AUTOMATIQUE THÉORIQUE. — *Filtrage des systèmes implicites linéaires discrets.* Note de **Pierre Bernhard** et **Xiao Min Wang,** présentée par Pierre Faurre.

Les systèmes linéaires implicites ont déjà fait l'objet d'une théorie de la réalisation et de la commande optimale avec critère quadratique. On présente ici la théorie du filtrage sous des hypothèses semblables à celles utilisées en commande, et sous l'hypothèse complémentaire d'existence de solutions causales, hors laquelle le problème du filtrage n'a pas de sens.

AUTOMATION (THEORETICAL). — Filtering of discrete-time linear implicit systems.

Theories have previously been developped for the realization and the optimal control of discrete-time linear implicit systems. We investigate here the filtering problem, with assumptions similar to those used for the control problem, and with the extra assumption that causal solutions exist, short of which the filtering problem does not make sense.

Le système implicite linéaire discret est décrit par

$$E\,x(k+1)=F\,x(k)+V\,\nu(k), \tag{1}$$

$$y(k)=H\,x(k)+\omega(k), \tag{2}$$

où $x(k)\in\mathbf{R}^n$, $y(k)\in\mathbf{R}^p$, et les matrices E, F et H ont respectivement les dimensions $r\times n$, $r\times n$ et $p\times n$.

$\nu(k)$ et $\omega(k)$ sont des bruits blancs et gaussiens centrés de covariance conjointe $\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$, où Q et R sont définies positives.

$x(0)$ est un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $\bar{x}_0$ et de covariance Σ_0.

De tels systèmes ont été largement étudiés depuis quelques années ([1] à [7]). Des résultats existent concernant l'existence de solutions (causales ou non), les représentations externes et la théorie de la réalisation, la commande optimale, etc. Les articles précités, en particulier [1] et [2], discutent des applications, qui couvrent la commande P.I.D., les modèles économétriques (de Léontief), la discrétisation d'équations aux dérivées partielles, etc.

Nous utiliserons en outre l'hypothèse :

Hypothèse (H) :

(H1) $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ *est injective;*

(H2) $(E \quad V)$ *est surjective.*

(H1) est plus faible que l'hypothèse d'observabilité et (H2) que celle de commandabilité.

Proposition 1. — *Sous l'hypothèse* (H), *avec des changements de notations, le système* (1)-(2) *peut se mettre sous la forme suivante*

$$x_1(k+1)=F\,x(k)+V\,\nu(k), \tag{3}$$

$$y_1(k)=H\,x_1(k)+\omega_1(k), \tag{4}$$

$$y_2(k)=x_2(k)+D x_1(k)+\omega_2(k). \tag{5}$$

0249-6291/87/03040351 \$ 2.00 © Académie des Sciences

La covariance de $v(k)$, $\omega_1(k)$, $\omega_2(k)$ *est* $\begin{pmatrix} Q & S_1 & S_2 \\ S_1^T & R_1 & R_{12} \\ S_2^T & R_{21} & R_2 \end{pmatrix}$, *où*

$$S=(S_1 \quad S_2) \qquad et \qquad R=\begin{pmatrix} R_1 & R_{12} \\ R_{21} & R_2 \end{pmatrix}.$$

Preuve. — En faisant des changements de base dans le domaine de l'équation (1) et dans l'espace d'état, le système prend la forme suivante

$$x_1(k+1)=F_1 x_1(k)+F_2 x_2(k)+V_1 v(k), \tag{6}$$

$$0=L_1 x_1(k)+L_2 x_2(k)+V_2 v(k), \tag{7}$$

$$y(k)=H_1 x_1(k)+H_2 x_2(k)+\omega(k). \tag{8}$$

Sous l'hypothèse (H1), H_2 est injective. Ainsi il existe A_1 inversible telle que $A_1 H_2=\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$.

En décomposant $y(k)$ en $y(k)=A_1^{-1}\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix}$ dans (8), nous avons

$$y_1(k)=D_1 x_1(k)+\omega_1(k), \tag{9}$$

$$y_2(k)=D_2 x_1(k)+x_2(k)+\omega_2(k). \tag{10}$$

Sous l'hypothèse (H2), V_2 est surjective. Ainsi il existe A_2 inversible telle que $V_2 A_2=(I \quad 0)$.

En décomposant $v(k)$ en $v(k)=A_2\begin{pmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{pmatrix}$ dans (6) et (7), nous obtenons

$$x_1(k+1)=F_1 x_1(k)+F_2 x_2(k)+V_1 v_1(k)+V_2 v_2(k), \tag{11}$$

$$0=L_1 x_1(k)+L_2 x_2(k)+v_1(k). \tag{12}$$

Ainsi la proposition est établie en remplaçant $v_1(k)$ dans (11) par son expression prise dans (12) et en effectuant les changements de notation nécessaires. ■

Remarquons que le problème de filtrage du système implicite n'a de sens que s'il existe des solutions causales au sens de l'article [1].

PROPOSITION 2. — *Sous l'hypothèse* (H2), *une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des solutions causales à* (1) *quel que soit* $v(.)$ *est que* L_2 *dans* (12) *soit surjective.*

Preuve. — La condition nécessaire et suffisante pour cette existence est (*voir* [1])

$$\operatorname{Im} V \subset E\mathcal{V}^* + F \operatorname{Ker} E, \tag{13}$$

où $\mathcal{V}^*$ est le sous-espace maximal satisfaisant $F\mathcal{V}^* \subset E\mathcal{V}^*$ avec

$$E=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F=\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix} \qquad et \qquad V=\begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ une matrice engendrant $\mathcal{V}^*$; (13) s'écrit

$$\operatorname{Im}\begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ I & 0 \end{pmatrix} \subset \operatorname{Im}\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Im}\begin{pmatrix} F_2 \\ L_2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Donc L_2 surjective est nécessaire.

Réciproquement, si L_2 est surjective, la forme (6)-(7) du système montre qu'il existe des solutions causales quel que soit $v(.)$. ■

Remarque 1. — Cette condition nécessaire apparaît dans l'équation (12) qui permet de calculer $x_2(k)$, $x_1(k)$ étant donné à l'instant $k-1$ par (11).

L'objectif du filtrage est de calculer $\hat{x}(k)=\mathscr{E}[x(k)\,|\,y(0), \ldots, y(k)]$. Nous noterons $\tilde{x}(k)$ l'erreur $x(k)-\hat{x}(k)$ et $\Sigma(k)$ sa covariance.

Supposons $\hat{x}(k)$ et $\Sigma(k)$ déjà déterminés.

• (3) et (4) nous permettent alors de calculer $\hat{x}_1(k+1)$ par un filtre de Kalman classique.

Par contre, l'équation (5) ne peut pas être utilisée; en effet, la connaissance de $y_2(k+1)$ ne donne aucune information supplémentaire sur $\hat{x}_1(k+1)$, parce que $x_2(k+1)$ est totalement arbitraire. [Formellement, nous pouvons lui donner une covariance infinie ce qui annule le coefficient du terme en $y_2(k+1)-\bar{y}_2(k+1)$.]

Étant donné $\{y(0), \ldots, y(k)\}$, les moyennes et les covariances de $x_1(k+1)$ et $y_1(k+1)$ sont

$$\bar{x}_1(k+1)=F\,\hat{x}(k), \tag{13}$$

$$\bar{y}_1(k+1)=HF\,\hat{x}(k), \tag{14}$$

$$\bar{\Sigma}(k+1)=\begin{pmatrix} F\Sigma(k)F^T+VQV^T & F\Sigma(k)F^T H^T+VQV^T H^T \\ HF\Sigma(k)F^T+HVQV^T & HF\Sigma(k)F^T H^T+HVQV^T H^T+R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}_{11}(k+1) & \bar{\Sigma}_{12}(k+1) \\ \bar{\Sigma}_{21}(k+1) & \bar{\Sigma}_{22}(k+1) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Étant donné $\{y(0), \ldots, y(k+1)\}$, la moyenne et la covariance de $x_1(k+1)$ sont

$$\hat{x}(k+1)=\bar{x}_1(k+1)+K(k+1)[y_1(k+1)-\bar{y}_1(k+1)], \tag{16}$$

$$\Sigma_1(k+1)=\bar{\Sigma}_{11}(k+1)-\bar{\Sigma}_{12}(k+1)\bar{\Sigma}_{22}^{-1}(k+1)\bar{\Sigma}_{21}(k+1), \tag{17}$$

où

$$K(k+1)=\bar{\Sigma}_{12}(k+1)\bar{\Sigma}_{22}^{-1}(k+1). \tag{18}$$

$\bar{\Sigma}_{22}$ est définie positive, puisque R_1 est définie positive.

• (5) nous donne $\hat{x}_2(k+1)$

$$\hat{x}_2(k+1)=y_2(k+1)-D\hat{x}_1(k+1). \tag{19}$$

• L'erreur $\tilde{x}(k+1)$ et la covariance $\Sigma(k+1)$ sont

$$\tilde{x}(k+1)=\begin{pmatrix} I \\ -D \end{pmatrix}\tilde{x}_1(k+1)+\begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix}\omega_2(k+1)=A\,\tilde{x}(k)+B\,v(k)+C\,\omega(k+1), \tag{20}$$

$$\Sigma(k+1)=A\,\Sigma(k)\,A^T+BQB^T+CRC^T, \tag{21}$$

où

$$A=\bar{A}\,[I-K(k+1)H]\,F, \qquad B=\bar{A}\,[I-K(k+1)H]\,V,$$

$$C=(-\bar{A}K(k+1) \quad \bar{B}), \qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} I \\ -D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{B}=\begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME. — *Sous l'hypothèse* (H), *le système implicite* (1)-(2) *a la forme* (3)-(5). *S'il existe des solutions causales pour ce système, nous avons le filtre suivant, où l'estimation du vecteur d'état est donnée par*

$$\hat{x}_1(k+1)=F\,\hat{x}(k)+K(k+1)[y_1(k+1)-HF\,\hat{x}(k)],$$

$$\hat{x}_2(k+1)=y_2(k+1)-D\hat{x}_1(k+1),$$

avec $\hat{x}(0)=\bar{x}_0$, *et la covariance d'erreur est donnée par*

$$\Sigma(k+1)=\mathrm{A}\,\Sigma(k)\,\mathrm{A}^{\mathrm{T}}+\mathrm{BQB}^{\mathrm{T}}+\mathrm{CRC}^{\mathrm{T}},$$

avec $\Sigma(0)=\Sigma_0$, *où*

$$\mathrm{K}(k+1)=[\mathrm{F}\,\Sigma(k)\,\mathrm{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}^{\mathrm{T}}+\mathrm{VQV}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}^{\mathrm{T}}][\mathrm{HF}\,\Sigma(k)\,\mathrm{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}^{\mathrm{T}}+\mathrm{HVQV}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}^{\mathrm{T}}+\mathrm{R}_1]^{-1},$$

$$\mathrm{A}=\bar{\mathrm{A}}\,[\mathrm{I}-\mathrm{K}(k+1)\,\mathrm{H}]\,\mathrm{F},\qquad \mathrm{B}=\bar{\mathrm{A}}\,[\mathrm{I}-\mathrm{K}(k+1)\,\mathrm{H}]\,\mathrm{V},$$

$$\mathrm{C}=(-\bar{\mathrm{A}}\mathrm{K}(k+1)\quad \bar{\mathrm{B}}),\qquad \bar{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}\mathrm{I}\\ -\mathrm{D}\end{pmatrix}\quad \textit{et}\quad \bar{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}0\\ -\mathrm{I}\end{pmatrix}.$$

Les équations du filtre du système implicite sont récurrentes.

La matrice de covariance $\Sigma(k)$ *ne dépend pas de l'ensemble des mesures* $\{y(0),\ldots,y(k)\}$; *ainsi le gain du filtre* $\mathrm{K}(k)$ *peut être calculé* a priori.

Reçue le 2 février 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. BERNHARD, On singular implicit linear dynamical systems, *S.I.A.M. J. Control*, 20, n° 5, septembre 1982, p. 612-633.

[2] S. L. CAMPBELL, *Singular systems of differential equations*, Pitman, London, 1980.

[3] D. COBB, Controllability and duality in singular systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-29, décembre 1984.

[4] J. GRIMM, Realisation and canonicity for implicit systems, soumis au *S.I.A.M. J. Control*.

[5] D. G. LUENBERGER, Time-invariant descriptor systems, in *Proc. J.A.C.C.*, San Francisco, CA, 1977, p. 725-730.

[6] G. C. VERGHESE, B. C. LÉVY et T. KAILATH, A generalized state-space for singular systems, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, AC-26, 1981, p. 811-831.

[7] X. M. WANG, P. BERNHARD et J. GRIMM, Commande optimale linéaire quadratique des systèmes implicites discrets, *Comptes rendus*, 303, série I, 1986, p. 127-130.

Institut national de Recherche en Informatique et en Automatique,
avenue Émile-Hugues, Sophia-Antipolis, 06560 *Valbonne Cedex.*