CONTRÔLE OPTIMAL. — *Commande optimale linéaire quadratique des systèmes implicites discrets.* Note de **Xiao Min Wang, Pierre Bernhard** et **José Grimm**, présentée par Pierre Faurre.

On résout l'extension naturelle du problème de commande optimale linéaire quadratique discret aux systèmes implicites. La méthode suivie couvre le cas des systèmes singuliers, pour lesquels ni l'existence de la trajectoire ni son unicité ne sont garanties.

OPTIMAL CONTROL. — Linear quadratic optimal control of discrete-time implicit systems.

We solve the linear quadratic optimal control problem for implicit systems. The theory developped applies to singular systems, i. e. systems for which neither existence nor unicity of the solution is guaranteed.

Soit le système implicite discret linéaire et stationnaire

$$\mathrm{E}\,x_{k+1}=\mathrm{F}\,x_k+\mathrm{G}\,u_k, \tag{1}$$

où E est une matrice non nécessairement carrée, $x_k \in \mathbf{R}^n$, $u_k \in \mathbf{R}^c$ et les matrices E, F et G ont respectivement les dimensions $m \times n$, $m \times n$ et $m \times c$. C'est une généralisation naturelle du système ordinaire, qui intervient notamment dans la modélisation des phénomènes économiques.

Il existe déjà des résultats de structure intéressants concernant la canonicité, l'observabilité et la commandabilité ([1] à [5]).

Le problème est de déterminer une paire de fonctions $\{u_k\}$, $\{x_k\}$, avec x_0 donné, qui satisfasse l'équation (1), et minimise le critère

$$\mathrm{J}=\frac{1}{2}x_\mathrm{N}^\mathrm{T}\,\mathrm{S}\,x_\mathrm{N}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(x_k^\mathrm{T}\,\mathrm{Q}\,x_k+u_k^\mathrm{T}\,\mathrm{R}\,u_k), \tag{2}$$

où les matrices de pénalisation S et R sont symétriques et définies positives, Q est symétrique et semi-définie positive.

Il faut rappeler que, contrairement au cas classique, la trajectoire $\{x_k\}$ correspondant à une loi de commande $\{u_k\}$ peut ne pas exister, ou si elle existe ne pas être unique. L'énoncé ci-dessus tient compte de cette particularité.

HYPOTHÈSE. — (1) (EG) *est surjective.* (2) $\begin{pmatrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{Q}\end{pmatrix}$ *est injective.*

On vérifie facilement que le principe de la programmation dynamique peut être étendu au cas implicite de la façon suivante.

Soit $\mathrm{V}(x_k, k)$ la valeur minimum de la fonction-coût en partant de l'état x au temps donné k. $\mathrm{V}(x_k, k)$ doit satisfaire l'équation de Bellman implicite suivante, qui constitue aussi une condition suffisante,

$$\mathrm{V}(x_k, k)=\min_{u_k,\,x_{k+1}}\left\{\frac{1}{2}x_k^\mathrm{T}\,\mathrm{Q}\,x_k+\frac{1}{2}u_k^\mathrm{T}\,\mathrm{R}\,u_k+\mathrm{V}(x_{k+1}, k+1)\right\}, \tag{3}$$

où le minimum dans (3) est à calculer *sous la contrainte* (1).

C'est l'équation récurrente fondamentale de la programmation dynamique, évaluée à partir de la condition finale

$$\mathrm{V}(x_\mathrm{N}, \mathrm{N})=\frac{1}{2}x_\mathrm{N}^\mathrm{T}\,\mathrm{S}\,x_\mathrm{N}. \tag{4}$$

0249-6291/86/03030127 $ 2.00 © Académie des Sciences

En dualisant la contrainte du système (1) avec le vecteur

$$p^{\mathrm{T}}=(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

nous obtenons

$$(5)\quad \mathrm{V}(x_k, k)=\min_{u_k, x_{k+1}}\left\{\frac{1}{2}x_k^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}x_k+\frac{1}{2}u_k^{\mathrm{T}}\mathrm{R}\,u_k+\mathrm{V}(x_{k+1}, k+1)+p^{\mathrm{T}}(\mathrm{E}\,x_{k+1}-\mathrm{F}\,x_k-\mathrm{G}\,u_k)\right\}.$$

Nous supposons qu'il existe une solution de la forme

$$(6)\qquad \mathrm{V}(x_k, k)=\frac{1}{2}x_k^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_k x_k.$$

PROPOSITION 1. — *La matrice* P_k, *de dimension* $n\times n$, *est symétrique et définie positive.*

Par la substitution de (6) dans (5)

$$(7)\quad \frac{1}{2}x_k^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_k x_k=\min_{u_k, x_{k+1}}\left\{\frac{1}{2}x_k^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}x_k+\frac{1}{2}u_k^{\mathrm{T}}\mathrm{R}\,u_k+\frac{1}{2}x_{k+1}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_{k+1}x_{k+1}+p^{\mathrm{T}}(\mathrm{E}\,x_{k+1}-\mathrm{F}\,x_k-\mathrm{G}\,u_k)\right\}.$$

Les conditions de stationnarité donnent

$$(8)\qquad u_k=\mathrm{R}^{-1}\mathrm{G}^{\mathrm{T}}p,$$

$$(9)\qquad x_{k+1}=-\mathrm{P}_{k+1}^{-1}\mathrm{E}^{\mathrm{T}}p.$$

En utilisant (8) et (9) dans (1), nous avons

$$(\mathrm{EP}_{k+1}^{-1}\mathrm{E}^{\mathrm{T}}+\mathrm{GR}^{-1}\mathrm{G}^{\mathrm{T}})p=-\mathrm{F}\,x_k.$$

Ainsi

$$(10)\qquad p=-\mathrm{M}_{k+1}^{-1}\mathrm{F}\,x_k,$$

où

$$(11)\qquad \mathrm{M}_{k+1}=\mathrm{EP}_{k+1}^{-1}\mathrm{E}^{\mathrm{T}}+\mathrm{GR}^{-1}\mathrm{G}^{\mathrm{T}}.$$

La proposition 1 découlera alors du fait suivant.

PROPOSITION 2. — M_k *est une matrice symétrique et définie positive, si* P_k *est symétrique et définie positive.*

La proposition 2 est évidente sous l'hypothèse 1.

Par substitution de (10) dans (8) et (9), nous obtenons

$$(12)\qquad u_k=-\mathrm{R}^{-1}\mathrm{G}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}_{k+1}^{-1}\mathrm{F}\,x_k,$$

$$(13)\qquad x_{k+1}=\mathrm{P}_{k+1}^{-1}\mathrm{E}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}_{k+1}^{-1}\mathrm{F}\,x_k.$$

En substituant (12) et (13) dans (3), nous avons

$$(14)\quad \frac{1}{2}x_k^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_k x_k=\frac{1}{2}x_k^{\mathrm{T}}[\mathrm{Q}+\mathrm{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}_{k+1}^{-1}(\mathrm{EP}_{k+1}^{-1}\mathrm{E}^{\mathrm{T}}+\mathrm{GR}^{-1}\mathrm{G}^{\mathrm{T}})\mathrm{M}_{k+1}^{-1}\mathrm{F}]x_k,$$

$$=\frac{1}{2}x_k^{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}+\mathrm{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}_{k+1}^{-1}\mathrm{F})x_k.$$

Cette égalité doit être vérifiée quel que soit x_k; nous arrivons ainsi à l'équation

$$(15)\qquad \mathrm{P}_k=\mathrm{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}_{k+1}^{-1}\mathrm{F}+\mathrm{Q}.$$

C'est une équation discrète matricielle. La condition finale de l'équation récurrente de la programmation dynamique s'écrit

$$V(x_N, N)=\frac{1}{2}x_N^T S x_N,$$

d'où, en introduisant la forme (6), nous avons

$$\frac{1}{2}x_N^T P_N x_N=\frac{1}{2}x_N^T S x_N.$$

Donc, le vecteur d'état final étant quelconque, nous avons

(16) $$P_N=S.$$

Il est évident que les P_k satisfaisant (15), pour $k=0, 1, \ldots, N-1$, sont symétriques et définies positives, par l'hypothèse 2 et le fait que $P_N=S$ est symétrique et définie positive.

Ainsi, la proposition 1 est établie, donc aussi la positivité des M_k par la proposition 2.

Ces résultats sont résumés dans le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Soit le système implicite discret linéaire*

$$E x_{k+1}=F x_k+G u_k,$$

où E *est une matrice non nécessairement carrée.*

Étant donnée la fonction-coût quadratique

$$J=\frac{1}{2}x_N^T S x_N+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k^T Q x_k+u_k^T R u_k),$$

où S *et* R *sont des matrices symétriques et définies positives,* Q *est une matrice symétrique et semi-définie positive;*

– (EG) *est surjective;*

– $\begin{pmatrix} F \\ Q \end{pmatrix}$ *est injective.*

La commande optimale et la trajectoire optimale associée qui minimisent la fonction-coût précédente s'écrivent

$$u_k=-R^{-1}G^T M_{k+1}^{-1} F x_k, \qquad k=0, 1, \ldots, N-1,$$

$$x_{k+1}=P_{k+1}^{-1} E^T M_{k+1}^{-1} F x_k, \qquad k=0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

où P_{k+1} *et* M_{k+1} *sont des matrices symétriques et définies positives, données par*

$$P_k=F^T M_{k+1}^{-1} F+Q, \qquad k=0, 1, \ldots, N-1,$$

$$M_{k+1}=EP_{k+1}^{-1} E^T+GR^{-1}G^T, \qquad k=0, 1, \ldots, N-1.$$

La condition finale associée est

$$P_N=S.$$

Cette équation discrète est résolue à partir du temps final N.

Le coût minimal est $(1/2)\, x_0^T P_0 x_0$.

Remarque. — Ces résultats demeurent, si les matrices E, F, G, Q et R dépendent du temps k. Par contre, l'extension au temps continu est sensiblement plus délicate.

Reçue le 14 avril 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. BERNHARD, On singular implicit linear dynamical systems, *S.I.A.M. J. Control*, 20, n° 5, septembre 1982, p. 612-633.

[2] J. GRIMM, Realisation and canonicity for implicit systems, soumis au *S.I.A.M. J. Control.*

[3] D. G. LUENBERGER, Time-invariant descriptor systems, in *Proc. J.A.C.C.*, San Francisco, CA, 1977, p. 725-730.

[4] D. COBB, Controllability observability and duality in singular systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-29, décembre 1984.

[5] G. C. VERGHESE, B. C. LÉVY et T. KAILATH, A generalized state-space for singular systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-26, 1981, p. 811-831.

Institut national de Recherche en Informatique et en Automatique,
route des Lucioles, Sophia-Antipolis, 06560 *Valbonne.*