Filtrage et lissage des systèmes implicites discrets (*)

X.-M. WANG (1), P. BERNHARD (1)

Résumé/*Abstract*

Nous considérons un système implicite singulier, c'est-à-dire dont le faisceau de matrices est singulier. On sait que la solution de tels systèmes peut ne pas exister, ou être non unique, ou non causale. On résout divers problèmes d'estimation, du type filtrage et lissage, en faisant chaque fois les hypothèses adéquates pour que le problème ait un sens. Ainsi, il semble qu'un filtre récursif ne puisse exister que si les solutions du système sont causales. Par contre cette hypothèse n'est pas nécessaire si on se contente d'un filtre implicite de même structure que le système.

We solve various filtering and smoothing problems for implicit systems, including the case where the matrix pencil is singular (possibly non square). While we provide an implicit filter, very simular to a Kalman filter, under very general hypothesis, a recursite explicit filter is given only for the case where there exists caresal solutions to the dynamic equation.

Introduction

Nous nous intéressons au système implicite décrit par

$$Ex_{k+1} = Fx_k + v_k , \tag{1.1}$$

$$y_k = Hx_k + \omega_k , \tag{1.2}$$

où la matrice E peut être singulière.

(*) Reçu en août 1989.

(1) Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2004 route des Lucioles, Sophia-Antipolis, 06565 Valbonne Cedex, France.

 APII-0296-1598/91/03 205 24/$ 4.40.

De tels systèmes ont été largement étudiés depuis quelques années. Divers articles cités, en particulier [6] et [9], discutent des applications, qui couvrent la commande P.I.D., les modèles économétriques (de Léontief), la discrétisation d'équations aux dérivées partielles, etc.

Dans le cas régulier (où det $(zE - F) \neq 0$), il existe déjà des résultats de structure intéressants concernant la solvabilité, la conditionabilité ([16]), la commandabilité, l'observabilité ([4], [9], [15], [25], [26]), l'accessibilité ([15]), la causalité ([25]), la stabilité ([19]) et la canonicité ([21]).

Contrairement à la plupart des auteurs, dans les articles [1], [3], [6], [7], [8], [13] et [25], on ne suppose pas que le système implicite soit régulier. On n'impose même pas que les matrices E et F soient carrées. Ainsi la solution du système peut ne pas exister, ou si elle existe ne pas être unique. Des résultats existent concernant l'existence de solutions (causales ou pas), les représentations externes, la théorie de la réalisation. L'article [8] traite de la commande optimale quadratique.

Dans cet article, qui constitue la suite logique de [8], on résout l'extension naturelle du problème de filtrage et de lissage aux systèmes implicites singuliers sous des hypothèses duales de celles utilisées en commande.

Le système implicite stochastique est décrit par (1.1), (1.2) où ν_k et ω_k sont des bruits blancs et gaussiens centrés de covariance Q et R. Q est symétrique positive semi-définie, et R est symétrique positive définie. x_{k_0} est un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $\bar{x}_{k_0}$ et de covariance Σ_{k_0}.

Nous supposerons toujours satisfaite l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE H)

1) $(E \quad Q)$ est *surjective*.

2) $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ est *injective*.

1. Filtrage de Ex_k par dualité

1.1. PRINCIPE DE DUALITÉ

- **Définition du problème**

L'objectif du filtrage par dualité est de calculer, si elle existe, la prédiction $E\hat{x}_{k_1}$ de Ex_{k_1}, qui est linéaire en fonction de $y_{k_0}, y_{k_0+1}, \ldots, y_{k_1-1}$ et $\bar{x}_{k_0}$, telle que le critère

$$J = \mathscr{E}[a^T Ex_{k_1} - a^T E\hat{x}_{k_1}]^2, \tag{1.3}$$

soit minimum quel que soit a ($a \in \mathbf{R}^n$).

Comme $a^T E\hat{x}_{k_1}$ est linéaire en fonction de $y_{k_0}, y_{k_0+1}, \ldots, y_{k_1-1}$ et $\bar{x}_{k_0}$, nous avons, pour certains coefficients u_k et b qu'il faut déterminer,

$$a^T E\hat{x}_{k_1} = -\sum_{k=k_0}^{k_1-1} u_{k+1}^T y_k + b^T \bar{x}_{k_0}. \tag{1.4}$$

PROPOSITION 1.1 : *On peut choisir u_{k+1} et b de façon linéaire en fonction de a, de sorte que $E\hat{x}_{k_1} = -\sum_{k=k_0}^{k_1-1} A_{k+1} y_k + B\bar{x}_{k_0}$, où A_{k+1} et B sont indépendants de a.*

Cette proposition sera démontrée dans la suite.

- **Dualité**

Afin de résoudre le problème du filtrage, nous introduisons une suite des vecteurs z_k décrits par

$$E^T z_{k-1} = F^T z_k + H^T u_k, \tag{1.5}$$

avec la condition initiale

$$z_{k_1} = a. \tag{1.6}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} a^T E x_{k_1} &= z_{k_1}^T E x_{k_1} \\ &= z_{k_0}^T E x_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} [z_{k+1}^T E x_{k+1} - z_k^T E x_k]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

A partir des équations (1.1) et (1.5), nous avons

$$z_{k+1}^T E x_{k+1} = z_{k+1}^T F x_k + z_{k+1}^T v_k, \tag{1.8}$$

$$z_k^T E x_k = z_{k+1}^T F x_k + u_{k+1}^T H x_k. \tag{1.9}$$

En plaçant (1.8) et (1.9) dans (1.7), nous obtenons

$$a^T E x_{k_1} = z_{k_0}^T E x_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} [z_{k+1}^T v_k - u_{k+1}^T H x_k]. \tag{1.10}$$

(1.2) et (1.4) donnent

$$a^T E\hat{x}_{k_1} = -\sum_{k=k_0}^{k_1-1} [u_{k+1}^T H x_k + u_{k+1}^T \omega_k] + b^T \bar{x}_{k_0}. \tag{1.11}$$

(1.10) et (1.11) nous donnent

$$a^T E x_{k_1} - a^T E \hat{x}_{k_1} = z_{k_0}^T E x_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} [z_{k+1}^T v_k + u_{k+1}^T \omega_k] - b^T \bar{x}_{k_0}\,,$$
$$= z_{k_0}^T E[x_{k_0} - \bar{x}_{k_0}] + [z_{k_0}^T E - b^T]\, \bar{x}_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} [z_{k+1}^T v_k + u_{k+1}^T \omega_k]\,. \qquad (1.12)$$

Le critère (1.3) devient

$$J = [(z_{k_0}^T E - b^T)\, \bar{x}_{k_0}]^2 + z_{k_0}^T E \Sigma_{k_0} E^T z_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} [z_{k+1}^T Q z_{k+1} + u_{k+1}^T R u_{k+1}]\,. \qquad (1.13)$$

Pour minimiser le critère (1.13), nous devons choisir le vecteur $b = E^T z_{k_0}$. Le critère devient alors

$$J = z_{k_0}^T E \Sigma_{k_0} E^T z_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{k_1} (z_k^T Q z_k + u_k^T R u_k^T)\,. \qquad (1.14)$$

Donc, nous avons le théorème 1.1 suivant :

THÉORÈME 1.1 : *Le problème du filtrage par dualité du système* (1.1) *et* (1.2) *avec le critère* (1.3) *est équivalent au problème de la commande optimale du système* (1.5), (1.6) *avec le critère quadratique* (1.14).

Cela montre aussi l'existence des suites $\{z_k\}$ et $\{u_k\}$ dans (1.5) avec le critère (1.14) par l'application des résultats sur la commande optimale (*cf.* [8]), qu'il ne nous reste plus qu'à utiliser.

• **Solution du problème**

1.2. VERSION NON RÉCURSIVE

En remplaçant x par z, E par E^T, G par H^T, P par Σ, k par $k-1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ par $k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 1$, nous avons donc le théorème dual du théorème 2.6.1 de [8] pour le problème de filtrage.

THÉORÈME 1.2: *Sous les hypothèses* $(E \;\; Q)$ *surjective et* $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ *injective, la prédiction de* Ex_{k_1}, *minimisant* (1.3) *étant donné* (1.1) *et* (1.2), *s'écrit*

$$a^T E \hat{x}_{k_1} = - \sum_{k=k_0}^{k_1-1} u_{k+1}^T y_k + b^T \bar{x}_{k_0}\,.$$

les vecteurs u_k, *pour* $k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots, k_1$, *sont déterminés en résolvant le problème de la commande optimale du système* (1.5) *avec la condition initiale* (1.6) *et la fonction-coût* (1.14), *et donc*

$$u_k = R^{-1} H \lambda_k \,, \quad k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2 \,, \tag{1.15}$$

$$\begin{pmatrix} z_{k-1} \\ \lambda_k \end{pmatrix} = M_{k-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix} z_k \,, \quad k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2 \,, \tag{1.16}$$

avec $z_{k_1} = a$, *où* M_{k-1} *est une matrice symétrique et inversible, définie par*

$$M_{k-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{k-1} & E \\ E^T & -H^T R^{-1} H \end{pmatrix}, \quad k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2 \,, \tag{1.17}$$

Σ_k *est symétrique et positive semi-définie, donnée par*

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix}^T M_{k-1}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_{k-1} & 0 \\ 0 & H^T R^{-1} H \end{pmatrix} M_{k-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix} + Q \,,$$
$$k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2 \,. \tag{1.18}$$

La condition finale pour (1.18) *est*

$$\Sigma_{k_0+1} = Q + F \Sigma_{k_0} F^T - F \Sigma_{k_0} H^T (R + H \Sigma_{k_0} H^T)^{-1} H \Sigma_{k_0} F^T \,. \tag{1.19}$$

u_{k_0+1} *s'écrit*

$$u_{k_0+1} = -(R + H \Sigma_{k_0} H^T)^{-1} \Sigma_{k_0} F^T z_{k_0+1} \,. \tag{1.20}$$

Le vecteur b *est*

$$b = E^T z_{k_0} = F^T z_{k_0+1} + H^T u_{k_0+1} \,. \tag{1.21}$$

Preuve de la Proposition 1.1 :

Par récurrence, il est clair que z_{k-1} et λ_k donnés par (1.16), pour $k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2$, sont linéaires en fonction de z_{k_1}, ainsi u_k et b donnés par (1.15) et (1.21), pour $k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2$, le sont aussi. La proposition est donc établie, puisque $z_{k_1} = a$. ■

1.3. Version récursive

La prédiction de Ex_k est décrite par (1.4)

$$a^T E \hat{x}_{k_1} = -\sum_{k=k_0}^{k_1-1} u_{k+1}^T y_k + b^T \bar{x}_{k_0} \,.$$

Si $k_1 > k_0 + 1$, en écrivant

$$M_{k-1}^{-1}\begin{pmatrix}0\\F^T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{k-1}\\B_{k-1}\end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

dans (1.16), nous avons

$$z_{k-1} = A_{k-1}\, z_k \quad \text{et} \quad \lambda_k = B_{k-1}\, z_k\,. \tag{1.23}$$

Ainsi, nous pouvons écrire u_{k+1}, qui est défini par (1.15) pour $k = k_0 + 2, k_0 + 3, \dots, k_1 - 1$, en fonction de z_{k_1}. Notons que $z_{k_1} = a$. Nous avons

$$\begin{aligned}
u_{k_0+1} &= -(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1}\, \Sigma_{k_0} F^T z_{k_0+1} \\
&= -(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1}\, \Sigma_{k_0} F^T \left(\prod_{i=k_0+1}^{k_1-1} A_i\right) z_{k_1}, \\
u_{k_0+2} &= R^{-1} H\lambda_{k_0+2} \\
&= R^{-1} HB_{k_0+1}\, z_{k_0+2} \\
&= R^{-1} HB_{k_0+1} \left(\prod_{i=k_0+2}^{k_1-1} A_i\right) z_{k_1}, \\
&\ \ \vdots \\
u_{k_1-1} &= R^{-1} H\lambda_{k_1-1} \\
&= R^{-1} HB_{k_1-2}\, z_{k_1-1} \\
&= R^{-1} HB_{k_1-2}\, A_{k_1-1}\, z_{k_1}, \\
u_{k_1} &= R^{-1} HB_{k_1-1}\, z_{k_1}\,.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

On en déduit

$$u_{k+1} = R^{-1} HB_k \left(\prod_{i=k+1}^{k_1-1} A_i\right) z_{k_1}, \quad k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, k_1 - 1\,. \tag{1.25}$$

Nous pouvons également écrire b défini par (1.21) en fonction de z_{k_1} :

$$\begin{aligned}
b &= F^T z_{k_0+1} + H^T u_{k_0+1}, \\
&= F^T \left(\prod_{i=k_0+1}^{k_1-1} A_i\right) z_{k_1} - H^T(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1}\, \Sigma_{k_0} F^T \left(\prod_{k_0+1}^{k_1-1} A_i\right) z_{k_1}, \\
&= [I - H^T(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1}\, \Sigma_{k_0}]\, F^T \left(\prod_{k_0+1}^{k_1-1} A_i\right) z_{k_1}\,.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Donc, $a^T E\hat{x}_{k_1}$ prend la forme suivante

$$
\begin{aligned}
a^T E\hat{x}_{k_1} = {} & a^T \left(\prod_{i = k_0 + 1}^{k_1 - 1} A_i \right)^T F \Sigma_{k_0} (R + H \Sigma_{k_0} H^T)^{-1} y_{k_0} \\
& - a^T \left(\prod_{i = k_0 + 2}^{k_1 - 1} A_i \right)^T B_{k_0 + 1}^T H^T R^{-1} y_{k_0 + 1} \\
& \vdots \\
& - a^T A_{k_1 - 1}^T B_{k_1 - 2}^T H^T R^{-1} y_{k_1 - 2} \\
& - a^T B_{k_1 - 1}^T H^T R^{-1} y_{k_1 - 1} \\
& - a^T \left(\prod_{k_0 + 1}^{k_1 - 1} A_i \right)^T F [I - \Sigma_{k_0} (R + H \Sigma_{k_0} H^T)^{-1} H] \bar{x}_{k_0} .
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
E\hat{x}_{k_1} = {} & \left(\prod_{i = k_0 + 1}^{k_1 - 1} A_i \right)^T F \Sigma_{k_0} (R + H \Sigma_{k_0} H^T)^{-1} y_{k_0} \\
& - \left(\prod_{i = k_0 + 2}^{k_1 - 1} A_i \right)^T B_{k_0 + 1}^T H^T R^{-1} y_{k_0 + 1} \\
& \vdots \\
& - A_{k_1 - 1}^T B_{k_1 - 2}^T H^T R^{-1} y_{k_1 - 2} \\
& - B_{k_1 - 1}^T H^T R^{-1} y_{k_1 - 1} \\
& - \left(\prod_{k_0 + 1}^{k_1 - 1} A_i \right)^T F [I - \Sigma_{k_0} (R + H \Sigma_{k_0} H^T)^{-1} H] \bar{x}_{k_0} \\
= {} & \sum_{j = k_0 + 2}^{k_1 - 1} \left[\left(\prod_{i = j}^{k_1 - 1} A_i \right)^T B_{j - 1}^T H^T R^{-1} y_{j - 1} \right] + B_{k_1 - 1}^T H^T R^{-1} y_{k_1 - 1} \\
& + \left(\prod_{i = k_0 + 1}^{k_1 - 1} A_i \right)^T F [\bar{x}_{k_0} + \Sigma_{k_0} (R + H \Sigma_{k_0} H^T)^{-1} (y_{k_0} - H \bar{x}_{k_0})] .
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Simultanément, nous avons la prédiction de $a^T E\hat{x}_{k_1+1}$

$$
\begin{aligned}
a^T E\hat{x}_{k_1+1} = z_{k_1+1}^T & \left(\prod_{i=k_0+1}^{k_1} A_i \right)^T F\Sigma_{k_0}(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1} y_{k_0} \\
& - z_{k_1+1}^T \left(\prod_{i=k_0+2}^{k_1} A_i \right)^T B_{k_0+1}^T H^T R^{-1} y_{k_0+1} \\
& \vdots \\
& - z_{k_1+1}^T \left(\prod_{k_1-1}^{k_1} A_i \right)^T B_{k_1-2}^T H^T R^{-1} y_{k_1-2} \\
& - z_{k_1+1}^T A_{k_1}^T B_{k_1-1}^T H^T R^{-1} y_{k_1-1} \\
& - z_{k_1+1}^T B_{k_1}^T H^T R^{-1} y_{k_1} \\
& + z_{k_1+1}^T \left(\prod_{k_0+1}^{k_1} A_i \right)^T F[I - \Sigma_{k_0}(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1} H]\, \bar{x}_{k_0} . \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

Notons que $z_{k_1+1} = a$, ainsi nous avons :

$$
\begin{aligned}
E\hat{x}_{k_1+1} = A_{k_1}^T & \left\{ \sum_{j=k_0+2}^{k_1-1} \left[\left(\prod_{i=j}^{k_1-1} A_i \right)^T B_{j-1}^T H^T R^{-1} y_{j-1} \right] + \right. \\
& + B_{k_1-1}^T H^T R^{-1} y_{k_1-1} \\
& \left. + \left(\prod_{i=k_0+1}^{k_1-1} A_i \right)^T F[\bar{x}_{k_0} + \Sigma_{k_0}(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1} (y_{k_0} - H\bar{x}_{k_0})] \right\} \\
& - B_{k_1}^T H^T R^{-1} y_{k_1} \\
= {} & A_{k_1}^T E\hat{x}_{k_1} - B_{k_1}^T H^T R^{-1} y_{k_1} \\
= {} & (A_{k_1}^T \quad B_{k_1}^T) \begin{pmatrix} E\hat{x}_{k_1} \\ - H^T R^{-1} y_{k_1} \end{pmatrix} \\
= {} & (0 \quad F)\, M_{k_1}^{-1} \begin{pmatrix} E\hat{x}_{k_1} \\ - H^T R^{-1} y_{k_1} \end{pmatrix} . \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

On en déduit le filtre récursif

$$
E\hat{x}_{k_1+1} = (0 \quad F)\, M_{k_1}^{-1} \begin{pmatrix} E\hat{x}_{k_1} \\ - H^T R^{-1} y_{k_1} \end{pmatrix} . \qquad (1.31)
$$

Considérons maintenant $k_1 = k_0 + 1$, en remplaçant u_{k_0+1} par $-(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1} \Sigma_{k_0} F^T z_{k_0+1}$ et b par $F^T z_{k_0+1} - H^T(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1} \Sigma_{k_0} F^T z_{k_0+1}$ dans (1.4), nous avons

$$E\hat{x}_{k_0+1} = F\bar{x}_{k_0} + F\Sigma_{k_0}(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1} (y_{k_0} - H\bar{x}_{k_0}) . \qquad (1.32)$$

Notons que $z_{k_1} = z_{k_0+1} = a$.

Donc, on a démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 1.3 : *Sous l'hypothèse* **H)**, *il existe une prédiction linéaire optimale de* E_{x_k} *qui prend la forme récursive suivante :*

$$E\hat{x}_{k+1} = (0 \quad F)\, M_k^{-1} \begin{pmatrix} E\hat{x}_k \\ -H^T R^{-1} y_k \end{pmatrix}, \quad k > k_0,$$

$$E\hat{x}_{k_0+1} = F\bar{x}_{k_0} + F\Sigma_0(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1}(y_{k_0} - H\bar{x}_{k_0}) . \qquad (1.33)$$

où M_k *est une matrice symétrique et inversible, définie par*

$$M_k = \begin{pmatrix} \Sigma_k & E \\ E^T & -H^T R^{-1} H \end{pmatrix}, \quad k > k_0 . \qquad (1.34)$$

Σ_k *est symétrique et positive définie*

$$\Sigma_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix} M_k^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & H^T R^{-1} H \end{pmatrix} M_k^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix} + Q , \quad k > k_0 . \qquad (1.35)$$

La condition initiale Σ_{k_0+1} *est donnée par*

$$\Sigma_{k_0+1} = F\Sigma_{k_0} F^T - F\Sigma_{k_0} H^T(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1} H\Sigma_{k_0} F^T + Q . \qquad (1.36)$$

1.4. CAS $E = I$: LE FILTRE DE KALMAN

PROPOSITION 1.4 : *Si E est la matrice identité, le théorème* 1.3 *se ramène au filtre de Kalman.*

Preuve

Comme dans l'équation (2.6.10) de [8] nous avons pour la matrice M_k définie par (1.4)

$$M_k^{-1} = \begin{pmatrix} H^T \hat{R}^{-1} H & I - H^T \hat{R}^{-1} H\Sigma_k \\ I - \Sigma_k H^T \hat{R}^{-1} H & \Sigma_k H^T \hat{R}^{-1} H\Sigma_k - \Sigma_k \end{pmatrix} . \qquad (1.37)$$

où $\hat{R}^{-1} = (R + H\Sigma_k H^T)^{-1}$. La prédiction de x_{k+1} définie dans le théorème 1.1.3 devient

$$\hat{x}_{k+1} = (0 \quad F)\, M_k^{-1} \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ -H^T R^{-1} y_k \end{pmatrix}$$

$$= F(I - \Sigma_k H^T \hat{R}^{-1} H \quad \Sigma_k H^T \hat{R}^{-1} H\Sigma_k - \Sigma_k) \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ -H^T R^{-1} y_k \end{pmatrix}. \tag{1.38}$$

Notons que

$$[\Sigma_k H^T \hat{R}^{-1} H\Sigma_k - \Sigma_k]\, H^T R^{-1} =$$

$$= \Sigma_k H^T \hat{R}^{-1} [H\Sigma_k H^T - (R + H\Sigma_k H^T)]\, R^{-1}$$

$$= -\Sigma_k H^T \hat{R}^{-1}. \tag{1.39}$$

On en déduit donc le filtre de Kalman

$$\hat{x}_{k+1} = F\hat{x}_k + F\Sigma_k (R + H\Sigma_k H^T)^{-1} (y_k - H\hat{x}_k). \tag{1.40}$$

Ainsi, la proposition est établie. ■

1.5. RÉSULTAT ASYMPTOTIQUE

Simultanément, le problème du filtrage en faisant tendre l'intervalle $k_1 - k_0$ vers l'infini est résolu par la dualité du problème de la commande à temps final infini.

On conclut le théorème suivant :

THÉORÈME 1.5 : *On suppose le système dual $E^T z_{k-1} = F^T z_k + H^T u_k$ stabilisable et détectable par Q. Alors la solution Σ_k de l'équation* (1.35), *initialisée en $\Sigma_1 = Q$, converge vers l'unique solution positive semi-définie de l'équation de Riccati algébrique suivante :*

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix}^T \bar{M}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\Sigma} & 0 \\ 0 & H^T R^{-1} H \end{pmatrix} \bar{M}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix}^T + Q. \tag{1.41}$$

où

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma} & E \\ E^T & -H^T R^{-1} H \end{pmatrix}.$$

Le filtre asymptotique est donné par

$$E\hat{x}_{k+1} = (0 \quad F)\, \bar{M}^{-1} \begin{pmatrix} E\hat{x}_k \\ -H^T R^{-1} y_k \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

2. Filtrage Complet de x_k

- **Définition du système**

Pour des raisons de commodité, nous sommes amenés à modifier légèrement les notations. Le système implicite stochastique linéaire sera décrit par

$$E^0 x_{k+1}^0 = F^0 x_k^0 + V^0 v_k^0 , \tag{2.1}$$

$$y_k^0 = H^0 x_k^0 + \omega_k^0 , \tag{2.2}$$

où, v_k^0 et ω_k^0 sont des bruits blancs et gaussiens centrés de covariance $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & R^0 \end{pmatrix}$. R^0 est positive définie. L'état initial x_0 est un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $\bar{x}_0^0$ et de convariance Σ_0^0, et indépendant des v_k^0 et ω_k^0.

Nous allons présenter la théorie du filtrage complet de x_k^0 sous l'hypothèse **H)** et l'hypothèse complémentaire que le système admet des solutions causales (au sens de [6]), pour toute suite $\{v_k^0\}$. La technique va consister à utiliser l'hypothèse de causalité pour amener le système par changement de base dans une forme « partiellement explicite ». (Équations (2.17), (2.18)).

2.1. Transformation du système

En faisant des changements de base dans l'espace d'état $x_k^0 = A_1 \begin{pmatrix} x_1^1(k) \\ x_2^1(k) \end{pmatrix}$ et dans le domaine de l'équation (2.1) et en écrivant $B_1 E^0 A_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 V^0 = \begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \end{pmatrix}$ et $H^0 A_1 = (H_1^1 \quad H_2^1)$ avec A_1 et B_1 régulières, le système (2.1) et (2.2) prend la forme suivante :

$$x_1^1(k+1) = F_1^1 x_1^1(k) + F_2^1 x_2^1(k) + V_1^1 v_k^0 , \tag{2.3}$$

$$0 = F_3^1 x_1^1(k) + F_4^1 x_2^1(k) + V_2^1 v_k^0 , \tag{2.4}$$

$$y_k^0 = H_1^1 x_1^1(k) + H_2^1 x_2^1(k) + \omega_k^0 . \tag{2.5}$$

Sous l'hypothèse $(E^0 \quad V^0)$ surjective, c'est-à-dire $\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \end{pmatrix} \right)$ surjective, nous avons V_2^1 surjective, ainsi il existe A_2 inversible, telle que $V_2^1 A_2 = (0 \quad I)$. En écrivant $v_k^0 = A_2 v_k^1$ et en décomposant $v_k^1 = \begin{pmatrix} v_1^1(k) \\ v_2^1(k) \end{pmatrix}$

et $V_1^1 A_2 = (V_1^2 \quad V_2^2)$ dans (2.3) et (2.4), nous obtenons

$$x_1^1(k+1) = F_1^1 x_1^1(k) + F_2^1 x_2^1(k) + V_1^2 v_1^1(k) + V_2^2 v_2^1(k)\,, \tag{2.6a}$$
$$0 = F_3^1 x_1^1(k) + F_4^1 x_2^1(k) + v_2^1(k)\,, \tag{2.6b}$$

avec $\mathscr{E}(v_k^1 v_k^{1\,T}) = A_2^{-1} A_2^{-T} = Q^1 = \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_{12}^1 \\ Q_{21}^1 & Q_2^1 \end{pmatrix}$ positive définie.

Remarquons que le problème de filtrage du système implicite n'a de sens que s'il existe des solutions causales au sens de l'article [6].

REMARQUE 2.1 : *Sous l'hypothèse $(E^0 \quad V^0)$ surjective, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des solutions causales au système* (2.1) *quel que soit $v^0(.)$ est que F_4^1 dans* (2.6) *soit surjective.*

PREUVE

La condition nécessaire et suffisante pour cette existence est (voir [6])

$$\operatorname{Im} V^0 \subset E^0 \mathscr{V}^* + F^0 \operatorname{Ker} E^0\,, \tag{2.7}$$

où $\mathscr{V}^*$ est le sous-espace maximum satisfaisant $F^0 \mathscr{V}^* \subset E^0 \mathscr{V}^*$ avec

$$E^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^0 = \begin{pmatrix} F_1^1 & F_2^1 \\ F_3^1 & F_4^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V^0 = \begin{pmatrix} V_1^2 & V_2^2 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Soit $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ une matrice engendrant $\mathscr{V}^*$, (2.7) s'écrit

$$\operatorname{Im} \begin{pmatrix} V_1^2 & V_2^2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \subset \operatorname{Im} \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Im} \begin{pmatrix} F_2^1 \\ F_4^1 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Donc F_4^1 surjective est nécessaire.

Réciproquement, si F_4^1 est surjective, la forme (2.6) du système montre qu'il existe des solutions causales quel que soit $v^0(.)$. ■

Ainsi, il existe A_3 inversible telle que $F_4^1 A_3 = (-I \quad 0)$ car F_4^1 est surjective.

En écrivant $x_1^1(k) = x_1^2(k)$, $x_2^1(k) = A_3 \begin{pmatrix} x_2^2(k) \\ x_3^2(k) \end{pmatrix}$, $F_1^1 = F_1^2$, $F_2^1 A_3 = (F_2^2 \quad F_3^2)$, $F_3^1 = F_4^2$, $H_1^1 = H_1^2$ et $H_2^1 A_3 = (H_2^2 \quad H_3^2)$ dans (2.6), (2.7) et (2.5), nous avons

$$x_1^2(k+1) = F_1^2 x_1^2(k) + F_2^2 x_2^2(k) + F_3^2 x_3^2(k) + {} + V_1^2 v_1^1(k) + V_2^2 v_2^1(k)\,, \tag{2.9}$$
$$0 = F_4^2 x_1^2(k) - x_2^2(k) + v_2^1(k)\,, \tag{2.10}$$
$$y_k^0 = H_1^2 x_1^2(k) + H_2^2 x_2^2(k) + H_3^2 x_3^2(k) + \omega_k^0\,. \tag{2.11}$$

Sous l'hypothèse $\begin{pmatrix} E^0 \\ H^0 \end{pmatrix}$ injective, $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (H_1^2 \quad H_2^2 \quad H_3^2) \end{pmatrix}$ l'est, ainsi H_3^2 l'est.

Il existe donc B_1 inversible, telle que $B_1 H_3^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$.

En multipliant l'équation (2.11) à gauche par B_1 et en écrivant $B_1 y_k^0 = y_k^1 = \begin{pmatrix} y_1^1(k) \\ y_2^1(k) \end{pmatrix}$, $B_1 \omega_k^0 = \omega_k^1$ et $B_1(H_1^2 \quad H_2^2 \quad H_3^2) = (H_1^3 \quad H_2^3 \quad H_3^3)$, l'équation (2.11) devient

$$y_k^1 = H_1^3 x_1^2(k) + H_2^3 x_2^2(k) + H_3^3 x_3^2(k) + \omega_k^1 , \tag{2.12}$$

où $H_3^3 = B_1 H_3^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$ et $\mathscr{E}(\omega_k^1 \omega_k^{1\,T}) = B_1 R^0 B_1^T = R^1 > 0$.

En remplaçant $\nu_2^1(k)$ dans (2.9) par son expression, $\nu_2^1(k) = -F_4^2 x_1^2(k) + x_2^2(k)$, prise dans (2.10), (2.9) devient

$$\begin{aligned} x_1^2(k+1) = (F_1^2 - V_2^2 F_4^2)\, x_1^2(k) + (F_2^2 + V_2^2)\, x_2^2(k) + \\ + F_3^2 x_3^2(k) + V_1^2 \nu_1^1(k) , \end{aligned} \tag{2.13}$$

et en posant $F_1^2 - V_2^2 F_4^2 = F_1^3$, $F_2^2 + V_2^2 = F_2^3$ et $F_3^2 = F_3^3$, nous avons

$$x_1^2(k+1) = F_1^3 x_1^2(k) + F_2^3 x_2^2(k) + F_3^3 x_3^2(k) + V_1^2 \nu_1^1(k) . \tag{2.14}$$

A l'instant $k+1$, l'équation (2.10) s'écrit

$$x_2^2(k+1) = F_4^2 x_1^2(k+1) + \nu_2^1(k+1) . \tag{2.15}$$

En substituant (2.14) dans (2.15) et en écrivant $F_4^2 F_1^3 = F_4^3$, $F_4^2 F_2^3 = F_5^3$, $F_4^2 F_3^3 = F_6^3$ et $F_4^2 V_1^2 = V_2^2$, nous obtenons

$$x_2^2(k+1) = F_4^3 x_1^2(k) + F_5^3 x_2^2(k) + F_6^3 x_3^2(k) + V_2^2 \nu_1^1(k) + \nu_2^1(k+1) . \tag{2.16}$$

En regroupant (2.15), (2.16) et (2.12), et en écrivant

$$x_k^* = \begin{pmatrix} x_1^*(k) \\ x_2^*(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2(k) \\ x_2^2(k) \end{pmatrix} \\ x_3^2(k) \end{pmatrix},$$

$$y_k^* = y_k^1 , \quad \nu_k^* = \begin{pmatrix} \nu_1^1(k) \\ \nu_2^1(k+1) \end{pmatrix} , \quad \omega_k^* = \omega_k^1 ,$$

$$F^* = (F_1^* \quad F_2^*) = \left(\begin{pmatrix} F_1^3 & F_2^3 \\ F_4^3 & F_5^3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_3^3 \\ F_6^3 \end{pmatrix} \right),$$

$$V^* = \begin{pmatrix} V_1^* & 0 \\ V_2^* & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^2 & 0 \\ V_2^2 & I \end{pmatrix}$$

et
$$H^* = \left(\begin{pmatrix} H_1^* \\ H_2^* \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \right) = ((H_1^3 \quad H_2^3) \quad H_3^3),$$

on en conclut la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1 : *Sous l'hypothèse* **H)**, *si le système* (2.1)-(2.2) *admet des solutions causales au sens de l'article* [6], *il peut se mettre sous la forme suivante :*

$$x_1^*(k+1) = F^* x_k^* + V^* \nu_k^*, \tag{2.17}$$
$$y_k^* = H^* x_k^* + \omega_k^*, \tag{2.18}$$

avec

$$Q^* = \mathscr{E}(\nu_k^* \nu_k^{*T}) = \begin{pmatrix} Q_{11}^1 & 0 \\ 0 & Q_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad S_1^* = \mathscr{E}(\nu_{k+1}^* \nu_k^{*T}) = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_2^* = \mathscr{E}(\nu_{k+2}^* \nu_k^{*T}) = 0, \quad R^* = \mathscr{E}(\omega_k^* \omega_k^{*T}) = B_1 R^0 B_1^T,$$

$$x_k^* = x_k^2 = \begin{pmatrix} x_1^1(k) \\ A_3^{-1} x_2^1(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix} A_1^{-1} x^0(k),$$

$$\Sigma_0^* = \mathscr{E}(x_0^* x_0^{*T}) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix} \Sigma_0 A_3^{-T} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix}^T,$$

$$F^* = (F_1^* \quad F_2^*), \quad V^* = \begin{pmatrix} V_1^* & 0 \\ V_2^* & I \end{pmatrix} \quad et \quad H^* = \begin{pmatrix} H_1^* & 0 \\ H_2^* & I \end{pmatrix}.$$

2.2. REPRÉSENTATION MARKOVIENNE D'UNE SUITE CORRÉLÉE

- **Rappels sur la propriété de Markov**

La propriété de Markov pour une suite temporelle ou un processus stochastique est très classique, on en rappelle la définition et le théorème sur le caractère markovien d'une suite gaussienne (voir [12]).

DÉFINITION 2.2 : *La série temporelle* $x(.)$ *est markovienne si et seulement si pour toute suite* $\{k_i : k > k_1 > \cdots > k_i > \cdots\}$, *les lois conditionnelles*

$$\mathscr{L}\{x_k \mid x_{k_1}, \ldots, x_{k_i}\} \quad et \quad \mathscr{L}\{x_k \mid x_{k_1}\}$$

sont identiques.

THÉORÈME 2.2 : *La propriété de Markov d'une suite gaussienne $x(.)$ est caractérisée par chacune des deux propriétés équivalentes suivantes :*

1) $\mathscr{E}(x_k \mid x_{k_1}, \ldots, x_{k_i}) = \mathscr{E}(x_k \mid x_{k_1}), \forall k \geq k_1 \geq \cdots \geq k_i$;

2) *la suite $x(.)$ est régie par une équation récurrente de la forme*

$$x_{k+1} = Fx_k + v_k ,$$

où $v(.)$ est un bruit blanc indépendant de x_0.

- **Représentation markovienne d'une suite corrélée**

On étudie maintenant la représentation markovienne du système (2.17)-(2.18), avec le bruit $v(.)$ corrélé, selon [12].

PROPOSITION 2.2 : *Avec des changements de base de l'état $x^*(.)$ et du bruit $v^*(.)$ et de notation, le système* (2.17)-(2.18) *peut se mettre sous la forme suivante :*

$$x_1(k+1) = Fx_k + Vv_k , \tag{2.19}$$

$$y_k = Hx_k + \omega_k , \tag{2.20}$$

où $v(.)$ et $\omega(.)$ sont des bruits blancs et gaussiens centrés de covariance $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ qui est positive définie.

PREUVE

- On écrit l'équation (2.17) sous la forme

$$x_1^*(k+1) = F^* x_k^* + \rho_k , \tag{2.21}$$

$$\rho_{k+1} = A\rho_k + Bv_k^* , \tag{2.22}$$

où A et B sont des matrices à déterminer, telles que

$$P = \mathscr{E}(\rho_k \rho_k^T) = \mathscr{E}(V^* v_k^* v_k^{*T} V^*) = V^* Q^* V^{*T} , \tag{2.23}$$

$$P_1 = \mathscr{E}(\rho_{k+1} \rho_k^T) = \mathscr{E}(V^* v_{k+1}^* v_k^{*T} V^{*T}) = V^* S_1^* V^{*T} , \tag{2.24}$$

$$P_2 = \mathscr{E}(\rho_{k+2} \rho_k^T) = \mathscr{E}(V^* v_{k+2}^* v_k^{*T} V^{*T}) = V^* S_2^* V^{*T} = 0 . \tag{2.25}$$

De plus, l'équation (2.22) nous donne

$$P = APA^T + BB^T , \tag{2.26}$$

$$P_1 = AP , \tag{2.27}$$

$$P_2 = AAP . \tag{2.28}$$

Ainsi, nous avons

$$V^* Q^* V^{*T} = AV^* Q^* V^{*T} A^T + BB^* , \tag{2.29}$$

$$V^* S_1^* V^{*T} = AV^* Q^* V^{*T} , \tag{2.30}$$

$$AAV^* Q^* V^{*T} = 0 . \tag{2.31}$$

• En décomposant $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ et en remplaçant V^*, S_1^* et Q^* par (2.18), (2.19) et (2.20), l'équation (2.30) devient

$$\begin{pmatrix} 0 & V_1^* Q_{12}^1 \\ 0 & V_2^* Q_{12}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} V_1^* Q_{11}^1 V_1^{*T} + A_{12} V_2^* Q_{11}^1 V_1^{*T} & A_{11} V_1^* Q_{11}^1 V_2^{*T} + A_{12} V_1^* Q_{11}^1 V_2^{*T} + A_{12} Q_{22}^1 \\ A_{21} V_1^* Q_{11}^1 V_1^{*T} + A_{22} V_2^* Q_1^1 V_1^{*T} & A_{21} V_1^* Q_{11}^1 V_2^{*T} + A_{22} V_2^* Q_{11}^1 V_2^{*T} + A_{22} Q_{22}^1 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

Ainsi, l'équation (2.32) nous conduit à

$$(A_{11} V_1^* + A_{12} V_2^*) Q_{11}^* V_1^{*T} = 0\,, \tag{2.33}$$

$$(A_{11} V_1^* + A_{12} V_2^*) Q_{11}^* V_2^{*T} + A_{12} Q_{22}^* = V_1^* Q_{12}^1\,, \tag{2.34}$$

$$(A_{21} V_1^* + A_{22} V_2^*) Q_{11}^* V_1^{*T} = 0\,, \tag{2.35}$$

$$(A_{21} V_1^* + A_{22} V_2^*) Q_{11}^* V_2^{*T} + A_{22} Q_{22}^* = V_2^* Q_{12}^1\,. \tag{2.36}$$

Rappelons que $V_2^* = V_2^2 = F_4^2 V_1^2 = F_4^2 V_1^*$, l'équation (2.33) s'écrit

$$(A_{11} + A_{12} F_4^2) V_1^* Q_{11}^* V_1^{*T} = 0\,, \tag{2.37}$$

nous obtenons

$$(A_{11} + A_{12} F_4^2) V_1^* Q_{11}^* V_1^{*T} (A_{11} + A_{12} F_4^2)^T = 0\,, \tag{2.38}$$

où $Q_{11}^* > 0$, donc

$$(A_{11} + A_{12} F_4^2) V_1^* = 0\,, \tag{2.39}$$

soit

$$A_{11} V_1^* + A_{12} V_2^* = 0\,. \tag{2.40}$$

Simultanément, (2.35) implique

$$A_{21} V_1^* + A_{22} V_2^* = 0\,. \tag{2.41}$$

Les équations (2.34) et (2.36) deviennent

$$A_{12} Q_{22}^* = V_1^* Q_{12}^1\,, \tag{2.42}$$

$$A_{22} Q_{22}^* = V_2^* Q_{12}^1\,. \tag{2.43}$$

Donc, les matrices A_{12} et A_{22} sont déterminées par (2.42) et (2.43)

$$A_{12} = V_1^* Q_{12}^1 Q_{22}^{-*}, \tag{2.44}$$

$$A_{22} = V_2^* Q_{12}^1 Q_{22}^{-*}. \tag{2.45}$$

Les matrices A_{11} et A_{21} sont données par (2.40) et (2.41).

Remarquons qu'il existe toujours des solutions pour A_{11} et A_{21}, en fait $V_2^* = F_4^2 V_1^*$, nous pouvons prendre

$$A_{11} + A_{12} F_4^2 = 0, \tag{2.46}$$

$$A_{21} + A_{22} F_4^2 = 0, \tag{2.47}$$

dans (2.40) et (2.41), nous avons donc

$$A_{11} = -A_{12} F_4^2, \tag{2.48}$$

$$A_{21} = -A_{22} F_4^2, \tag{2.49}$$

La matrice A est déterminée. ■

- Nous allons maintenant calculer la matrice B.

En écrivant $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, l'équation (2.29) devient

$$\begin{pmatrix} V_1^* Q_{11}^1 V_1^{*T} & V_1^* Q_{11}^1 V_2^{*T} \\ V_2^* Q_{11}^1 V_1^{*T} & V_2^* Q_{11}^1 V_2^{*T} + Q_{22}^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} V_1^* Q_{12}^1 A_{12}^T & V_1^* Q_{12}^1 A_{22}^T \\ V_2^* Q_{12}^1 A_{12}^T & V_2^* Q_{12}^1 A_{22}^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 B_1^T & B_1 B_2^T \\ B_2 B_1^T & B_2 B_2^T \end{pmatrix}. \tag{2.50}$$

En remplaçant A_{12} et A_{22} par (2.44) et (2.45) dans (2.50), on a

$$\begin{pmatrix} B_1 B_1^T & B_1 B_2^T \\ B_2 B_1^T & B_2 B_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^* \Delta V_1^{*T} & V_1^* \Delta V_2^{*T} \\ V_2^* \Delta V_1^{*T} & V_2^* \Delta V_2^{*T} + Q_{22}^1 \end{pmatrix}, \tag{2.51}$$

où $\Delta = Q_{11}^1 - Q_{12}^1 (Q_{22}^1)^{-1} Q_{21}^1$.

Remarquons que $Q^1 = \begin{pmatrix} Q_{11}^1 & Q_{12}^1 \\ Q_{21}^1 & Q_{22}^1 \end{pmatrix} = A_2^{-1} A_2^{-T} > 0$, donc Q_{11}^1, Q_{22}^1 et Δ sont positives définies, nous pouvons écrire

$$Q_{11}^1 = C_1 C_1^T, \quad Q_{22}^1 = C_2 C_2^T \quad \text{et} \quad \Delta = C C^T. \tag{2.52}$$

Ainsi, (2.51) s'écrit

$$\begin{pmatrix} B_1 B_1^T & B_1 B_2^T \\ B_2 B_1^T & B_2 B_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^* C C^T V_1^{*T} & V_1^* C C^T V_2^{*T} \\ V_2^* C C^T V_1^{*T} & V_2^* C C^T V_2^{*T} + C_2 C_2^T \end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

Donc, la matrice B est déterminée par

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^* C & 0 \\ V_2^* C & C_2 \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

• Les équations (2.32) et (2.30) nous conduisent à

$$AV^* Q^* V^{*T} = \begin{pmatrix} 0 & V_1^* Q_{12}^1 \\ 0 & V_2^* Q_{12}^1 \end{pmatrix}, \tag{2.55}$$

notons que $A_{11} V_1^* + A_{12} V_2^* = 0$ et $A_{21} V_1^* + A_{22} V_2^* = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_2 &= AAV^* Q^* V^{*T} \\ &= A \begin{pmatrix} 0 & V_1^* Q_{12}^1 \\ 0 & V_2^* Q_{12}^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (A_{11} V_1^* + A_{12} V_2^*) Q_{12}^1 \\ 0 & (A_{21} V_1^* + A_{22} V_2^*) Q_{12}^1 \end{pmatrix} \\ &= 0 . \end{aligned} \tag{2.56}$$

L'équation (2.31) est vérifiée.

• En posant $x_k = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^*(k) \\ \rho_k \end{pmatrix} \\ x_2^*(k) \end{pmatrix}$, $\quad \nu_k = \nu_k^*$, $y_k = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} = y_k^*$, $\omega_k = (\omega_1(k) \quad \omega_2(k)) = \omega_k^*$, $F = (F_1 \quad F_2) = \left(\begin{pmatrix} F_1^* & I \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_2^* \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$, $Q = Q^*$, $R = R^*$ et $H = (H_1 \quad H_2) = \left(\begin{pmatrix} H_1^* & 0 \\ H_2^* & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \right)$, nous aboutissons à la proposition 1.2.2. ■

2.3. FILTRAGE DE x_k

Le système (2.19)-(2.20) s'écrit

$$x_1(k+1) = F x_k + V \nu_k , \tag{2.57a}$$

$$y_1(k) = H_1 x_1(k) + \omega_1(k) , \tag{2.57b}$$

$$y_2(k) = H_2 x_1(k) + x_2(k) + \omega_2(k) . \tag{2.57c}$$

La covariance de ν_k, $\omega_1(k)$ et $\omega_2(k)$ est $\begin{pmatrix} Q & (0 \quad 0) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

L'objectif du filtrage est de calculer $\hat{x}_k = \mathscr{E}[x_k \mid y_0, \ldots, y_k]$. Nous noterons $\tilde{x}_k$ l'erreur $x_k - \hat{x}_k$ et Σ_k sa covariance (voir [7]).

Supposons $\hat{x}_k$ et Σ_k déjà déterminés.

• (2.57*a*) et (2.57*b*) nous permettent alors de calculer $\hat{x}_1(k+1)$ par un filtre de Kalman classique.

Par contre, l'équation (2.57*c*) ne peut pas être utilisée. En effet, la connaissance de $y_2(k+1)$ ne donne aucune information supplémentaire sur $\hat{x}_1(k+1)$, parce que $x_2(k+1)$ est totalement arbitraire. (Formellement, nous pouvons lui donner une covariance infinie ce qui annule le coefficient du terme en $y_2(k+1) - \bar{y}_2(k+1)$.)

Étant donné $\{y(0), \ldots, y_k\}$, les moyennes et les covariances de $x_1(k+1)$ et $y_1(k+1)$ sont

$$\bar{x}_1(k+1) = F\hat{x}_k, \tag{2.58a}$$

$$\bar{y}_1(k+1) = H_1 F\hat{x}_k. \tag{2.58b}$$

$$\bar{\Sigma}_{k+1} = \begin{pmatrix} F\Sigma_k F^T + VQV^T & F\Sigma_k F^T H_1^T + VQV^T H_1^T \\ H_1 F\Sigma_k F^T + H_1 VQV^T & H_1 F\Sigma_k F^T H_1^T + H_1 VQV^T H_1^T + R_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}_{11}(k+1) & \bar{\Sigma}_{12}(k+1) \\ \bar{\Sigma}_{21}(k+1) & \bar{\Sigma}_{22}(k+1) \end{pmatrix}. \tag{2.59}$$

Étant donné $\{y(0), \ldots, y_{k+1}\}$, la moyenne et la covariance de $x_1(k+1)$ sont

$$\hat{x}_1(k+1) = \bar{x}_1(k+1) + K_{k+1}[y_1(k+1) - \bar{y}_1(k+1)], \tag{2.60}$$

$$\Sigma_1(k+1) = \bar{\Sigma}_{11}(k+1) - \bar{\Sigma}_{12}(k+1)\,\bar{\Sigma}_{22}^{-1}(k+1)\,\bar{\Sigma}_{21}(k+1). \tag{2.61}$$

où

$$K_{k+1} = \bar{\Sigma}_{12}(k+1)\,\bar{\Sigma}_{22}^{-1}(k+1). \tag{2.62}$$

$\bar{\Sigma}_{22}$ est définie positive, puisque R_1 est définie positive.

• (2.57c) nous donne $\hat{x}_2(k+1)$:

$$\hat{x}_2(k+1) = y_2(k+1) - H_2\hat{x}_1(k+1). \tag{2.63}$$

• L'erreur $\tilde{x}_{k+1}$ et sa covariance Σ_{k+1} sont

$$\tilde{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} I \\ -H_2 \end{pmatrix} \tilde{x}_1(k+1) + \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix} \omega_2(k+1)$$

$$= \bar{A}\tilde{x}_k + \bar{B}v_k + \bar{C}\omega_{k+1}, \tag{2.64}$$

$$\Sigma_{k+1} = \bar{A}\Sigma_k\bar{A}^T + \bar{B}Q\bar{B}^T + \bar{C}R\bar{C}^T,$$

où $\bar{A} = \begin{pmatrix} I \\ -H_2 \end{pmatrix} [I - K_{k+1} H] F$, $\bar{B} = \begin{pmatrix} I \\ -H_2 \end{pmatrix} [I - K_{k+1} H] V$ et $\bar{C} = \left(- \begin{pmatrix} I \\ H_2 \end{pmatrix} K_{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix} \right)$.

On en conclut le théorème suivant.

THÉORÈME : *Sous l'hypothèse H), si le système* (2.1)-(2.2) *admet des solutions causales, il peut se mettre sous la forme* (2.57) *et nous avons le filtre suivant*

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{F}\hat{x}_k + \bar{K}_{k+1}(y_{k+1} - \bar{H}\hat{x}_k), \tag{2.65}$$

avec $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$, *où* $\bar{F} = \begin{pmatrix} I \\ H_2 \end{pmatrix} F$, $\bar{K}_{k+1} = \begin{pmatrix} K_{k+1} & 0 \\ H_2 K_{k+1} & I \end{pmatrix}$ *et* $\bar{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La covariance d'erreur est donnée par

$$\Sigma_{k+1} = \bar{A}\Sigma_k \bar{A}^T + \bar{B}Q\bar{B}^T + \bar{C}R\bar{C}^T, \tag{2.66}$$

où

$$K_{k+1} = [F\Sigma_k F^T H_1^T + VQV^T H_1^T][H_1 F\Sigma_k F^T H_1^T + H_1 VQV^T H_1^T + R_1]^{-1} \tag{2.67}$$

Les équations du filtre sont récurrentes.

Donc, le problème du filtrage du système implicite est résolu.

3. Lissage de x_k

Pour le système stochastique implicite (1.1)-(1.2), nous considérons les trois types de lissage classiques : lissage à point fixe, à retard fixe ou à intervalle fixe.

3.1. LISSAGE A POINT FIXE

- **Définition du problème**

Nous étudions l'estimation optimale $\hat{x}_{j/k}$ de l'état x_j à l'instant j fixé pour tout $k > j$, c'est-à-dire

$$\hat{x}_{j/k} = \mathscr{E}\{x_j/y_1, y_2, \dots, y_k\}, \forall k > j \text{ et } j \text{ fixé}.$$

- **Modélisation**

Nous utilisons une méthode consistant à créer un nouveau modèle d'état augmenté, qui est aussi un système implicite, puis à appliquer les méthodes du filtrage présentées dans les chapitres précédents.

Notons $x_k^j = \begin{pmatrix} x_k \\ x_k^a \end{pmatrix}$ le vecteur d'état augmenté, de dimension $2n$ avec $x_{k+1}^a = x_k^a$, $\forall k \geqslant j$ et $x_j^a = x_j$.

Nous avons donc le système augmenté

$$E^j x_{k+1}^j = F^j x_k^j + V^j v_k , \tag{3.1a}$$

$$y_k = H^j x_k^j + \omega_k , \tag{3.1b}$$

avec $E^j = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $F^j = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $V^j = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$ et $H^j = (H \quad 0)$.

Si nous pouvons calculer l'estimation $E^j \hat{x}_{k+1/k}^j = \begin{pmatrix} E\hat{x}_{k+1/k} \\ \hat{x}_{k+1/k}^a \end{pmatrix}$, nous obtenons ainsi le lisseur $\hat{x}_{j/k}$ pour tout $k \geqslant j$ car $\hat{x}_{k+1/k}^a = \hat{x}_{j/k}$.

HYPOTHÈSE **Hj)**

Nous avons besoin de l'hypothèse **H** appliquée au système augmenté (3.1), que nous appellerons hypothèse **Hj)**.

REMARQUE 3.1 : *L'hypothèse* **H)** *dans la section* 1.1 *pour le système* (1.1)-(1.2) *est identique à l'hypothèse* **Hj)** *pour le système* (3.1), *car si* $(E \quad V)$ *est surjective.* $(E^j \quad V^j)$ *l'est, si* $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ *est injective.* $\begin{pmatrix} E^j \\ H^j \end{pmatrix}$ *l'est aussi. Réciproquement, l'hypothèse* **H)** *est aussi nécessaire pour que l'hypothèse* **Hj)** *soit satisfaite.*

- **Solution du problème**

Supposons $E\hat{x}_{j+1/j}$, $\hat{x}_{j/j}$, $\Sigma_{j+1/j}$ et $\Sigma_{j/j}$ déjà déterminés, ainsi que $E^j \hat{x}_{j+1/j}^j$ et

$$\Sigma_{j+1}^j = \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} Ex_{j+1} - E\hat{x}_{j+1/j} \\ x_j - \hat{x}_{j/j} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Ex_{j+1} - E\hat{x}_{j+1/j} \\ x_j - \hat{x}_{j/j} \end{pmatrix}^T\right] = \begin{pmatrix} \Sigma_{j+1/j} & F\Sigma_{j/j} \\ \Sigma_{j/j} F^T & \Sigma_{j/j} \end{pmatrix}$$

car $E\hat{x}_{j+1/j} = F\hat{x}_{j/j}$.

Nous appliquons le théorème 1.3 au système (3.1), la prédiction de $E^j x_{k+1}^j$ est donnée par

$$E^j \hat{x}_{k+1/k}^j = (0 \quad F^j)\, M_{k+1}^{-j} \begin{pmatrix} E^j \hat{x}_{k/k-1}^j \\ -H^{jT} R^{-j} y_k \end{pmatrix}, \quad k \geqslant j+1 ,$$

d'où M_k^j est symétrique et inversible, définie par

$$M_k^j = \begin{pmatrix} \Sigma_k^j & E^j \\ E^{jT} & -H^{jT} R^{-j} H^j \end{pmatrix}, \quad k > j ,$$

Σ_k^j est symétrique et positive définie

$$\Sigma_{k+1}^j = \begin{pmatrix} 0 \\ F^{jT} \end{pmatrix} M_k^{-j} \begin{pmatrix} \Sigma_k^j & 0 \\ 0 & H^{jT} R^{-j} \end{pmatrix} M_k^{-j} \begin{pmatrix} 0 \\ F^{jT} \end{pmatrix} + Q^j , \quad k > j .$$

Les conditions initiales $E\hat{x}_{j+1/j}$ et $\Sigma_{j+1/j}$ peuvent être déterminées par la méthode décrite dans la section « 1.1 Filtrage de Ex_k par dualité » et $\hat{x}_{j/j}$ et $\Sigma_{j/j}$ par celle dans la section « 1.2 Filtrage complet de x_k » à partir de l'instant $k = 0$ avec $\bar{x}_0$ et $\bar{\Sigma}_0$.

Ainsi on en conclut le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1 : *Le problème de lissage à point fixe à l'instant j du système* (1.1)-(1.2) *est équivalent au problème de filtrage du nouveau système implicite augmenté* (3.1). *L'hypothèse* **H**) *est identique à l'hypothèse* **Hj**). *Ainsi le problème de lissage peut être résolu par le théorème* 1.3 *pour* $k > j$. *En appliquant la méthode décrite dans la section* « 1.2 *Filtrage complet de* x_k » *et de nouveau celle dans le théorème* 1.3, *nous pouvons déterminer les conditions initiales* $E^j \hat{x}_{j+1/j}^j = \begin{pmatrix} E\hat{x}_{j+1/j} \\ \hat{x}_{j/j} \end{pmatrix}$ *et* $\Sigma_{j+1}^j = \begin{pmatrix} \Sigma_{j+1/j} & F\Sigma_{j/j} \\ \Sigma_{j/j} F^T & \Sigma_{j/j} \end{pmatrix}$ *à partir de l'instant* $k = 0$ *avec* $\bar{x}_0$ *et* $\bar{\Sigma}_0$.

3.2. LISSAGE A RETARD FIXE OU A INTERVALLE FIXE

- **Définition des problèmes**

Le lisseur à retard fixe calcule l'estimation $\hat{x}_{k-N/k}$ de l'état x à l'instant $k - N$, où N est un retard constant.

Le lisseur à intervalle fixe calcule l'estimation optimale $\hat{x}_{k/M}$ à l'instant $k(M \geq k \geq 0)$ avec M fixe.

On sait que ces deux problèmes peuvent encore se ramener à des problèmes de filtrage par introduction d'états augmentés. Ici on obtient des systèmes augmentés implicites. Mais il est facile de vérifier que les hypothèses sur le système d'origine se transportent sur ces systèmes augmentés. La solution de ces problèmes s'obtient donc facilement par application des résultats antérieurs. Finalement, disposant d'une théorie du filtrage, c'est un exercice désormais classique d'en déduire des lisseurs.

Conclusion

On a pu donner diverses versions des filtres et lisseurs optimaux pour le système implicite standard. Le filtre pour Ex peut être obtenu comme un système implicite, généralisation assez naturelle du filtre de Kalman. Le filtre pour x n'a été obtenu que dans le cas où le système satisfait une condition de causalité, somme toute très naturelle pour ce problème : si x_k dépend des bruits *futurs*, quel sens celà a-t-il d'en demander la meilleure estimée étant données les informations *passées ?*

Notons que pendant que cet article était en révision, une autre approche a été proposée dans l'article [29]. La question de la causalité y est résolue par un parti pris totalement différent : leur estimée ne prend en compte les observations *et les équations dynamiques* que jusqu'au temps présent. Certes ceci revient à ignorer une information a priori sur le système, mais permet de définir, et résoudre, un problème d'estimation causale y compris pour un système non causal. Nous ne savons pas, à ce jour, si les deux estimées coïncident quand la nôtre existe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. D. APLEVICH, Minimal representations of implicit linear systems, *Automatica,* vol. 21, n° 3, pp. 259-269.

[2] K. J. ASTROM, Introduction to Stochastic Control Theory, *Academic Press,* 1970.

[3] A. BANASZUK, M. KOCIECKI et K. M. PRZYLUSKI, On Implicit Linear Discrete-Time Systems, *Institute of Mathematics, Polish Acad. Sc.*, Warszawa, 1987.

[4] D. J. BENDER et A. J. LAUB, Controllability and observability at infinity of multivariable linear second-order models, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-30, 1985, 1234-1237.

[5] P. BERNHARD, Commande optimale, Décentralisation et Jeux Dynamiques, *Dunod,* Paris, 1976.

[6] P. BERNHARD, On singular implicit linear dynamical systems, *S.I.A.M. J. Control,* 20, n° 5, septembre 1982, pp. 612-633.

[7] P. BERNHARD et X. M. WANG, Filtrage des systèmes implicites linéaires discrets, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 304, série I, 1987, pp. 351-354.

[8] P. BERNHARD, J. GRIMM et X. M. WANG (1990), Commande optimale linéaire quadratique des systèmes implicites, *APII, Automat., Prod., Inform. Ind.*, pp. 17-36, Paris.

[9] S. L. CAMPBELL, Singular Systems of Differential Equations, *Pitman,* London, 1980.

[10] J. D. COBB, Controllability observability and duality in singular systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-29, 1984, pp. 1076-1082.

[11] M. EL-TOHAMI, V. LOVASS-NAGY et D. L. POWERS, On minimal-order inverses of discrete-time descriptor systems, *Int. J. Control,* vol. 41, n° 4, 1985, 991-1004.

[12] P. FAURRE, M. CLERGET et F. GERMAIN, Opérateurs Rationnels Positifs. Application à l'Hyperstabilité et aux Processus Aléatoires, *Dunod,* 1979.

[13] J. GRIMM, Realisation and canonicity for implicit systems, *S.I.A.M. J. Control*, vol. 26, n° 6, 1988, pp. 1331-1347.

[14] Th. KAILATH, Linear Systems, *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.*, 1980.

[15] V. KUCERA, Cascade compensation and state feedback in singular systems, *Proc. C.D.C. 26th*, Los Angeles, 1987, 1127-1128.

[16] F. L. LEWIS, Fundamental, reachability, and observability matrices for discrete descriptor systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-30, 1985, pp. 502-505.

[17] D. G. LUENBERGER, Dynamic equations in descriptor form, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-22, 1977, pp. 312-321.

[18] D. G. LUENBERGER, Time-invariant descriptor systems, in *Proc. J.A.C.C.*, San Francisco, CA, 1977, pp. 725-730.

[19] R. NIKOUKAH, A. S. WILLSKY et B. C. LÉVY, Generalized Riccati equations for two-point boundary-value descriptor systems, *Proc. C.D.C. 26th*, Los-Angeles, 1987, 1140-1141.

[20] D. H. OWENS et D. L. DEBELYKOVIC, On non-Liapunov stability of discrete descriptor systems, *Proc. C.D.C. 25th*, Athens, 1986, 2138-2139.

[21] M. A. SHAYMAN, On pole placement by dynamic compensation for descriptor systems, *Proc. C.D.C. 26th*, Los Angeles, 1987, 1131-1133.

[22] S. TAN et J. VANDEWALLE, Canonical forms for singular systems, *Proceedings of 25th C.D.C.*, Athens, 1986, 2144-2149.

[23] G. C. VERGHESE, Infinite-Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems, *Ph. D. Thesis, Information systems laboratory, Stanford University*, Stanford, 1978.

[24] G. C. VERGHESE, B. C. LÉVY et T. KAILATH, A generalized state-space for singular systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-26, 1981, pp. 811-831.

[25] X. M. WANG, P. BERNHARD et J. GRIMM, Commande optimale linéaire quadratique des systèmes implicites, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 303, série I, 1986, pp. 127-130.

[26] T. YADAMA et D. G. LUENBERGER, Algorithms to verify generic causality and controllability of descriptor systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-30, 1985, pp. 874-880.

[27] E. L. YIP et R. F. SINCOVEC, Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-26, 1981, pp. 702-707.

[28] Z. ZHOU, M. A. SHAYMAN et T. J. TARN, Singular systems : a new approach in the time domain, *Proceedings of 25th C.D.C.*, Athens, 1986, 2129-2135.

[29] R. NIKOUKHAH, A. S. WILLSKY et B. C. LÉVY, Kalman Filtering and Riccati equations for descriptor systems, Rapport de recherche INRIA 1186, à paraître dans les actes de la Conference on Decision and Control, Hawaï, 1990.