

Quand les mathématiques se mettent en images

Pierre Kornprobst

NeuroMathComp project team
INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée

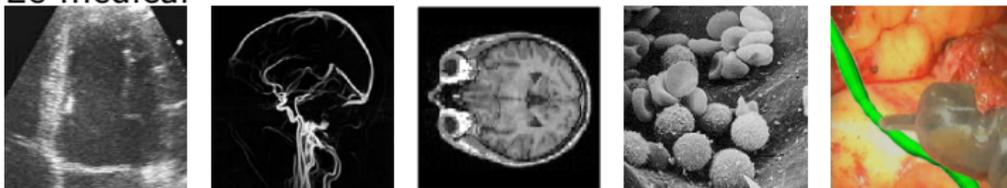
January 2009

Quand on parle vision algorithmique...

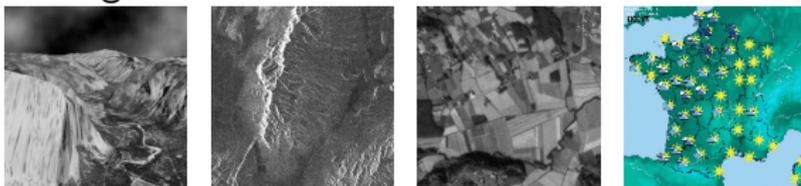
- Le grand public



- Le médical



- L'imagerie aérienne



Quand on parle vision algorithmique...

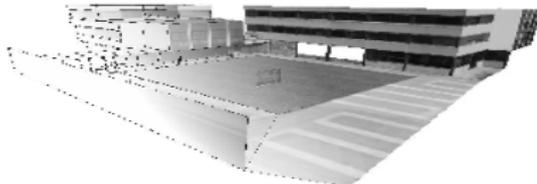
- La robotique



- L'analyse



- Le cinéma



Décrire, modéliser, extraire et traiter par les mathématiques

Décrire, modéliser, extraire et traiter par les mathématiques

- Analyse fréquentielle (Fourier)

Décrire, modéliser, extraire et traiter par les mathématiques

- Analyse fréquentielle (Fourier)
- Les ondelettes, bandelettes etc avec une représentation géométrique des images (voir Mallat et al)

Décrire, modéliser, extraire et traiter par les mathématiques

- Analyse fréquentielle (Fourier)
- Les ondelettes, bandelettes etc avec une représentation géométrique des images (voir Mallat et al)
- Les approches stochastiques (Champs de Markov)

Décrire, modéliser, extraire et traiter par les mathématiques

- Analyse fréquentielle (Fourier)
- Les ondelettes, bandelettes etc avec une représentation géométrique des images (voir Mallat et al)
- Les approches stochastiques (Champs de Markov)
- Le calcul des variations, l'analyse fonctionnelle (Les méthodes par équations aux dérivées partielles (EDP) et les approches variationnelles)

Mes objectifs aujourd'hui

- Présenter la méthodologie

Mes objectifs aujourd'hui

- Présenter la méthodologie
- Montrer les liens entre les différentes formulations (\min , $\frac{\partial}{\partial t}$, $\int f$)

Mes objectifs aujourd'hui

- Présenter la méthodologie
- Montrer les liens entre les différentes formulations (\min , $\frac{\partial}{\partial t}$, $\int f$)
- Montrer l'intérêt du cadre théorique

Mes objectifs aujourd'hui

- Présenter **la méthodologie**
- Montrer les **liens** entre les différentes formulations (\min , $\frac{\partial}{\partial t}$, $\int f$)
- Montrer l'intérêt du **cadre théorique**
- Montrer un outil qui a donné lieu à de nombreux développements récents, les *level-sets*

1 Quand tout a commencé...

- Quelques définitions
- Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur

1 Quand tout a commencé...

- Quelques définitions
- Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur

2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire

- Piste 1: Modifier la convolution
- Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
- Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie

1 Quand tout a commencé...

- Quelques définitions
- Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur

2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire

- Piste 1: Modifier la convolution
- Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
- Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie

3 Minimiser une énergie? En pratique?

- Méthode classique
- Quand la théorie est nécessaire

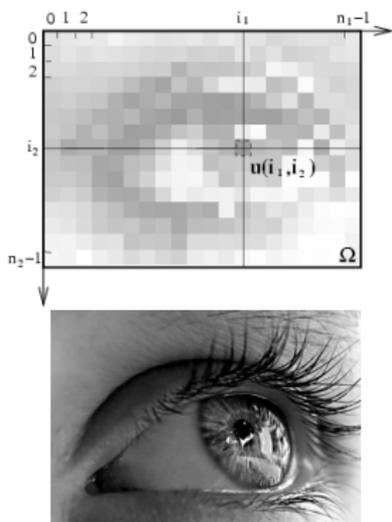
- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs

- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin

- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

Image numérique et image analogique



- Une image **numérique** peut être vue comme un tableau 2×2 ou **une fonction discrète**
- L'image numérique est **issue d'un monde continu** et analogique. Elle est obtenue après pixélisation et quantification.
- Dans notre cas, nous considérerons une image **continue**

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

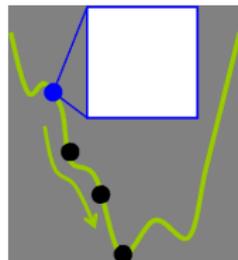
Les deux types de formulations par EDP

Des formulations dans le cadre **continu**

- Problèmes d'optimisation

Chercher un **coût minimum**

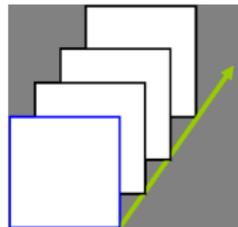
$$v(x) = \underset{u(x)}{\text{Argmin}} E(u) = \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) dx$$



- Equations d'évolution

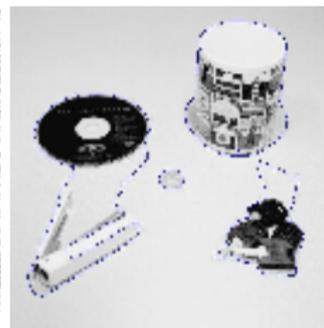
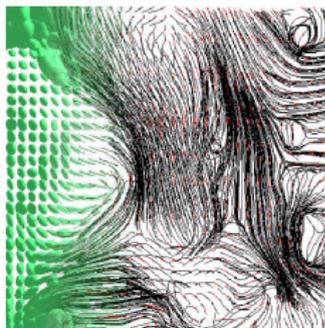
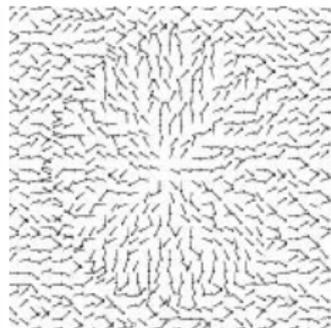
Evoluer jusqu'à un **état stationnaire**

$$u(t, x) / \frac{\partial u}{\partial t} = H(t, x, u, \nabla u, \nabla^2 u) \rightsquigarrow v(x) \equiv u(\infty, x)$$



En quoi les EDPs seraient-elles adaptées au traitement d'images?

- Une notion de **régularité** grâce aux dérivées spatiales
- **Robustesse** au bruit
- Une notion d'**échelle** liée à une évolution continue
- Grande capacité de modélisation!



- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

Le filtrage linéaire Gaussien

- Soit u_0 une image (éventuellement bruitée), on définit sa convolution par une Gaussienne par :

$$u_\sigma(x) = (G_\sigma * u_0)(x) \text{ avec } G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right).$$



$\sigma = 0$



$\sigma = 5$



$\sigma = 11$



$\sigma = 17$

- Le filtrage Gaussien peut être implémenté de façon récursive. Il est toujours utilisé notamment pour des approches multi-échelles.

L'équation de la chaleur

- Formulation continue

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x), & t \geq 0, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$



$t = 0$



$t = 12.5$



$t = 60.5$



$t = 93.5$

- Une notion d'échelle.

La solution de l'équation de la chaleur est une convolution

$$u(t, x) = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)(x)$$

Le filtrage Gaussien

Une seule opération globale dans un "grand" voisinage

$\sigma = 0$



$t = 0$

$\sigma = 5$



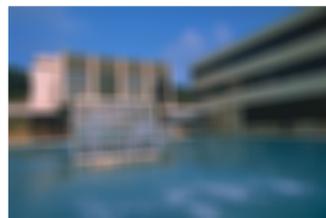
$t = 12.5$

$\sigma = 11$



$t = 60.5$

$\sigma = 17$



$t = 93.5$

L'équation de la chaleur

Des opérations locales faites de nombreuses fois

Welcome to the fantastic world of PDEs!

[Morel](#), Osher, [Koenderink](#), Blanc-Féraud, Shah, Barlaud, Caselles, Charbonnier, Chambolle, Chan, [Guichard](#), Sochen, [Lions](#), [Alvarez](#), Nagel, Aubert, Cohen, Cottet, Buades, Buttazzo, Deriche, Meyer, Geman, Tschumperlé, Perona, Vemuri, Proesmanns, Bertalmio, Black, Rougon, Rudin, Cao, Sapiro, Faugeras, Nikolova, Coll, Paragios, Coquerez, Aujol, Masnou, March, Bellitini, Pretreux, Cottet, Sethian, Tannenbaum, Chassery, Tomasi, Van-Gool, Ballester, Kervrann, Mazon, Mémin, Yezzi, Vese, Brox, Cremers, Weickert, Idier, Kimmel, Pons, Mumford, Ambrosio, Tortorelli, [Bart ter Haar Romeny](#), Nordstrom, Chambolle, Préteux, Nielsen, Florack, Bruhn, Lions, Sgallari, Malik, Malladi, etc etc

- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 **Trois pistes, une solution: Le non-linéaire**
 - **Piste 1: Modifier la convolution**
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

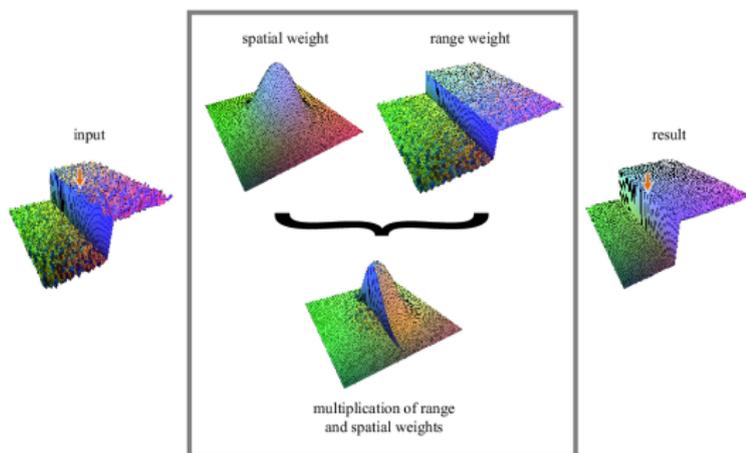
Piste 1: Modifier la convolution

Le filtre bilatéral (Tomasi, Manduchi [1998])

- Etant donné une image u_0 , on calcule u par :

$$u(x) = \frac{1}{w(x)} \iint d(x - \xi) \tilde{d}(u_0(x) - u_0(\xi)) u_0(\xi) d\xi \quad \text{avec}$$

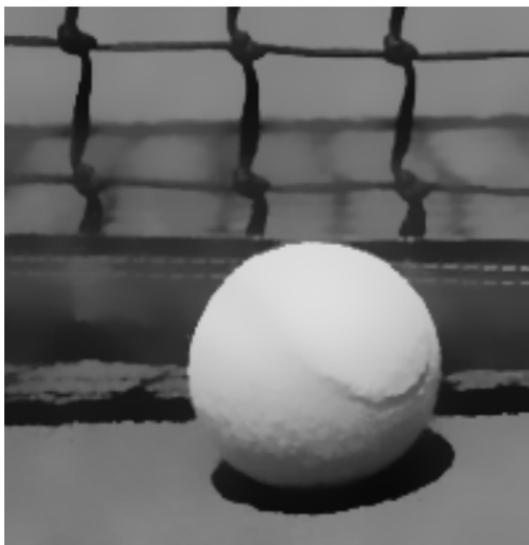
$$w(x) = \iint d(x - \xi) \tilde{d}(u_0(x) - u_0(\xi)) d\xi$$



Débruitage et Simplification



avant

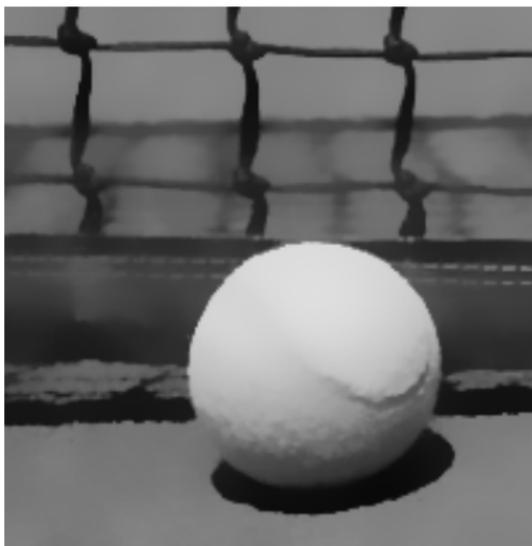


après

Débruitage et Simplification



avant



après

La communauté *Computer Graphics* s'en est emparé!

Nombreuses améliorations, extensions, implémentations extrêmement efficaces, et... une foule d'applications!

Faites vos bandes dessinées

Winnemoller, Olsen, Gooch [2006]



(video_spiderman.sh)

avant



après

Donnez à vos photos un rendu de pros

Bae, Paris, Durand [2006]



Donnez à vos photos un rendu de pros

Bae, Paris, Durand [2006]



Mais tout le monde n'est pas [Ansel Adams](#) ("Clearing winter storm")

Donnez à vos photos un rendu de pros

Bae, Paris, Durand [2006]



la preuve...

Donnez à vos photos un rendu de pros

Bae, Paris, Durand [2006]



modèle



avant

Donnez à vos photos un rendu de pros

Bae, Paris, Durand [2006]



modèle



après

- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 **Trois pistes, une solution: Le non-linéaire**
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - **Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur**
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur

- L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \operatorname{div}(? \nabla u)$$

Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur

- L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \operatorname{div}(? \nabla u)$$

- Le modèle non-linéaire de Perona, Malik [1990]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\underbrace{c(|\nabla u|^2)}_{\text{scalaire}} \nabla u) \quad \text{avec par exemple} \quad c(s) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+s} \\ \exp(-s) \end{cases}$$

Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur

- L'équation de la chaleur

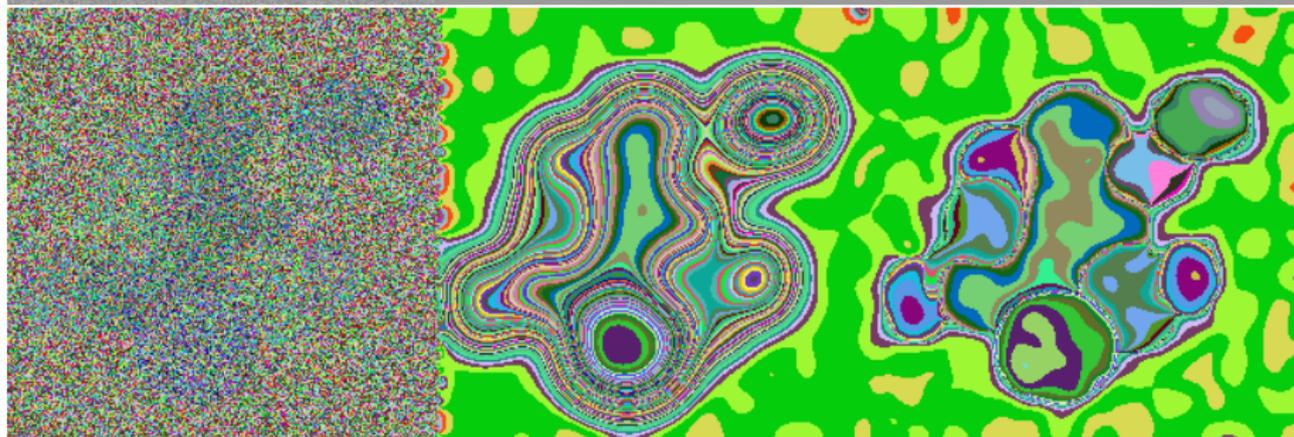
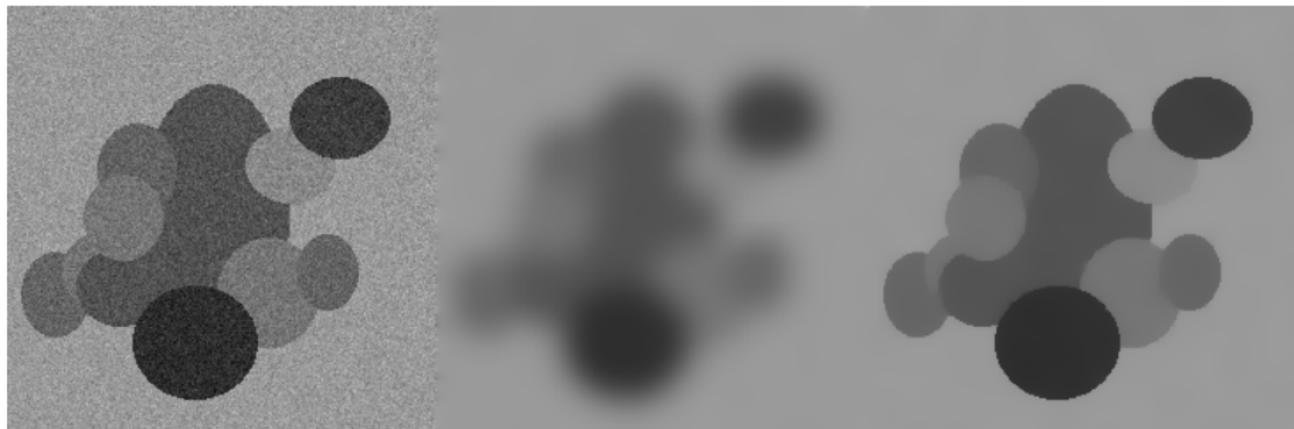
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \operatorname{div}(? \nabla u)$$

- Le modèle non-linéaire de Perona, Malik [1990]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\underbrace{c(|\nabla u|^2)}_{\text{scalaire}} \nabla u) \quad \text{avec par exemple} \quad c(s) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+s} \\ \exp(-s) \end{cases}$$

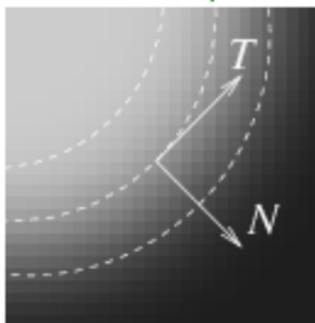
- Buades, Coll et Morel [2005]: La formulation intégrale du bilateral filter est liée à l'opérateur de Perona–Malik

La diffusion agit sur les courbes de niveaux (isophotes)



Diffusions directionnelles

- La diffusion non linéaire n'est pas seulement une affaire de diffusion contrôlée mais aussi de diffusion dans des directions liées à la structure de l'image, i.e., de ses isophotes



- Proposition et interprétation de nombreux opérateurs sous la forme

$$\left(\dots \right) u_{TT} + \left(\dots \right) u_{NN}$$

Exemple

Modèle de Alvarez, Lions et al [1992]

- Opérateur en combinant diffusion isotrope et anisotrope

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = c(|\nabla G_\sigma * u|^2) \left[(1 - h_\tau(|\nabla u|)) \Delta u + h_\tau(|\nabla u|) \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right]$$

- Décomposition suivant les directions principales

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = c(|\nabla G_\sigma * u|^2) u_{TT} + c(|\nabla G_\sigma * u|^2) (1 - h_\tau(|\nabla u|)) u_{NN}$$

- Observations : Les gradients sont estimés de façon robuste, les coefficients de diffusion restent toujours positifs \Rightarrow stabilité.

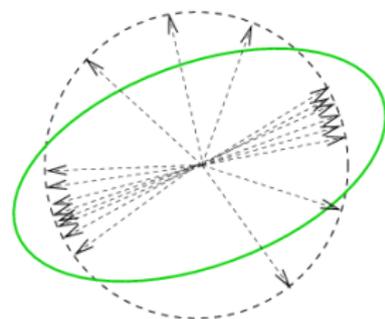
Comment mieux préserver encore la structure des images?

- Limitation des modèles précédents: l'estimation des directions T , N est très locale

Comment mieux préserver encore la structure des images?

- Limitation des modèles précédents: l'estimation des directions T, N est très locale
- Solution: les tenseurs de structure

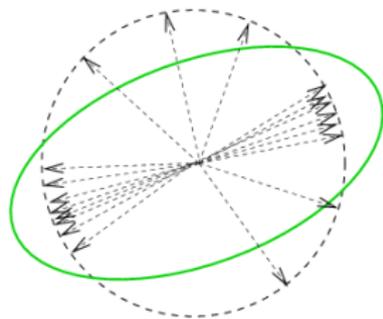
$$k_\rho * \nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^t = k_\rho * \begin{pmatrix} u_{\sigma xx} & u_{\sigma xy} \\ u_{\sigma xy} & u_{\sigma yy} \end{pmatrix}$$



Comment mieux préserver encore la structure des images?

- Limitation des modèles précédents: l'estimation des directions T, N est très locale
- Solution: les tenseurs de structure

$$k_\rho * \nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^t = k_\rho * \begin{pmatrix} u_{\sigma xx} & u_{\sigma xy} \\ u_{\sigma xy} & u_{\sigma yy} \end{pmatrix}$$



- Weickert [1996] propose

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\underset{\text{matrice}}{D(k_\rho * \nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^t)} \nabla u \right)$$

En résumé



Originale



Chaleur



Perona-Malik



Weickert

- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 **Trois pistes, une solution: Le non-linéaire**
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - **Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie**
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie

- Une modèle de formation des images :

$$u_0 = R u + \eta$$

où η est un bruit blanc Gaussien et R est un opérateur linéaire.

Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie

- Une modèle de formation des images :

$$u_0 = R u + \eta$$

où η est un bruit blanc Gaussien et R est un opérateur linéaire.

- Résoudre le problème aux **moindres-carrés**

$$\inf_u \int_{\Omega} |u_0 - Ru|^2 dx \quad \rightarrow \quad R^* u_0 - R^* R u = 0$$

conduit à **un problème souvent mal posé**

- La raison : **l'opérateur $R^* R$ est souvent difficile à inverser** (non bijectif ou faibles valeurs propres)

Contraindre la solution à une certaine régularité

- Tikhonov et Arsenin [1977] ont proposé

$$\inf_u \int_{\Omega} |u_0 - Ru|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

Contraindre la solution à une certaine régularité

- Tikhonov et Arsenin [1977] ont proposé

$$\inf_u \int_{\Omega} |u_0 - Ru|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

- De nombreux problèmes en traitement d'images s'écrivent comme une minimisation d'énergie avec ces mêmes "ingrédients".

Contraindre la solution à une certaine régularité

- Tikhonov et Arsenin [1977] ont proposé

$$\inf_u \int_{\Omega} |u_0 - Ru|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

- De nombreux problèmes en traitement d'images s'écrivent comme une minimisation d'énergie avec ces mêmes "ingrédients".
- On retrouve l'opérateur **Laplacien** dans l'équation d'Euler-Lagrange!

$$EL(u) = \lambda \Delta u - (R^* Ru - R^* u_0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = EL(u).$$

Quadratique donne linéaire, et sinon?

- Partons à présent d'une formulation générale (ϕ à déterminer)

$$\inf_u E(u) = \int_{\Omega} (u_0 - Ru)^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) dx$$

- Savoir contraindre le problème en fonction des propriétés qualitatives attendues

$$\operatorname{div} \left(\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right) = \frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{TT} + \phi''(|\nabla u|) u_{NN}$$

Quadratique donne linéaire, et sinon?

- Partons à présent d'une formulation générale (ϕ à déterminer)

$$\inf_u E(u) = \int_{\Omega} (u_0 - Ru)^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) dx$$

- Savoir contraindre le problème en fonction des propriétés qualitatives attendues

$$\operatorname{div} \left(\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \right) = \frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{TT} + \phi''(|\nabla u|) u_{NN}$$

- Choisir la pénalisation revient à choisir un **espace fonctionnel**

$$\phi(s) = 2\sqrt{1+s^2} - 2 \quad \rightarrow u \in BV(\Omega) \quad (\text{préservation des discontinuités})$$

On entre dans les mathématiques...

- Dans quel espace on cherche le minimum?
 - ▶ **Théoriquement**, on a besoin que V soit réflexif et que F soit semi-continue inférieure par rapport à la topologie faible de V .
 - ▶ **Qualitativement** une image a des contours, c'est-à-dire des discontinuités le long de courbes. L'espace V doit contenir ce type de fonctions.



On entre dans les mathématiques...

- Dans quel espace on cherche le minimum?
 - ▶ **Théoriquement**, on a besoin que V soit réflexif et que F soit semi-continue inférieure par rapport à la topologie faible de V .
 - ▶ **Qualitativement** une image a des contours, c'est-à-dire des discontinuités le long de courbes. L'espace V doit contenir ce type de fonctions.



- L'espace BV , des fonctions à variations bornées a bien fait parler de lui.

Oui mais BV est-il vraiment "satisfaisant" ?



- Nikolova [2000] démontre que la minimisation de la variation totale conduit à des solutions avec des **effets de blocs**
- Gousseau et Morel [2001] montrent que **les images naturelles sont décrites de manière incomplète par BV** (rapport entre norme et périmètre ou décroissance des coefficients en ondelette)

Oui mais BV est-il vraiment "satisfaisant" ?



- Nikolova [2000] démontre que la minimisation de la variation totale conduit à des solutions avec des effets de blocs
- Gousseau et Morel [2001] montrent que les images naturelles sont décrites de manière incomplète par BV (rapport entre norme et périmètre ou décroissance des coefficients en ondelette)

Réponse

Pas vraiment: BV ne permettrait pas de décrire les textures et les petites structures présentes dans les images naturelles.

Récemment: Travaux sur la décomposition d'images

- Une image est la somme de sa composante BV, d'une partie oscillante et du bruit.



- A l'origine des travaux de Meyer (2001), plusieurs développements dont Osher et Vese (2003), Aujol et Aubert (2003)

L'idée de Meyer (2001) [complément]

- Meyer propose le problème d'optimisation suivant:

$$\inf_{(u,v) \in BV \times G / f = u + v} (J(u) + \alpha \|v\|_G) \quad \text{où } J = |\nabla u|$$

et G est l'espace de Banach constitué de toutes les fonctions v que l'on peut écrire $v = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 = \operatorname{div}(g)$ avec g_1 et g_2 dans L^∞ .

$$\|v\|_G = \inf \left\{ \|g\|_\infty / v = \operatorname{div}(g), g = (g_1, g_2), g_1 \text{ et } g_2 \in L^\infty, |g(x)| = \sqrt{|g_1|^2 + |g_2|^2} \right\}$$

- L'espace de Banach G contient les signaux à fortes oscillations, et donc en particulier les textures et le bruit.

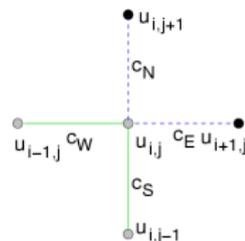
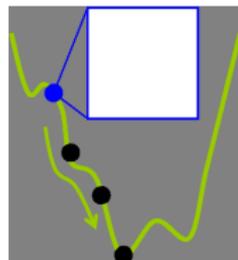
- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 **Minimiser une énergie? En pratique?**
 - **Méthode classique**
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

Soit un problème de minimisation

- Je calcule son équation d'Euler.
- Je la plonge dans un schéma d'évolution.
- Je la discrétise en espace: Le "problème" vient en général du terme de **diffusion** qui effectue les **couplages**. Par exemple:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(c(|\nabla u|)\nabla u)|_x \\ & \approx \sum_{\xi} c(|u(x + \xi) - u(x)|)(u(x + \xi) - u(x)) \\ & \approx \sum_{\xi} F(u(x + \xi) - u(x)) \end{aligned}$$

(processus de lignes)



Mais ce n'est pas toujours simple. . .

- L'espace fonctionnel dual peut ne pas exister
Par exemple minimiser dans $BV(\Omega)$!

Mais ce n'est pas toujours simple. . .

- L'espace fonctionnel dual peut ne pas exister
Par exemple minimiser dans $BV(\Omega)$!
- Il faut savoir gérer les non-linéarités
Par exemple dues à des termes de régularisation non quadratiques

Mais ce n'est pas toujours simple. . .

- L'espace fonctionnel dual peut ne pas exister
Par exemple minimiser dans $BV(\Omega)$!
- Il faut savoir gérer les non-linéarités
Par exemple dues à des termes de régularisation non quadratiques
- Les fonctionnelles peuvent être difficile à "dériver" ou interpréter
Illustration sur le modèle classique de Mumford-Shah

- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

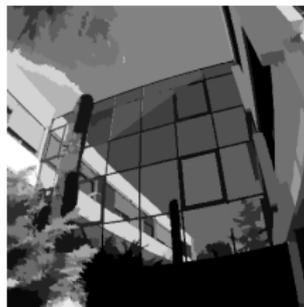
Le modèle de Mumford-Shah [1989]

- Un compromis entre régularité et discontinuités

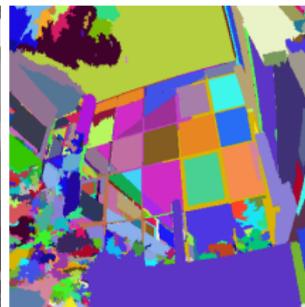
$$\inf_{u, K} F(u, K) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \alpha \int_{\Omega - K} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_K d\sigma$$



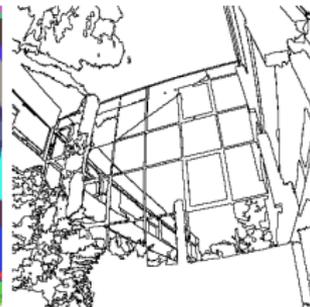
u_0



u



U (random colormap)



K

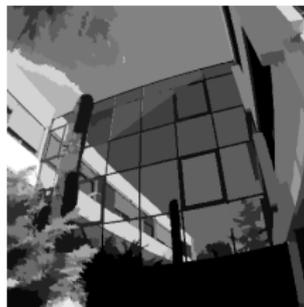
Le modèle de Mumford-Shah [1989]

- Un compromis entre régularité et discontinuités

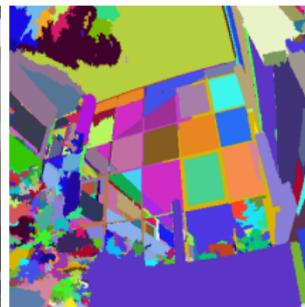
$$\inf_{u, K} F(u, K) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \alpha \int_{\Omega - K} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_K d\sigma$$



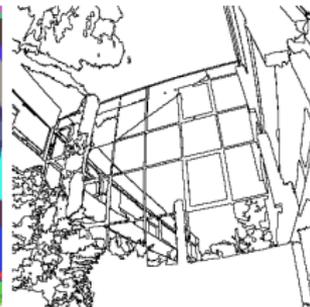
u_0



u



U (random colormap)



K

- Une formulation intuitive qui a beaucoup plu aux Mathématiciens

Il y a besoin de maths pour bien définir le problème :-)

Difficultés

- F a 2 inconnues u et K de natures différentes
- Comment bien définir le terme qui mesure les discontinuités?

$$\int_K d\sigma? \quad \mathcal{H}(K)? \quad \mathcal{H}(S_u)?$$

- La fonction $E \rightarrow \mathcal{H}(\partial E)$ n'est pas semicontinue inférieure
- Et puis numériquement, comment on fait?

Il y a besoin de maths pour bien définir le problème :-)

Difficultés

- F a 2 inconnues u et K de natures différentes
- Comment bien définir le terme qui mesure les discontinuités?

$$\int_K d\sigma? \quad \mathcal{H}(K)? \quad \mathcal{H}(S_u)?$$

- La fonction $E \rightarrow \mathcal{H}(\partial E)$ n'est pas semicontinue inférieure
- Et puis numériquement, comment on fait?

Quand on ne sait pas bien définir ou dériver...

... On approxime! et on utilise une notion de convergence entre fonctionnelles, la Γ -convergence

Des approximations continues

- Parmi les plus intuitives, l'approche d'Ambrosio et Tortorelli [1990]

$$F_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \left(\varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (v - 1)^2 \right) dx$$

- ▶ Idée v vaut 1 sauf si $|\nabla u| \gg 1$, i.e., $v = 0$ aux contours.
- ▶ $\varepsilon \rightarrow 0$ va "localiser" les contours.
- ▶ Un résultat de Γ -convergence.

Des approximations continues

- Parmi les plus intuitives, l'approche d'Ambrosio et Tortorelli [1990]

$$F_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx + \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \left(\varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (v - 1)^2 \right) dx$$

- ▶ Idée v vaut 1 sauf si $|\nabla u| \gg 1$, i.e., $v = 0$ aux contours.
 - ▶ $\varepsilon \rightarrow 0$ va "localiser" les contours.
 - ▶ Un résultat de Γ -convergence.
-
- Beaucoup d'autres!

Des approximations discrètes

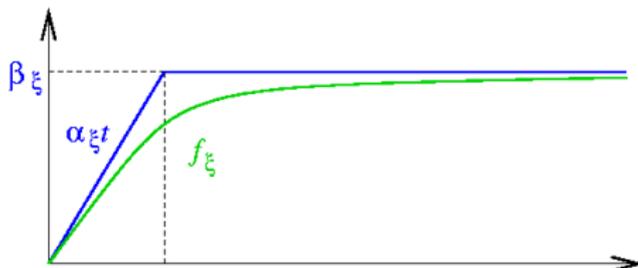
Chambolle [1999]

- Intéressons nous à l'approche de Chambolle [1999]

$$F_h(u) = h^N \sum_x \sum_{\xi} \frac{1}{h} f_{\xi} \left(\frac{(u(x) - u(x + h\xi))^2}{h} \right) \phi(\xi) + \dots$$

- Observations

- ▶ Poids de connexion $\phi(\xi) > 0$ pour des connexions locales.
- ▶ Nature des connexions: Excitatrices ($f_{\xi} > 0$) et symétriques dépendant de $u(x) - u(x + h\xi)$.



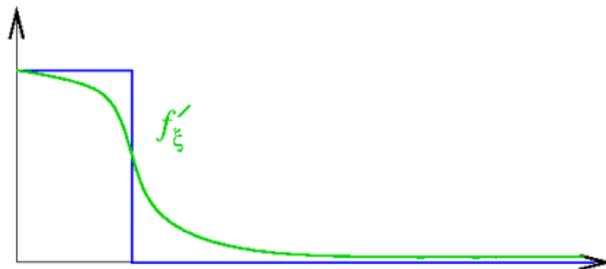
Des approximations discrètes

Chambolle [2004]

- Etant donné une discrétisation, on a la dynamique suivante:

$$\frac{du_x}{dt} = \sum_{\xi} \frac{1}{h^2} f'_{\xi} \left(\frac{(u_x - u_{x+h\xi})^2}{h} \right) (u_{x+h\xi} - u_x) \phi(\xi) + \dots$$

- La diffusion est contrôlée par f'_{ξ} :
 - ▶ $(u_x - u_{x+h\xi})^2 = 0 \implies f'_{\xi} = \alpha_{\xi}$ pour "égaliser" u_x et $u_{x+h\xi}$
 - ▶ $(u_x - u_{x+h\xi})^2$ grand $\implies f'_{\xi} = 0$ supprime toute interaction.



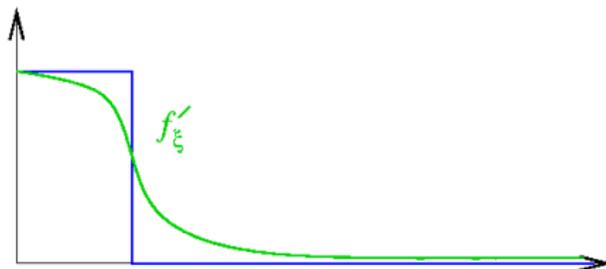
Des approximations discrètes

Chambolle [2004]

- Etant donné une discrétisation, on a la dynamique suivante:

$$\frac{du_x}{dt} = \sum_{\xi} \frac{1}{h^2} f'_{\xi} \left(\frac{(u_x - u_{x+h\xi})^2}{h} \right) (u_{x+h\xi} - u_x) \phi(\xi) + \dots$$

- La diffusion est contrôlée par f'_{ξ} :
 - ▶ $(u_x - u_{x+h\xi})^2 = 0 \implies f'_{\xi} = \alpha_{\xi}$ pour "égaliser" u_x et $u_{x+h\xi}$
 - ▶ $(u_x - u_{x+h\xi})^2$ grand $\implies f'_{\xi} = 0$ supprime toute interaction.



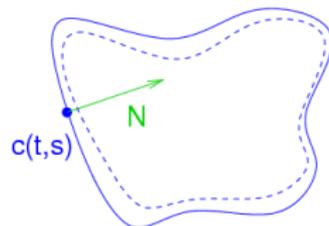
- Le terme de "diffusion" ressemble à un couplage habituel dans les réseaux de neurones.

- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

Une Courbe Evolue

- Formulation Lagrangienne

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t}(t, q) = v(\kappa, \dots) \mathbf{N} \\ \mathbf{c}(0, q) = \mathbf{c}_0(q). \end{cases}$$



- Un exemple d'évolution avec $v = \kappa$



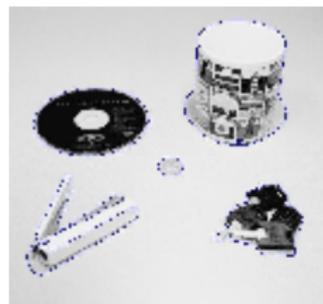
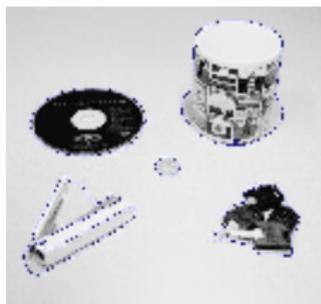
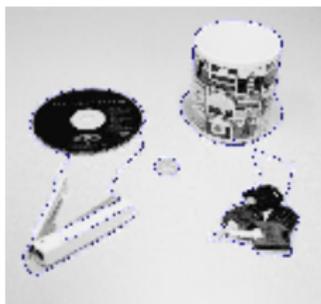
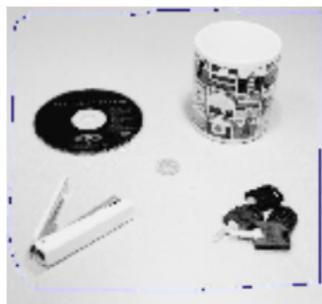
Faire Evoluer une Courbe, Dans Quel But?

Faire Evoluer une Courbe, Dans Quel But?

Segmenter des objets

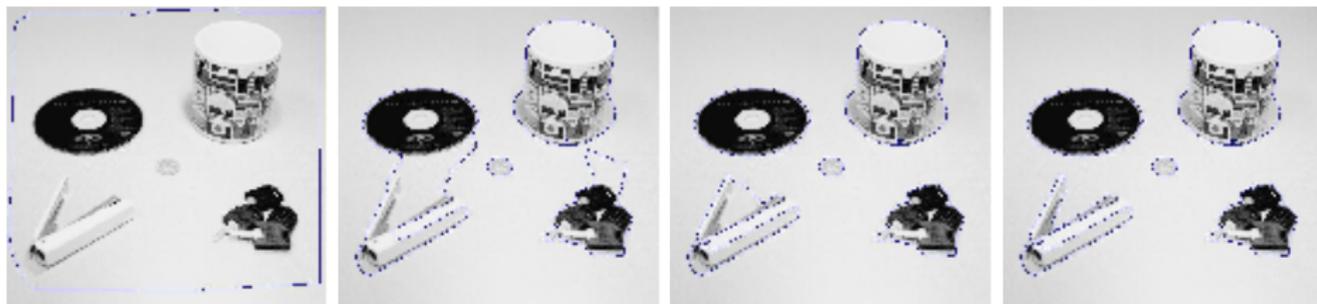
Faire Evoluer une Courbe, Dans Quel But?

Segmenter des objets



Faire Evoluer une Courbe, Dans Quel But?

Segmenter des objets



... Comment formaliser le problème?

Les Contours Actifs de Kass, Witkin et al [1987]

$$\inf_c J(c) = \underbrace{\int_a^b |c'(q)|^2 dq + \beta \int_a^b |c''(q)|^2 dq}_{\text{énergie interne}} + \lambda \underbrace{\int_a^b g^2(|\nabla I(c(q))|) dq}_{\text{énergie externe}},$$

(g est une fonction décroissante)

- $J(c)$ n'est pas intrinsèque (dépend de la paramétrisation)
- A cause de la contrainte de régularité, le modèle ne permet pas de changement de topologie. Il ne peut détecter qu'un seul objet convexe.
- Numériquement, la courbe doit être initialisée près de l'objet à segmenter.

Quid du Modèle Sans Courbure?

$$\inf_c J_1(c) = \int_a^b |c'(q)|^2 dq + \lambda \int_a^b g^2(|\nabla I(c(q))|) dq$$

- Cela évite d'avoir dans les équations d'Euler des termes d'ordre élevé
- On peut montrer que ce modèle permet aussi de faire décroître la courbure
- Ce modèle n'est **toujours pas intrinsèque**

Idée!

- Caselles, Kimmel, Kichenassamy [1995,..] ont proposé :

$$\inf_c J_2(c) = \int_a^b g(|\nabla I(c(q))|) |c'(q)| dq.$$

- Ce modèle est intrinsèque!
- Il est équivalent aux problèmes $\inf_c J_1$ (voir Aubert, Blanc-Féraud [1999])
- L'équation d'Euler nous ramène à une évolution de courbe :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = (\kappa g - \langle \nabla g, N \rangle) N$$

Difficultés Liée à Toute Evolution de Courbe

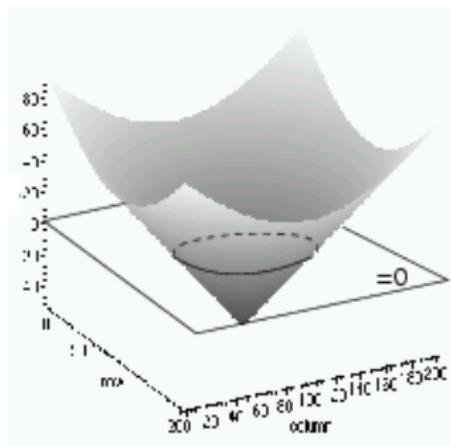
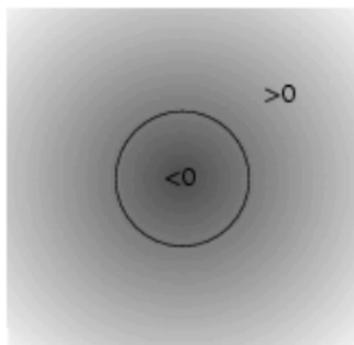
- Le système de coordonnées physiques bouge avec le front
- Des problèmes de stabilité peuvent survenir lors de l'évolution du front
- Il faut gérer les changements de topologie...



L'idée des *Level-Sets*

Dervieux, Thomasset [1980] puis Osher, Sethian [1988]

- Une courbe vue comme une courbe de niveau d'une fonction

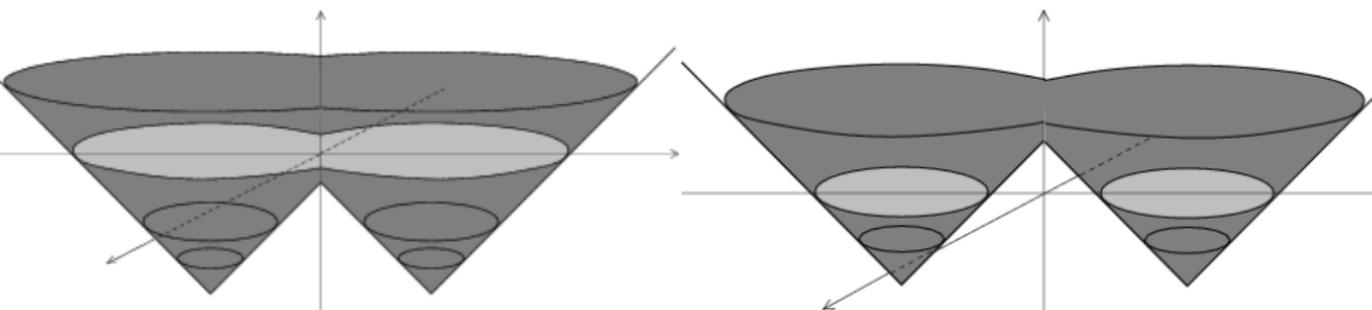


- Faire évoluer la fonction revient à faire évoluer la courbe

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial t} = v N, \\ c(0, q) = c_0(q). \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = v |\nabla u| \\ u(0, x) = u_0(x). \end{array} \right.$$

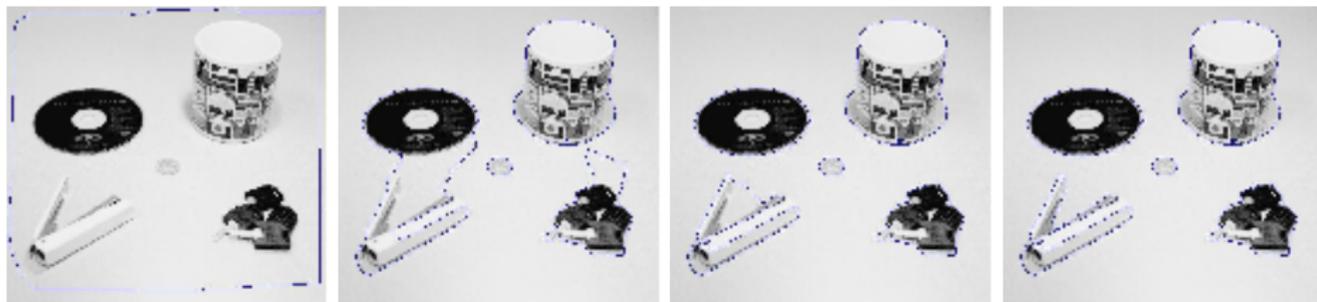
Intérêt

- Un système fixe de coordonnées
- Gestion facile des changements de topologie



- Une technique applicable en toute dimension
- L'équation peut être résolue avec des schémas stables, consistants, et entropiques, issus de la littérature des équations hyperboliques

Exemple d'Application à la Segmentation



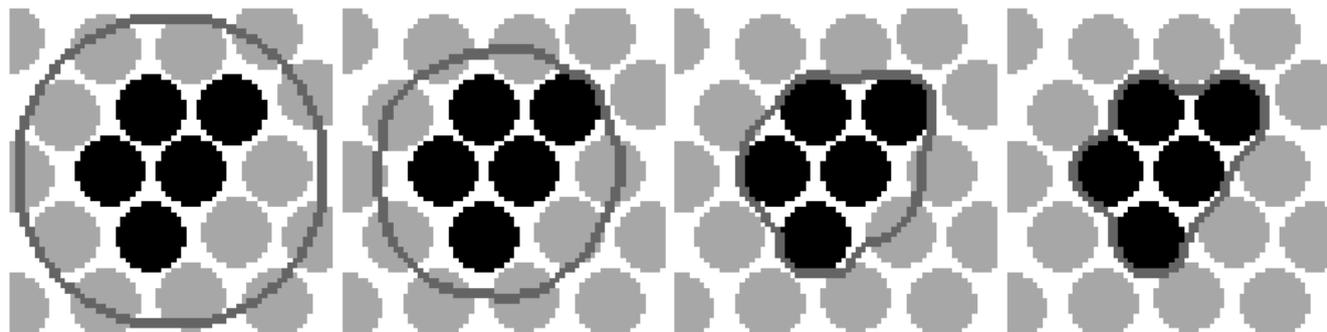
$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla I|) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \alpha g(|\nabla I|) |\nabla u| + \langle \nabla g, \nabla u \rangle$$

Que s'est-il Passé Ensuite?

- Une amélioration des aspects initialisation, des vitesses de convergence et des méthodes numériques employées (cf les méthodes de *Fast Marching*)
- Une explosion en terme d'applications! On a cherché à "tout" segmenter, en ne se basant plus uniquement sur la géométrie



Segmentation d'Images et Régions: Chan, Vese [1999]



$$\inf_{i_1, i_2, c} F(i_1, i_2, c) = \mu |c| \int_{\text{inside}(c)} |u_0 - i_1|^2 dx + \int_{\text{outside}(c)} |u_0 - i_2|^2 dx,$$

Segmentation de Textures: Rousson, Brox et al (2003)

- Définition d'un vecteur d'état

$$u = (I, |I_x|, |I_y|, \pm 2\sqrt{\pm I_x I_y})$$

- Lissage TV couplé de u

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \operatorname{div}\left(g\left(\sum_k |\nabla u_k|^2\right) \nabla u_i\right)$$

- Segmentation de type région de ce vecteur
($p_R = G_{\sigma_R, \mu_R}$)

$$\inf_{\phi, p_{in}, p_{out}} \left(- \int_{\Omega} H(\phi) \log p_{in}(u(x)) dx - \int_{\Omega} (1 - H(\phi)) \log p_{out}(u(x)) dx \right)$$



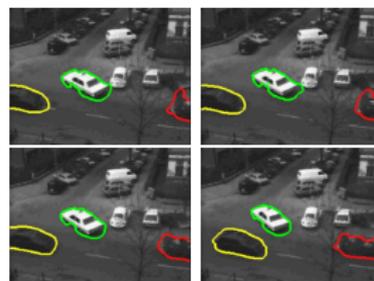
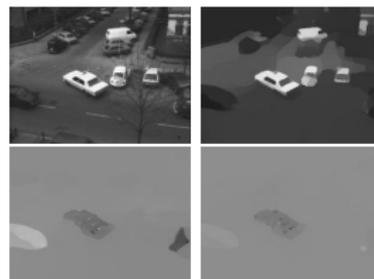
Segmentation d'Objets en Mouvement

La méthode de Brox et al s'applique aussi dans ce cadre. L'approche est basée sur :

- La définition d'un **vecteur d'état** intensité + flot optique :

$$u = (I, V_x, V_y)$$

- Le **lissage couplé** des composantes de u (flot TV)
- L'**évolution couplée de courbes** (une par objet) sur u (**gestion de plusieurs level-sets couplés**)



Mais aussi...

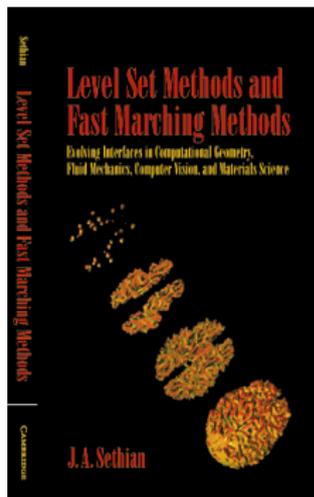
- Beaucoup d'autres applications avec par exemple la prise en compte d'*a priori* de formes, la classification supervisée, etc
- Des évolutions qui permettent de conserver au cours des itérations une fonction distance
- Beaucoup de travail sur l'optimisation numérique des ces approches

- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

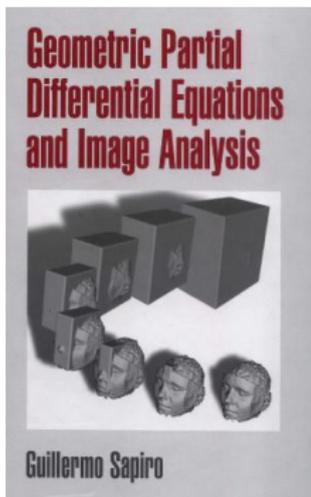
Les EDPs...

- ... permettent de traduire naturellement des notions d'échelle, d'évolution, de régularité et de voisinage.
- ... peuvent s'écrire sous différentes formes souvent liées (\min , $\frac{\partial}{\partial t}$, $\int f$).
- ... fournissent une axiomatique adaptée à la compréhension et au développement de nouveaux algorithmes.
- ... ont été appliquées avec succès dans de nombreuses applications du traitement d'images.

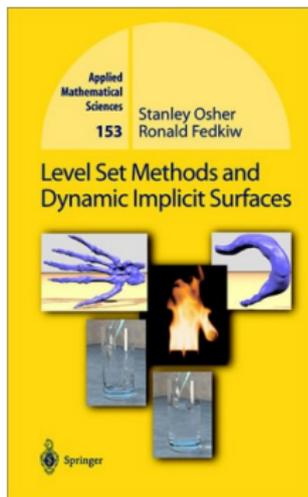
Nombreux ouvrages sur le sujet



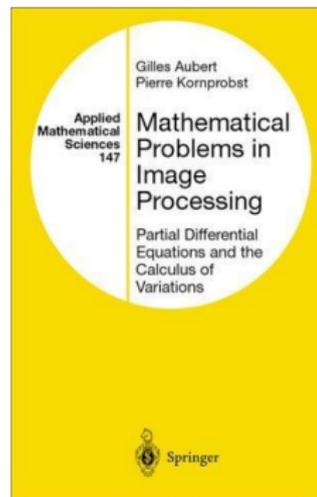
1999
Sethian



2001
Sapiro



2002
Osher, Fedwik



2002, 2006
Aubert, Kornprobst

La communauté des EDPs

Depuis une vingtaine d'années (20 ans! ;-), une communauté des EDPs s'est développée en traitement d'images suivant plusieurs axes:

- Rapprochements EDPs/modèles Markoviens, EDPs/ondelettes, EDPs/réseaux de neurones.
- Amélioration des performances (ex: Brox, Bruhn, Weickert [2004])

La communauté des EDPs

Depuis une vingtaine d'années (20 ans! ;-), une communauté des EDPs s'est développée en traitement d'images suivant plusieurs axes:

- Rapprochements EDPs/modèles Markoviens, EDPs/ondelettes, EDPs/réseaux de neurones.
- Amélioration des performances (ex: Brox, Bruhn, Weickert [2004])
- Applications, applications, applications
 - ▶ Dans la continuité: opérateurs de diffusion étendus à des cas plus généraux
 - ▶ Le traitement de séquences d'images.
 - ▶ L'évolution de courbes par *level-sets* s'est avérée être un outil efficace dans d'innombrables applications
 - ▶ L'apparition de nouvelles problématiques.

- 1 Quand tout a commencé...
 - Quelques définitions
 - Du filtrage Gaussien à l'équation de la chaleur
- 2 Trois pistes, une solution: Le non-linéaire
 - Piste 1: Modifier la convolution
 - Piste 2: Modifier l'opérateur Laplacien de l'équation de la chaleur
 - Piste 3: Voir la solution comme le minimum d'une énergie
- 3 Minimiser une énergie? En pratique?
 - Méthode classique
 - Quand la théorie est nécessaire
- 4 Les levels-sets: Un très bel exemple combinant variationnel et EDPs
- 5 Pour aller plus loin
- 6 De la vision algorithmique à la vision biologique?

Merci pour votre attention

<http://kornprobst.googlepages.com>

