5 : Convergence de variables aléatoires

Théorème de continuité de Lévy

Soit $(\varphi_n)_{n>0}$ une suite de fonctions caractéristiques (associe à une suite de v.a. $(X_n)_{n>0}$). Si elle converge simplement vers une fonction φ, alors φ est continue et la suite $(X_n)_{n>0}$ converge en loi vers une variable X qui a φ pour fonction caractéristique.

Soit $n \geq 1$:

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E}\exp(itX_n) = \exp\left(it\mu_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2\right)$$

Par continuité de φ_n:

$$\forall t > 0, \varphi_n \overset{n\to\infty}{\to} \varphi = \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

Donc, $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Correction Exercice 6 : L'espérance conditionnelle

Item 1

On sait que les v.a. de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes donc $S_n \perp\!\!\!\perp X_k$ pour tout $k > n$. Ce qui implique que $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) \perp\!\!\!\perp \sigma(X_1, S_n)$. Par la propriété admise, on obtient l'égalité demandé.

Item 2

Soient B un borélien et f un fonction définie par $f\colon (x,y) \mapsto x\mathbb{1}_{x+y\in B}$. De plus, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\overline{X}^j = \sum_{i=1, i\neq j}^n X_i$. Alors :

$$\mathbb{E}\left[X_j \mathbb{1}_{S_n\in B}\right] = \mathbb{E}\left[X_j \mathbb{1}_{X_j + \overline{X}^j \in B}\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X_j, \overline{X}^j\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f\left(X_j, \overline{X}^j\right) \mid \overline{X}^j\right]\right]$$

D'après le fait que la suite $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est i.i.d., on a que $X_j \perp\!\!\!\perp \overline{X}^j$, pour tout j, ce qui permet de réécrire:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f\left(X_j, \overline{X}^j\right) \mid \overline{X}^j\right]\right] = \mathbb{E}\left[\phi\left(\overline{X}^j\right)\right]$$

où :

$$\phi\colon x \mapsto \mathbb{E}\left[f(X_j, x)\right]$$

Mais la suite $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est i.i.d. donc pour $k \neq j$, quelque soit x, $\mathbb{E}\left[f(X_j, x)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_k, x)\right]$ et $\overline{X}^j \overset{\mathcal{L}}{=} \overline{X}^k$. On en déduit que pour tout borélien B, $\mathbb{E}\left[X_j \mathbb{1}_{S_n\in B}\right] = \mathbb{E}\left[X_k \mathbb{1}_{S_n\in B}\right]$. Pour conclure, on utilise la définition de l'espérance conditionnelle.

Item 3

On a que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_1 \mid S_n\right] = \cdots = \mathbb{E}\left[X_n \mid S_n\right] &= \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}\left[X_1 \mid S_n\right] + \ldots + \mathbb{E}\left[X_n \mid S_n\right]\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[X_1 + \ldots + X_n \mid S_n\right] \\ &= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[S_n \mid S_n\right] = \frac{S_n}{n}\end{aligned}$$

Correction Exercice 7 : Quelques propriétés du mouvement brownien.

Les processus $\hat{B}_t$, $\tilde{B}_t$ et $\tilde{W}_t$ sont gaussiens et de moyenne nulle quelque soit $t \geq 0$.

$$\mathbb{E}\,\tilde{W}_t^2 = t \overset{t\to 0}{\to} 0$$

donc $\mathbb{E}\,\tilde{W}_0^2 = 0$ qui implique $\mathbb{E}\,\tilde{W}_0 = 0$.

On calcule les fonction de covariance pour toutes $s, t \geq 0$.

$$\mathbb{E}\,\hat{B}_s\hat{B}_t = \frac{1}{c^2}\mathbb{E}\,B_{c^2s}B_{c^2t} = \frac{1}{c^2}(c^2s) \wedge (c^2t) = s \wedge t$$

$$\mathbb{E}\,\tilde{B}_s\tilde{B}_t = \mathbb{E}\,(B_{s+a}-B_a)(B_{t+a}-B_a) = \mathbb{E}\,B_{s+a}B_{t+a} - \mathbb{E}\,B_{s+a}B_a - \mathbb{E}\,B_{t+a}B_a + \mathbb{E}\,B_aB_a = (s+a)\wedge(t+a) - a - a + a = s\wedge t$$

$$\mathbb{E}\,\tilde{W}_s\tilde{W}_t = st\mathbb{E}\,B_{\frac{1}{s}}B_{\frac{1}{t}} = st\frac{1}{s}\wedge\frac{1}{t} = s\wedge t$$

Les processus $\hat{B}_t$, $\tilde{B}_t$ et $\tilde{W}_t$ sont gaussiens, de moyenne nulle et de fonction de covariance $(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\mapsto s\wedge t$, donc ils sont des mouvements browniens.

Correction Exercice 8 : Intégrale du mouvement brownien.

Item 1

Pour $\mathbb{P}$ −presque tout $\omega\in\Omega$, la trajectoire $s\mapsto B_s$ est continue.

On fixe ω, alors pour $s\in[0,t]$, la fonction $s\mapsto B_s$ est continue sur un compacte, donc bornée, ce qui implique que I_t est bien définie au sens de Riemann et Lebesgue.

Item 2

Pour $\mathbb{P}$ −presque tout $\omega\in\Omega$, pour toute subdivision $0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=t$ on a:

$$I_t = \lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}(t_{i+1}-t_i)$$

où $h=\max_i\{t_{i+1}-t_i\}$.

En faisant une sommation par partie:

$$\begin{aligned}
I_n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}(t_{i+1}-t_i) &= t_nB_{t_n} - t_0B_{t_0} - \sum_{i=0}^{n-1} t_{i+1}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})\\
&= t_nB_{t_n} - \sum_{i=0}^{n-1} t_{i+1}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})(t_n-t_{i+1})
\end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}\,I_n = 0$$

En suite, on calcule la variance:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})(t_n-t_{i+1})\right) &= \sum_{i=0}^{n-1}(t_n-t_{i+1})^2\mathbb{V}\text{ar}\,(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(t_n-t_{i+1})^2(t_{i+1}-t_i) \overset{n\to\infty}{=} \int_0^t (t-s)^2\,ds = \frac{t^3}{3}
\end{aligned}$$

D'après l'exo précédant, $I_t\sim\mathcal{N}(0,t^3/3)$.

Item 3

Soit $s<t$, une subdivision $s=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=t$ et $h=\max_i\{t_{i+1}-t_i\}$:

$$
\begin{aligned}
I_t - I_s - (t-s)B_s &= \int_s^t B_u\,du - (t-s)B_s = \lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} B_u(t_{i+1}-t_i) - (t-s)B_s \\
&= tB_t - sB_s - \lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} t_{i+1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) - (t-s)B_s \\
&= t\underbrace{(B_t - B_s)}_{\perp\!\!\!\perp B_s} - \lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} t_{i+1}\underbrace{(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})}_{\perp\!\!\!\perp B_s}
\end{aligned}
$$

ce qui donne le résultat demandé.

Item 4

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(B_t) = t$$

D'après 2.:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(I_t) = \mathbb{E}\,I_t^2 = \frac{t^3}{3}$$

On calcule la covariance:

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(B_t I_t) = \mathbb{E}\,B_t \int_0^t B_s\,ds = \mathbb{E}\int_0^t B_t B_s\,ds \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^t \mathbb{E}\,(B_t B_s)\,ds = \int_0^t s\,ds = \frac{t^2}{2}$$

On peut utiliser le théorème de Fubini, parce que, pour tout $t > 0$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{E}\,|B_t B_s|\,ds &\le \int_0^t \sqrt{\mathbb{E}\,(B_t B_s)^2}\,ds = \int_0^t \sqrt{\mathbb{E}\,((B_t - B_s + B_s)B_s)^2}\,ds \\
&= \int_0^t \sqrt{\mathbb{E}\,((B_t - B_s)B_s)^2 + B_s^2}\,ds = \int_0^t \sqrt{s + (t-s)s}\,ds < +\infty
\end{aligned}
$$