L'histoire des quatre automobilistes du pays imaginaire...

ou comment se comporter en face de l'incertain ?

par Guy COHEN* et Pierre BERNHARD**
***Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre d'Automatique et Informatique et INRIA**
****Université de Paris IX-Dauphine et INRIA**

L'histoire des quatre automobilistes au Pays Imaginaire nous montre l'influence que peut avoir la modélisation des incertitudes et la stratégie adoptée face à l'incertain. Comme le concluent les auteurs, il n'existe pas de remède miracle à l'incertitude mais il vaut mieux tout de même l'exprimer que de l'ignorer. Cet exemple simple donnera au lecteur, pas nécessairement spécialiste de ces questions, des éléments de réflexion sur ce que peuvent faire les mathématiques pour nous aider.

L'influence que peut avoir la modélisation des incertitudes et la stratégie adoptée face à l'incertain, notamment dans le cas dynamique, peut se montrer concrètement et simplement. Le cas dynamique se caractérise par le fait que les observations que l'on peut effectuer sur le système dépendent des actions antérieures et de l'influence de l'environnement. L'utilisation effective de ces observations peut donc s'avérer utile pour déterminer les décisions à prendre ultérieurement. C'est le concept de boucle fermée opposé à celui de boucle ouverte qui n'utilisera pas ces observations. D'autre part, si la **qualité** de ces observations dépend de décisions antérieures, il faut en tenir compte pour la détermination de la stratégie : c'est la notion qualifiée d'" effet dual " en commande stochastique. Nous ne parlerons pas de ce dernier aspect dans la suite car nous traiterons du cas de l'observation parfaite.

A l'heure actuelle, la seule méthode disponible pour calculer des stratégies en boucle fermée est la **programmation dynamique.** Son utilisation est très large puisqu'elle s'adresse autant aux systèmes dynamiques à état continu (domaine privilégié de la commande optimale) ou discret qu'à certains problèmes combinatoires, comme le montre notre exemple. Elle peut aussi bien prendre en compte les situations déterministes (1) que non déterministes. Dans ce dernier cas, il est sous-entendu qu'il existe un modèle des incertitudes et que l'on a choisi une attitude en face de cet incertain. En commande stochastique (2), on probabilise ces incertitudes et l'on minimise, par le choix de la stratégie, l'espérance mathématique du critère. Celle-ci est bien définie une fois la stratégie choisie, puisque toutes les variables deviennent alors des fonctions des " bruits " probabilisés. Dans l'optique du min-max, ou " commande dans le cas le plus défavorable " (3), on ne probabilise pas les incertitudes mais on définit les valeurs possibles. On minimise l'effet de la plus mauvaise perturbation.

Il est couramment admis que l'éventualité de perturbations oblige à utiliser la boucle fermée, supérieure à la boucle ouverte (ce que nous illustrerons au passage). Par contre, chacune des méthodes évoquées précédemment peut conduire à des stratégies en boucle fermée (et donc à des comportements différents). L'absence de modélisation des incertitudes (programmation dynamique déterministe) ou leur modélisation dans tel ou tel cadre **ne sont pas équivalentes** comme l'illustre notre exemple qui essaie de démonter les mécanismes de ces différences.

---

(1) voir P. Bernhard : " Commande optimale, Décentralisation et Jeux Dynamiques ", Dunod, 1975.

(2) voir W.H. Fleming, R.W. Rishel : " Deterministic and Stochastic Optimal Control ", Springer - Verlag, 1975.

(3) voir D.P. Bertsekas : " Control Of Uncertain Systems with a Set-Membership Description of the uncertainty ", Thesis Dissertation, Rept. ESL-R-447, Mit, Cambridge, 1971.

L'histoire des quatre automobilistes du pays imaginaire

La carte Lichemin (figure 1) du Pays Imaginaire représente les villes d'Alcatraz, Bab-el-Oued, Capharnaüm..., Historic City, et la distance des routes (à sens unique) reliant ces villes. On remarque que, selon le proverbe, tous les chemins mènent à Historic City. Ce pourrait ne pas être le cas ; si Historic City est bien l'objectif, il faut considérer que tout chemin finissant en dehors de cette ville a un coût infini. La simplification considérée ici n'aura pas d'importance par la suite. Le fait de ne pouvoir aller qu'à Historic City lorsque l'on est à Épinal, Féricy ou Galapagos n'en a pas plus. On aurait pu en effet considérer des détours possibles, par exemple, à partir d'Épinal par Féricy (figure 2). Alors, l'application de la programmation dynamique qui sera faite ultérieurement ne serait plus aussi immédiate car Historic City pourrait être atteint en partant d'Alcatraz en 3 ou 4 étapes, selon les cas. Il existe une solution à cette difficulté apparente mais notre objet n'est pas d'en discuter ici. Aussi considérons-nous le cas plus simple de la figure 1. Quatre automobilistes se proposent de faire le voyage d'Alcatraz à Historic City en minimisant bien sûr la distance parcourue (au Pays Imaginaire, on manque de gas-oil mais on n'est pas à court d'idées, comme la suite va le prouver). Le premier automobiliste, après avoir étudié la carte, traduira le parcours optimal en termes de " prendre à droite, puis à gauche, etc. ", notes de route que son épouse, lui servant pour la circonstance de copilote, lui ira au fur et à mesure du déroulement du parcours. C'est une politique en boucle ouverte.

Le second automobiliste, ayant résolu son problème par la programmation dynamique, **associera à chaque ville** (état du système) l'attitude à adopter dans celle-ci (" à Bab-el-Oued, prendre à droite ; à Capharnaüm, prendre à gauche etc. ") C'est une politique en boucle fermée.

Le troisième automobiliste, ayant lu les guides touristiques des régions traversées, apprend que les panneaux de signalisation sont assez mal disposés dans les villes

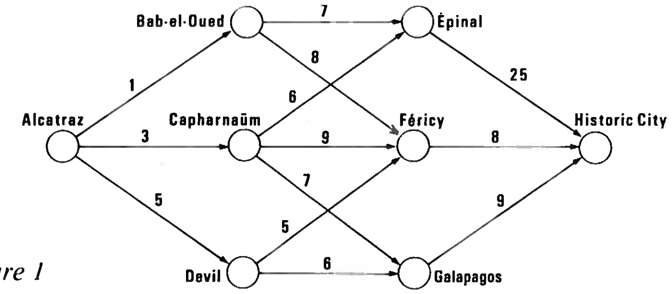

Figure 1

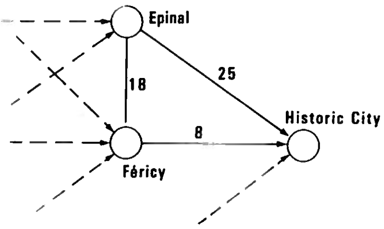

Figure 2

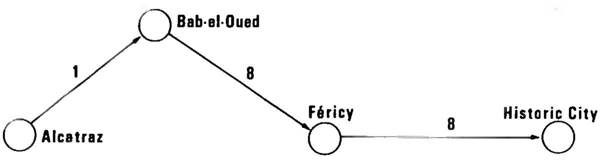

Figure 3

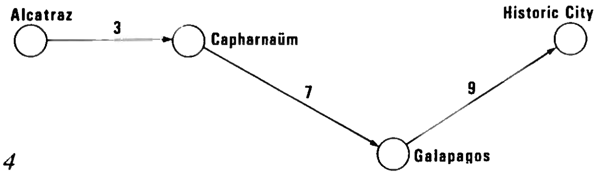

Figure 4

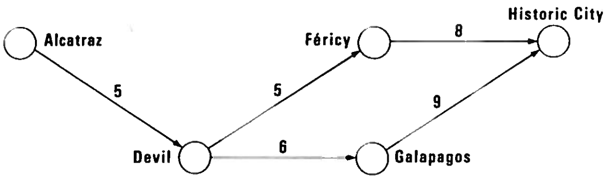

Figure 5

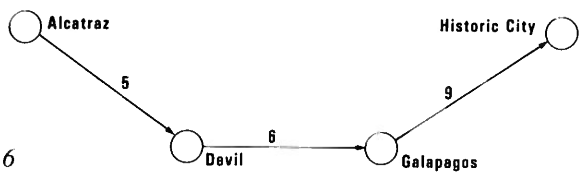

Figure 6

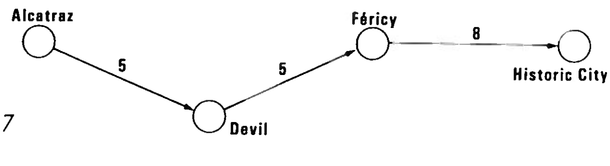

Figure 7

de Bab-el-Oued et de Devil alors qu'ailleurs la situation est bonne. Devant le risque non négligeable d'une erreur d'aiguillage à Bab-el-Oued et Devil, il décide d'adopter la stratégie qui rend le plus **court possible** le chemin qui serait **le plus long**, c'est-à-dire, de rendre le plus mauvais chemin le moins pénalisant possible.

Enfin, le quatrième automobiliste a pu savoir, grâce à un ami bien placé à l'Insee, que les statistiques montrent qu'à Bab-el-Oued, on a **2 chances sur 10** de se tromper de route (4), et qu'à Devil, le risque s'élève à **4 chances** (si l'on peut dire) **sur 10.** Il minimise alors l'espérance mathématique de la distance parcourue, compte tenu de ces informations statistiques.

Les choix possibles

On suppose connu le raisonnement de la programmation dynamique dans chaque cas (5). Le résultat de ce raisonnement est ici assez simple à figurer puisqu'il suffit de connaître la fonction Revenu (ou fonction de Bellman) que nous baptiserons coût, et la décision à prendre à la deuxième puis à la première étape.

Le coût d'Épinal est 25, celui de Féricy 8 ; pour Galapagos, il s'élève à 9. En effet, dans ces villes, il n'existe qu'une décision possible et aucune incertitude (les valeurs de la fonction Revenu sont donc les mêmes dans toutes les approches). Par induction, ce commentaire reste valable pour Capharnaüm (le coût dans cette ville est 16) et la décision optimale est toujours d'aller à droite.

La stratégie en boucle fermée dans le cas déterministe donne les résultats suivants :
— à Bab-el-Oued, aller à droite (pour un coût de 16),
— à Devil, aller à gauche (pour un coût de 13),
— à Alcatraz, aller à gauche (pour un coût de 17).

La stratégie en boucle ouverte se traduit, en l'absence de toute erreur, par une trajectoire (voir figure 3) qui peut se résumer par la séquence de décisions :
— aller à gauche,
— puis à droite,
— puis rejoindre Historic City (ce dernier pas est bien sûr inutile à préciser dans notre cas).

La stratégie " min-max " est celle qu'à choisie le troisième automobiliste. A Bab-el-Oued, ce qui peut arriver de pire est de cheminer vers Epinal avec un coût de 32. En toute rigueur, la décision à prendre (n'ayant pas d'influence sur le coût le plus défavorable) est complètement indifférente. Nous ne sombrerons pas dans un tel désespoir et considérerons, malgré tout, que la bonne stratégie consiste à chercher à aller à Féricy, c'est-à-dire à droite. Ce commentaire illustre cependant l'une des faiblesses de la méthode min-max. A Devil, le coût est de 15. La remarque précédente s'applique également ici mais nous chercherons à aller à gauche. A Alcatraz, le coût est de 19 en allant tout droit. La trajectoire suivie dans ce cas est donnée à la figure 4. Il est bien sûr accidentel que l'on soit **sûr** de suivre cette trajectoire (absence d'incertitude à Capharnaüm et Galapagos). Cependant le choix de passer par Capharnaüm, plus " sûr " que Bab-el-Oued et Devil, n'est pas entièrement étranger au caractère de certitude lié à l'approche min-max. La discussion qui suit, nous le montre.

Pour traiter la situation stochastique, rappelons que notre quatrième automobiliste a huit chances sur dix de voir sa décision se matérialiser à Bab-el-Oued et seulement six chances sur dix à Devil. Sachant cela, on trouve :
— à Bab-el-Oued, aller à droite (le coût est de 19,2),
— à Devil, aller à gauche (le coût est de 13,8),
— à Alcatraz, aller à gauche (le coût est de 18,8).

Deux trajectoires sont alors possibles (voir figure 5), ayant pour coûts respectivement 18 et 20 avec des probabilités 0,6 et 0,4 (la moyenne fait bien 18,8).

Quelle décision prendre ?

Il se trouve que l'épouse du premier automobiliste qui devait lire les notes de parcours à son mari a commis une erreur dès le départ à la suite de circonstances imprévisibles. Au lieu de dire " à gauche " (puis " à droite ") (voir figure 3), elle a dit " à droite " (puis " à droite ") (voir figure 6). Cela leur fait parcourir une distance de 20. La même erreur au départ dans le cas d'une stratégie en boucle fermée (celle du deuxième automobiliste) aurait conduit au parcours matérialisé par la figure 7, d'un coût de 18, donc inférieur. Bien sûr, cela n'est pas dû au hasard des chiffres mais bel et bien au fait que, par la programmation dynamique, on a résolu, en particulier, le problème d'aller de façon optimale de Devil à Historic City et ce renseignement est codé dans la stratégie en boucle fermée (mais non en boucle ouverte). On notera de plus que si tous les chemins ne menaient pas au but, le premier automobiliste risquerait de se perdre alors que le second parviendrait à bon port.

D'autre part, les décisions prises à Alcatraz par le second, le troisième et le quatrième automobiliste sont toutes différentes. La façon de modéliser l'incertitude (ou l'absence de modélisation) a donc une **influence directe** sur ce que l'on **cherchera ensuite** à faire.

Le risque, une fois à Bab-el-Oued, de se trouver ensuite involontairement à Épinal (ce qui obligera alors à faire le très long parcours Epinal-Historic City) écarte, pour les deux derniers automobilistes, la décision d'aller à Alcatraz à Bab-el-Oued, alors que la certitude ressentie par nos deux premiers conducteurs de pouvoir choisir à Bab-el-Oued permet de l'envisager.

Pourtant, les décisions à Alcatraz, pour les deux dernières méthodes traitées, sont différentes. Le quatrième automobiliste, ayant écarté Bab-el-Oued, a le choix entre Capharnaüm et Devil : il préfère Devil. La figure 5 montre pourtant que l'on risque alors de faire un parcours de 18 ou de 20 avec des probabilités assez voisines (0,6 contre 0,4). On a alors 4 chances sur 10 de faire pire que 19, distance que l'on serait sûr de faire en choisissant d'aller vers Capharnaüm. Il peut paraître assez illogique d'accepter un tel risque. Dans une certaine mesure, le min-max écarte ce risque.

Pour tenter de pallier cet inconvénient de l'approche stochastique, on pourrait imaginer de rajouter au critère de l'espérance mathématique (qui ne se justifierait que si l'on doit faire un grand nombre de fois le parcours) un terme mesurant l'incertitude. Cela part de l'intuition suivante. Pour une stratégie donnée et une occurrence de perturbation (risque d'erreur), on peut calculer un coût qui est une varia-

(4) quel que soit ce que l'on cherche à faire.

(5) voir les travaux précédemment mentionnés de P. Bernhard, W.P. Fleming, R.W. Rishel et D.P. Bertsekas (notes 1, 2 et 3) ;

ble aléatoire dont la distribution de probabilité se calcule à partir du risque d'erreur. Supposons un instant que le risque d'erreur et le coût résultant prennent des valeurs continues et que pour deux décisions différentes, aller à Capharnaüm ou à Devil, la densité de probabilité du coût résultant soit donnée par la figure 8. On peut préférer aller à Capharnaüm plutôt qu'à Devil car même si, en moyenne, le coût résultant est meilleur en allant à Devil, les risques d'avoir **des coûts élevés sont moindres** en allant à Capharnaüm. On pourrait donc chercher à minimiser une somme pondérée du coût moyen d'une décision (moyenne) et de la " variabilité " du coût autour de cette moyenne (écart-type).

Regardons les conséquences d'un tel choix avec le cas discret suivant. La figure 9 représente les valeurs du coût (à minimiser) pour les décisions aller à Capharnaüm ou à Devil et pour les " états de la nature " que l'on supposera de probabilités égales et qui peuvent avoir des conséquences ou non suivant les décisions.

	aller à Devil	aller à Capharnaüm
Etat 1	0	21
Etat 2	20	21

Figure 9

Le coût moyen résultant de la décision d'aller à Devil est 10. Pour Capharnaüm, il est de 21 (6). L'écart moyen que peut subir ce coût, pour chaque cas (écart-type), est égal à 10 pour la décision d'aller à Devil et à 0 pour celle d'aller à Capharnaüm. Alors, si l'on choisit de minimiser la somme pondérée du coût moyen de la décision et de son écart moyen, aller à Capharnaüm devient bien préférable à aller à Devil dès que le cœfficient de pondération de l'écart-type est supérieur à 1,1 (7). Ce résultat est pourtant **absurde** car aller à Devil est toujours une solution préférable, quel que soit l'état de la nature (un simple coup d'œil à la

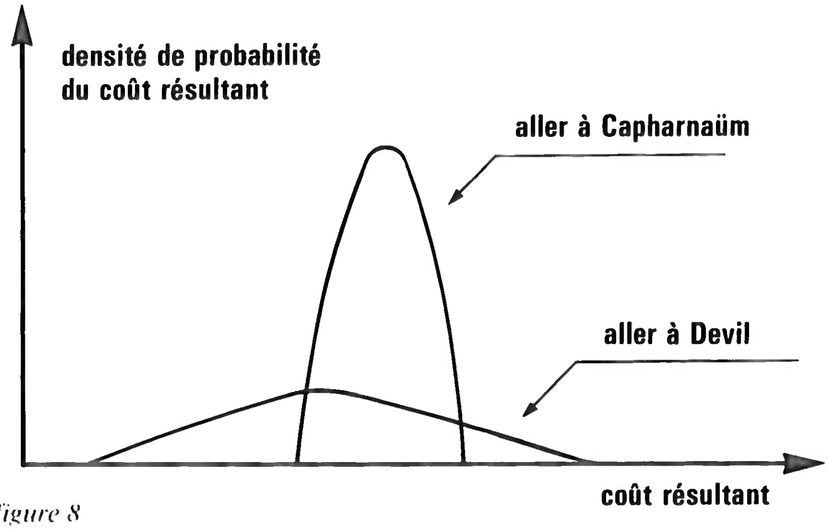

figure 8

Stratégie de l'automobiliste	2	3	4
Coût le plus élevé	33	19	20
Coût moyen	20,2	19	18,8

Figure 10

figure 9 nous le montre). Toute **stratégie raisonnable** devrait donc **préférer** Devil (ce qui serait bien le cas, dans cette circonstance, avec la méthode du min-max, celle du troisième automobiliste) (8).

Comparaison de stratégies

On peut se demander ce qui permet de choisir entre les stratégies des troisième et quatrième automobilistes. Remarquons tout d'abord que si le conducteur ayant utilisé l'approche stochastique n'avait pas eu d'ami à l'Insee susceptible de lui fournir les statistiques sur les villes de Bab-el-Oued et de Devil, il n'aurait pas pu utiliser sa méthode à moins d'inventer des " probabilités subjectives ". Cette approche suppose donc une certaine richesse d'information a priori qui n'est pas toujours disponible. D'autre part, le coût d'Alcatraz pour le troisième automobiliste est de 19 alors qu'il est de 18,8 pour le quatrième. Il serait absurde, au vu de ces chiffres, de considérer que la stratégie du quatrième conducteur est la meilleure. Cette remarque a été faite par P. Bernhard et G. Bellec (9) à qui nous empruntons la discussion qui suit. La méthode du quatrième automobiliste revient à comparer deux stratégies pour **deux comportements différents** de nature (soit le **comportement " moyen "** défini par les probabilités précédentes, soit **le comportement " le plus défavorable ").** Dans le premier cas, à stratégie donnée, on calcule le coût moyen de la décision et dans le deuxième cas, le coût le plus élevé. Un tableau évaluant les stratégies des

(6) l'espérance du coût pour une décision est égale à la moitié de la somme des coûts de cette décision pour chacun des états de la nature (soit la moitié de la somme des nombres inscrits dans la colonne correspondant à la décision).

(7) le cœfficient de pondération de la moyenne est égal à 1, dans cet exemple.

(8) ce fait est signalé dans Abraham et Thomas où l'on trouvera une intéressante discussion qui prolonge celle-ci. Une annexe qui sera fournie aux lecteurs qui en feront la demande, donne également des éléments sur ce point (Abraham et Thomas, chapitre 12, dans " Microéconomie, décisions optimales dans l'entreprise et la nation ", Dunod, 1970).

(9) P. Bernhard, G. Bellec : " On the evalution of Worst-case design with an application to the quadratic systhesis technique ", in Pro. Ifac Symposium on Sensivity, Adaptivity and Opt'mality, Ischia (Italy), 1973.

second, troisième et quatrième automobilistes dans les deux hypothèses est donné en figure 10. Si l'on choisit le comportement de la nature le plus défavorable, la stratégie du troisième automobiliste apparaît comme la meilleure alors que, dans l'autre cas, celle du quatrième automobiliste est la plus favorable. Dans l'hypothèse où tout risque d'aléa serait écarté, le second automobiliste aurait fait le bon choix.

La différence de coût, d'une valeur de 1, constatée entre les troisième et quatrième automobilistes pour le comportement le plus défavorable de la nature (deux dernières colonnes de la première ligne dans la figure 10) mesure le **risque** associé à la stratégie stochastique (on risque 1 de plus que ce que l'on peut garantir au mieux avec la stratégie prudente). Par contre, la différence de 0,2 entre les mêmes colonnes pour un comportement moyen de la nature mesure, en quelque sorte, le **prix de la sécurité** que l'on paie en utilisant la stratégie prudente alors que la nature ne nous veut pas de mal. On peut être tenté dans ce cas de préférer cette stratégie prudente qui présente un prix supplémentaire faible en comparaison du risque, lorsqu'on ne l'utilise pas. Bien sûr, ce n'est pas toujours le cas, comme le montre l'exemple statique (figure 11) obtenu en modifiant légèrement celui de la figure 9. Dans ce cas, la stratégie stochastique est d'aller à Devil (coût moyen 11 et coût le plus élevé 22) ; la stratégie prudente est d'aller à Capharnaüm (coût moyen et le plus élevé 21). Le risque associé à Devil est de 1 mais le prix de la sécurité pour Capharnaüm est de 10. Ce cas est typique de la situation où il ne faut pas pousser la prudence à l'extrême en choisissant d'aller à Capharnaüm (voir figure 11). L'analyse que nous venons d'effectuer permet, dans une certaine mesure, de se faire une opinion dans chaque cas.

Pour terminer, évoquons brièvement, parmi de nombreuses autres, une option qui consisterait à dire : dans le cas où l'on doit jouer une seule fois la stratégie, on voudrait que la stratégie choisie ait une probabilité **maximale d'être optimale.** Dans l'exemple de la figure 9, la stratégie aller à Devil est optimale car elle a une probabilité 1 d'être optimale (elle est la meilleure quel que soit l'état de la nature). Dans le cas de la figure 11, les deux stratégies sont indifférentes : en effet, aller à Devil est une solution meilleure pour l'état 1 de la nature et aller à Capharnaüm, une solution meilleure pour l'état 2 mais ces deux événements ont la même probabilité. On a ici l'impression que cette optique conduit à une décision intermédiaire entre le minmax et le stochastique. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas.
Reprenons le problème des automobilistes. Sans entrer dans le détail du calcul qui permet d'obtenir la stratégie (en boucle fermée) optimale (celle qui maximise la probabilité d'être optimale), on peut affirmer qu'à Alcatraz la décision sera d'aller à Bab-el-Oued (on s'y retrouvera donc effectivement avec les risques que l'on sait). En effet, étant donné l'information dont on dispose à Alcatraz (en particulier les probabilités 0,2 et 0,4 de se tromper respectivement à Bab-el-Oued et Devil) et sachant que le chemin optimum-optimorum est Alcatraz-Bab-el-Oued-Féricy-Historic City (figure 3), on peut affirmer, partant d'Alcatraz, que l'on a une probabilité de 0,8 d'être optimal en cherchant à faire ce trajet, contre 0,2 lorsqu'on cherche à faire Alcatraz-Bab-el-Oued-Epinal-Historic City et une probabilité **nulle** d'être optimal en se dirigeant d'abord vers Capharnaüm ou Devil.

Cette option, a priori séduisante, semble donc comporter elle aussi une faiblesse car il peut paraître

Photo Castaldo

Les mathématiques peuvent aider nos quatre automobilistes en leur donnant des éléments de comparaison

	aller à Devil	aller à Capharnaüm
Etat 1	0	21
Etat 2	22	21

Figure 11

raisonnable de chercher à faire, par exemple, les trajets des figures 4 et 5 avec des coûts s'échelonnant de 18 à 20, plutôt que de chercher à faire 17 avec le risque de faire 33 (figure 12).

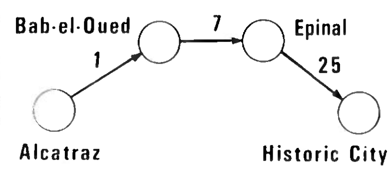

Figure 12

Nous n'avons pas discuté l'approche " regret min-max " (10) qui est d'ailleurs dans notre exemple particulier équivalente au min-max (le " regret " tel qu'il est défini étant le même dans toutes les éventualités).

Notre conclusion sera brève (11). Il n'existe pas de **remède miracle à l'incertitude.** Il vaut d'abord mieux exprimer cette incertitude (c'est-à-dire la modéliser) que de l'ignorer. Il vaut mieux **en savoir le plus possible** sur cette incertitude (en ayant par exemple des petits copains à l'Insee. Cela **ne veut pas dire** que l'approche stochastique soit la meilleure. Cela dépend du cas d'espèce (comme l'a montré la discussion précédente) et aussi de l'**enjeu de la décision** qui peut nous pousser à une plus ou moins grande prudence (risquons-nous la catastrophe (12)... ou notre première chemise ?). Ce que peuvent faire les mathématiques pour nous aider, c'est de nous donner des éléments de comparaison, en suivant par exemple l'optique, déjà mentionnée de P. Bernhard et de G. Bellec.

La reflexion théorique, basée sur l'axiomatique (... et quelques petits exemples bien choisis) peut aussi aider à écarter les approches manifestement déraisonnables bien que n'y paraissant pas à première vue. Enfin, dans le contexte dynamique, la programmation dynamique permet de répercuter dans le présent les effets futurs de nos décisions, ce que l'on ne sait pas toujours faire intuitivement. ■

(10) voir C. Abraham, A. Thomas (note 8))

(11) surtout si l'on a lu Abraham et Thomas.

(12) on objectera que, si il y a risque de catastrophe, cela peut se formuler comme une contrainte à satisfaire presque sûrement même dans l'approche stochastique.