

RÉFÉRENCES

- [1] A. R. BRYSON, JR. ET Y.-C. HO, *Applied Optimal Control*, Hemisphere, Washington, D.C., 1975.
- [2] B. D. O. ANDERSON, J. B. MOORE, *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [3] P.-K. WONG, M. ATHANS, *Closed-Loop Structural Stability for Linear-Quadratic Optimal Systems*, I.E.E.E. Trans., vol. AC-22, n° 1, février 1977, 94-99.
- [4] M. G. SAFONOV, M. ATHANS, *Gain and Phase Margin for Multiloop LQG Regulators*, I.E.E.E. Trans., vol. AC-22, n° 2, avril 1977, 173-179; Proc. 1976, I.E.E.E. C.D.C., décembre 1976, Clearwater, Floride.
- [5] P.-K. WONG, G. STEIN, M. ATHANS, *Structural Reliability and Robustness Properties of Optimal Linear-Quadratic Multivariable Regulators*, Proc. 7^e I.F.A.C. Congress, Helsinki, 1978, 1797-1805.
- [6] R. V. PATEL, M. TODA, B. SRIDHAR, *Robustness of Linear Quadratic State Feedback Designs in the Presence of System Uncertainty*, I.E.E.E. Trans., vol. AC-22, n° 6, décembre 1977, 945-949.
- [7] H. BOURLÈS, *Sur la robustesse des régulateurs linéaires multivariables, optimaux pour une fonctionnelle de coût quadratique*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 292, n° 22 (22 juin 1981), série I, 971-974.
- [8] F. R. GANTMACHER, *Théorie des matrices*, Dunod, 1966.
- [9] R. E. KALMAN, J. E. BERTRAM, *Control System Analysis and Design via the « Second Method » of Lyapunov*, A.S.M.E. Trans., J. of Basic Engineering, vol. 82, juin 1960, 371-400.
- [10] P. MOLANDER, J. C. WILLEMS, *Synthesis of State Feedback Control Laws with a Specified Gain and Phase Margin*, I.E.E.E. Trans., vol. AC-25, n° 5, octobre 1980, 928-931.
- [11] N. A. LEHTOMAKI, N. R. SANDELL, M. ATHANS, *Robustness Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Designs*, I.E.E.E. Trans., vol. AC-26, n° 1, février 1981, 75-92.
- [12] R. E. KALMAN, *When is a Linear Control System Optimal ?*, A.S.M.E. Trans., J. of Basic Engineering, vol. 86, mars 1964, 51-60.

UNE CONSTRUCTION RÉTROGRADE DANS LES JEUX DIFFÉRENTIELS QUALITATIFS, ET APPLICATION A LA RÉGULATION (*)

PAR P. BERNHARD ⁽¹⁾ et G. TOMSKI ⁽²⁾

présenté par C. LOBRY

Résumé. — On propose une nouvelle construction rétrograde de la zone de capture d'un jeu différentiel qualitatif, pour laquelle un théorème d'alternative est énoncé. On applique cette théorie à deux problèmes de recallage d'asservissement en présence de points de consigne susceptibles de varier.

Abstract. — A new construction of the capture zone of a differential game is given, for which we state a theorem of alternative. This theory is applied to two servomechanism problems with drifting set points.

1. INTRODUCTION

L'objet de cet article est de montrer comment une construction proposée en termes abstraits par G. Tomski [1] peut être utilisée, en particulier à l'aide d'une extension due à P. Bernhard [2] de méthodes de Pontriaguine [3], pour calculer effectivement des zones de captures. L'intérêt de la nouvelle méthode est de mener à des stratégies de poursuite en boucle ouverte par morceaux et donc faciles à mettre en œuvre.

La section 2 donne la théorie générale, les sections 3 et 4 l'appliquent chacune à un problème de recallage d'asservissement du second ordre, avec des modèles différents pour la perturbation.

(*) Reçu en octobre 1979.

⁽¹⁾ CEREMADE, Université de Paris 9, Dauphine, et C.A.I., Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Actuellement INRIA.

⁽²⁾ Université de Yakoutsk URSS. Ce travail a été effectué au CEREMADE.

2. THÉORIE GÉNÉRALE

2.1. Le système

Considérons le système dynamique décrit par l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad x \in R^n, \quad u \in P \subset R^p, \quad v \in Q \subset R^q,$$

où P et Q sont des compacts, f est une fonction vectorielle continue sur $R^n \times P \times Q$ et pour chaque compact $K \subset R^n$ elle vérifie une condition de Lipschitz en x sur $K \times P \times Q$, de plus il existe $C > 0$ tel que

$$\|f(x, u, v)\| \leq C(1 + \|x\|)$$

sur $R^n \times P \times Q$.

On se donne un ensemble terminal $M \subset R^n$.

Le premier joueur disposant du contrôle u aspire à ce que le point x atteigne l'ensemble M , tandis que le second joueur disposant du contrôle v aspire à l'en empêcher. Cette situation de conflit est appelée jeu différentiel qualitatif.

Soit D_1 et D_2 les ensembles de toutes les commandes mesurables $u(t)$ et $v(t)$ du premier et du second joueur respectivement, telles que $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$, $t \geq 0$.

Une stratégie récursive d'ordre n du premier joueur est une matrice

$$a_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \\ \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_n = +\infty$, $\varepsilon_k : R^n \rightarrow R_+^1 = [0, \infty)$, $\phi_k : R^n \rightarrow D_1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Une contre-stratégie (récursive) du second joueur est une suite

$$b = \{ \psi_1(\varepsilon_1), \psi_2(\varepsilon_2), \dots, \psi_n(\varepsilon_n), \dots \},$$

telle que

$$\psi_k(\varepsilon_k) : R^n \times D_1 \rightarrow D_2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

pour tout $\varepsilon_k : R^n \rightarrow R_+^1$, $k = 1, 2, \dots$

Désignons par D_1^r l'ensemble des stratégies récursives du premier joueur et par D_2^c l'ensemble des contre-stratégies du second joueur. Une paire des stratégies $a_n \in D_1^r$, $b \in D_2^c$ définit une trajectoire

$$x(t) = x(t, x, a_n, b) \quad (2)$$

du système (1) pour chaque état initial x_0 de la manière suivante. Les joueurs

choisissent les commandes (en boucle ouverte sur $(0, \varepsilon_1)$)

$$u_1 = \phi_1(x_0), \quad v_1 = \psi_1(\varepsilon_1)(x_0, u_1)$$

sur $[0, t_1]$, $t_1 = \varepsilon_1(x_0)$, alors $x(t)$ sur $[0, t_1]$ est la solution $x(t, x_0, u_1, v_1)$ de l'équation différentielle (1), avec $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$, vérifiant la condition initiale $x(0) = x_0$. Soit $\varepsilon_2(x_1) > 0$, $x_1 = x_1(t_1)$, alors $x(t) = x(t, x_1, u_2, v_2)$ sur $[t_1, t_2]$, $t_2 = t_1 + \varepsilon_2(x_1)$, où

$$u_2 = \phi_2(x_1), \quad v_2 = \psi_2(\varepsilon_2)(x_1, u_2).$$

En faisant de la même façon au maximum n pas, on obtient la trajectoire (2) sur R_+^1 . On définit de même D_2^c , alors on peut montrer que, à une identification près, $D_2^c \subset D_2^c$ [1].

2.2. Construction rétrograde

Désignons par $A_*(M)$ l'ensemble des états x tels qu'il existe une commande en boucle ouverte u assurant leur capture contre toute commande $v : x \in A_*(M)$ est équivalent à

$$\exists u \in D_1, \quad \forall v \in D_2, \quad \exists \tau > 0 : \quad x(\tau, x, u, v) \in M.$$

Puis, pour tout sous-ensemble N de R^n , désignons par $A(N)$ l'ensemble des états x tel qu'il existe une commande en boucle ouverte assurant leur capture à un instant τ dépendant seulement de x , mais pas de v :

$$\exists u \in D_1, \quad \exists \tau > 0, \quad \forall v \in D_2 : \quad u(\tau, x, u, v) \in N.$$

Posons

$$B_1 = A_*(M), \quad B_{k+1} = A(B_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

On a démontré dans [1] le résultat suivant :

THÉORÈME 1 : Si $x \in B$, alors il existe une stratégie récursive \bar{a} telle que pour toute contre-stratégie $b \in D_2^c$, on ait la capture à un instant τ fini. Si $x \notin B$, alors il existe une contre-stratégie \bar{b} qui interdit la capture contre toute stratégie $a \in D_1^r$.

On a montré des théorèmes similaires dans [1], y compris avec des contraintes d'état, et des systèmes dynamiques plus généraux.

Remarque : D'après les définitions mêmes, si $x_0 \in B_k$, il peut être capturé contre toute défense à l'aide d'une stratégie récursive, i.e. en boucle ouverte

par morceaux, comportant au plus k étapes. La longueur de chaque étape est connue au début de cette étape, sauf pour la dernière. Donc il n'est pas nécessaire de mesurer l'état en permanence, mais seulement à l'instant prévu pour la fin de l'étape en cours.

En pratique, on utilisera une construction avec $B_1 = A(M) \subset A_*(M)$. La condition suffisante sera a fortiori satisfaite. Il ressort de [4] qu'on aura en fait l'égalité de A et A_* .

2.3. Cas des systèmes linéaires

On se restreint ici à un système de la forme

$$\dot{x} = Fx - u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (3)$$

L'extension au cas non autonome ne présente aucune difficulté supplémentaire [5], mais n'est pas utile ici.

Soit τ la durée de l'étape considérée. L'équation (3) s'écrit aussi

$$x(\tau) = \Phi(\tau)x - p_\tau + q_\tau, \quad p_\tau \in P_\tau, \quad q_\tau \in Q_\tau, \quad (4)$$

où $\Phi(\tau) = e^{\tau F}$,

$$p_\tau = \int_0^\tau \Phi(\tau - s) u(s) ds, \quad q_\tau = \int_0^\tau \Phi(\tau - s) v(s) ds. \quad (5)$$

La définition (5) ci-dessus, associée à (3), définit les ensembles P_τ et Q_τ de commandes intégrées possibles.

On a montré dans [2] que la condition

$$\exists p_\tau \in P_\tau, \quad \forall q_\tau \in Q_\tau, \quad x(\tau) \in M$$

est équivalente à

$$\Phi(\tau)x \in (M * Q_\tau) + P_\tau, \quad (6)$$

où $*$ est la *différence géométrique*, introduite par Pontriaguine (3), définie par

$$A * B = C \Rightarrow A \supset B + C,$$

et

$$A \supset B + C \Rightarrow C \subset A * B.$$

En particulier, on vérifie facilement que la différence géométrique de deux boules est une boule dont le rayon est la différence de ceux des deux pre-

mières, si cette différence est positive, et est vide dans le cas contraire. En reportant ces résultats dans la théorie précédente, on voit qu'on a

$$B_{k+1} = \bigcup_{\tau > 0} [\Phi(-\tau)(B_k * Q_\tau) + P_\tau]$$

formule qu'on utilisera également pour B_1 avec $B_0 = M$.

3. RECALLAGE D'UN ASSERVISSEMENT. PREMIER MODÈLE

Cet exemple très simple a l'avantage de conduire, comme on le verra, à un jeu qui a été étudié en détail dans le cadre de stratégies en feedback. Ceci nous permettra de constater que dans la plupart des cas, on ne perd rien à s'être restreint aux stratégies récursives.

3.2 Le modèle

On considère le système de second ordre de dimension n le plus simple :

$$\ddot{y} = u, \quad y(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \|u(t)\| \leq \alpha.$$

On souhaite le recaller sur un point de consigne y_c susceptible de dériver d'une façon imprédictible, mais avec une vitesse de dérive a priori bornée

$$\|\dot{y}_c\| \leq \beta.$$

On estime que l'asservissement est recallé quand l'erreur d'asservissement tombe en-dessous d'une précision donnée :

$$\|y - y_c\| \leq \gamma.$$

Le système se met sous la forme suivante, avec $y - y_c = x_1$, $y_c = x_2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - v, \\ \dot{x}_2 &= u, \\ \|u\| &\leq \alpha, \quad \|v\| \leq \beta, \\ M &= \{x \mid \|x_1\| \leq \gamma\}. \end{aligned}$$

C'est le jeu proposé par Isaacs [6] sous le nom de Fusée Isotrope, et étudié plus avant dans [2].

3.2 La résolution

Le calcul de P_τ et Q_τ par la formule (5), puis des ensembles B_k est entièrement similaire à celui fait dans [2]. Nous utiliserons cette technique à la Section 4. Ici nous nous contenterons d'un argument direct par conditions suffisantes, dont on vérifierait aisément qu'elles sont aussi nécessaires.

LEMME : L'ensemble B_1 contient les états x tel qu'il existe $\tau \leq \gamma/\beta$ satisfaisant

$$\|x_1 + \tau x_2\| \leq \alpha \frac{\tau^2}{2} - \beta\tau + \gamma. \quad (7)$$

Preuve : Soit x , et $\tau \leq \gamma/\beta$, satisfaisant (7). Posons

$$z(\tau) = x_1 + \tau x_2$$

et prenons

$$\bar{u} = \begin{cases} \frac{2}{\tau^2} \frac{\|z(\tau)\| - \gamma + \beta\tau}{\|z(\tau)\|} z(\tau) & \text{si } \|z(\tau)\| \geq \gamma - \beta\tau \\ \bar{u} = 0 & \text{si } \|z(\tau)\| \leq \gamma - \beta\tau. \end{cases} \quad (8)$$

On a bien dans tous les cas $\|\bar{u}\| \leq \alpha$, et le choix (8) assure en outre

$$\left\| z(\tau) + \bar{u} \frac{\tau^2}{2} \right\| \leq \gamma - \beta\tau. \quad (9)$$

Soit alors $v(\cdot)$ une commande quelconque du fuyitif. On a

$$\|x_1(\tau)\| = \left\| x_1 + \tau x_2 + \bar{u} \frac{\tau^2}{2} - \int_0^\tau v(t) dt \right\|$$

d'où :

$$\|x_1(\tau)\| \leq \left\| z(\tau) + \bar{u} \frac{\tau^2}{2} \right\| + \left\| \int_0^\tau v(t) dt \right\| \leq \gamma,$$

la dernière inégalité par utilisation de (9) et de $\|v(t)\| \leq \beta$.

Remarque 1 : La stratégie de poursuite proposée est non seulement en boucle ouverte, mais même constante.

Remarque 2 : La condition (7) est celle trouvée par Isaacs [6] sur ses trajectoires primaires. Cela provient du fait que sur ces trajectoires u est précisément constant. Cependant, Isaacs ne garantit pas la capture avec la commande en boucle ouverte. Aussi n'a-t-il pas la restriction $\tau \leq \gamma/\beta$, que nous allons maintenant relaxer en considérant plusieurs étapes successives.

Cherchons maintenant un ensemble (en fait, comme ci-dessus, l'ensemble) d'états qui peuvent être ramenés dans l'ensemble B_1 que nous venons de décrire.

Il doit donc exister un instant $t > 0$, et une commande u telle que, pour toute perturbation v , on ait :

$$\|x_1(t) + \tau x_2(t)\| \leq \alpha \frac{\tau^2}{2} - \beta\tau + \gamma, \quad \tau \leq \tau_1 = \frac{\gamma}{\beta},$$

soit en substituant, si $u = \text{Cte}$

$$\left\| x_1 + (t + \tau) x_2 + u \left(\frac{t^2}{2} + \tau t \right) \right\| \leq \alpha \frac{\tau^2}{2} - \beta\tau + \gamma, \quad \tau \leq \tau_1.$$

Par un raisonnement identique au précédent, on établit que ceci est possible si (et seulement si)

$$\left. \begin{aligned} \|x_1 + (t + \tau) x_2\| &\leq \frac{\alpha(t + \tau)^2}{2} - \beta(t + \tau) + \gamma, \\ \beta t &\leq \alpha \frac{\tau^2}{2} - \beta\tau + \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

et

La dernière inégalité, avec $\tau \leq \tau_1$, impose

$$t + \tau \leq \frac{1}{\beta} \left(\alpha \frac{\tau^2}{2} + \gamma \right) = \tau_2.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $\sigma \leq \tau_2$ satisfaisant la première inégalité (10) où on a remplacé $t + \tau$ par σ . Si $\sigma \leq \tau$, $x \in B_1$.

Si $\sigma > \tau_1$, on pose

$$\tau = \tau_1 = \frac{\gamma}{\beta}, \quad t = \sigma - \tau_1,$$

de sorte que les deux inégalités (10) sont satisfaites, et donc $x \in B_2$. Le fait remarquable est bien sûr que (10) à la même forme que (7) à la borne sur $(t + \tau)$ près. Construisons donc la suite τ_k définie par

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{k+1} = \frac{1}{\beta} \left(\alpha \frac{\tau_k^2}{2} + \gamma \right), \quad (11)$$

$$\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k \leq +\infty.$$

On voit qu'on a obtenu, par induction, le résultat suivant :

THÉORÈME 2 : *L'ensemble des états qui peuvent être capturés à l'aide de stratégies récursives est l'ensemble de ceux qui satisfont (7) pour $\tau < \tau_\infty$. Si cette inégalité est satisfaite pour $\tau \leq \tau_k$, la capture se fera avec une commande étagée (i.e. constante par morceaux) de k étages au plus.*

COROLLAIRE : *Si $\beta^2 < 2\alpha\gamma$, tout état initial peut être capturé à l'aide d'une commande étagée.*

Démonstration du corollaire : La suite τ_k peut être obtenue de la façon graphique ci-dessous.

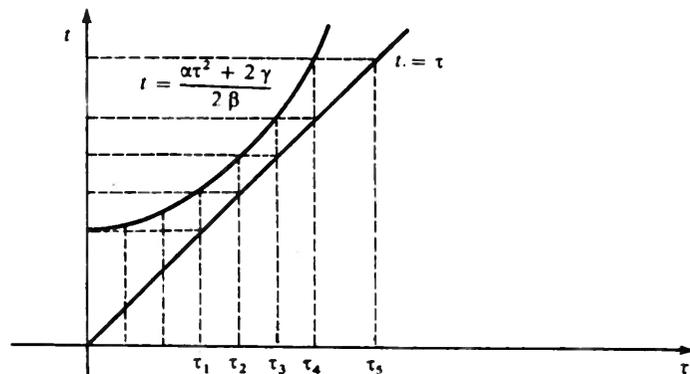


Figure 1. — La suite τ_k .

Et on montre facilement que si la parabole $t = (\alpha\tau^2/2 + \gamma)/\beta$ ne coupe pas la première bissectrice, ce qui est le cas pour $\beta^2 < 2\alpha\gamma$, $\tau_\infty = \infty$. Mais, dans (7) le premier membre croît linéairement avec τ , et le second comme τ^2 . Donc il existe toujours τ assez grand pour que (7) soit satisfaite.

Remarque 3 : La condition du corollaire est la condition $p < 1$ d'Isaacs. Et la conclusion du corollaire est aussi celle obtenue par lui [6]. On a montré dans [2] que la théorie de Pontriaguine [3] menait à la même conclusion. Mais ici nous avons une stratégie de capture constante par morceaux, ce qui est nouveau. (Avec des étages qui deviennent très longs pour k grand, i.e. au début du jeu si on est très loin de l'objectif.) On peut voir aussi que si $\beta^2 \geq 2\alpha\gamma$, τ_∞ est l'instant τ_1 d'Isaacs, correspondant à la crête de la barrière naturelle. On a donc encore le même ensemble d'états capturables. Mais on a montré dans [2] que pour un petit domaine de paramètres, l'ensemble des états capturables avec une stratégie en feedback est plus grand.

4. RECALLAGE D'UN ASSERVISSEMENT. DEUXIÈME MODÈLE

Cet exemple un peu plus compliqué est l'occasion de montrer la machinerie du § 2.3 à l'œuvre.

4.1. Le modèle

On prend pour le système à commander et pour modèle de la consigne, des systèmes de \mathbb{R}^n , du second ordre, avec facteur d'amortissement scalaire k et l respectivement. (On généraliserait facilement à un amortissement matriciel.) Cette fois, on ne peut pas se contenter de l'erreur d'asservissement et de y comme état, il faut garder y, \dot{y}, y_c et \dot{y}_c .

Il vient

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= kx_2 - u, \quad \|u\| \leq \alpha, \quad \alpha > 0, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -lx_3 + v, \quad \|v\| \leq \beta, \quad \beta > 0, \\ M &= \{x \mid \|\Delta x\| \leq \gamma\}, \quad \gamma > 0, \end{aligned}$$

où Δ est la matrice écrite par blocs $\Delta = [I \ 0 \ -I \ 0]$.

La relation (6) devient :

$$\Delta\Phi(\tau)x \in (B(\gamma) \star \Delta Q_\tau) + \Delta P_\tau, \quad (12)$$

où $B(\gamma)$ désigne la boule de \mathbb{R}^n de centre l'origine et de rayon γ .

Dans le cas présent, on vérifie facilement que

$$\Delta\Phi(\tau) = \left(I \frac{1}{k}(1 - e^{-k\tau})I - I \frac{1}{l}(1 - e^{-l\tau})I \right) \quad (13)$$

et la formule (5) donne

$$\Delta P_\tau = \int_0^\tau \frac{1}{k}(1 - e^{-k(\tau-t)})u(t) dt \quad (14)$$

soit

$$\Delta P_\tau = B(\alpha\phi(\tau)), \quad \phi(\tau) = \frac{1}{k^2}(e^{-k\tau} + k\tau - 1),$$

(remarquons en outre que tous les points de ΔP_{τ} , peuvent être réalisés avec une commande constante) et de même

$$\Delta Q_{\tau} = B(\beta\psi(\tau)), \quad \psi(\tau) = \frac{1}{l^2}(e^{-l\tau} + l\tau - 1).$$

On déduit donc de (12) que x appartient à B_1 si et seulement si il existe $\tau > 0$ tel que

$$\gamma - \beta\psi(\tau) \geq 0, \quad (15)$$

$$\left\| x_1 + \frac{1}{k}(1 - e^{-k\tau})x_2 - x_3 - \frac{1}{l}(1 - e^{-l\tau})x_4 \right\| \leq \kappa(\tau), \quad (16)$$

où

$$\kappa(\tau) = \gamma - \beta\psi(\tau) + \alpha\phi(\tau). \quad (17)$$

En effet, la relation (15) assure que $B(\gamma) \pm \Delta Q_{\tau}$ soit non vide, et (16) traduit (12) en utilisant la différence géométrique de deux boules donnée au § 2.3, et les formules (13) et (14).

Nous itérons maintenant pour passer de R_1 à B_2 . Nous remarquons à cette fin que (17) peut aussi s'écrire :

$$\kappa(\tau) = \gamma + \int_0^{\tau} \Delta\Phi(\tau - s) ds \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Nous cherchons donc les états initiaux x tels qu'il existe $t > 0$ et τ satisfaisant (15), et une commande $u(\cdot)$, tels que quelle que soit la perturbation $v(\cdot)$, $x(t)$ appartiennent à B_1 , soit

$$\|\Delta\Phi(\tau)x(t)\| \leq \kappa(\tau).$$

Or

$$\Delta\Phi(\tau)x(t) = \Delta\Phi(t + \tau)x + \int_0^t \Delta\Phi(t + \tau - s) \begin{pmatrix} 0 \\ -u(s) \\ 0 \\ v(s) \end{pmatrix} ds.$$

Par le même raisonnement que ci-dessus, ceci est possible si et seulement si la différence géométrique est non vide :

$$\gamma + \int_0^{\tau} \Delta\Phi(\tau - s) ds \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} - \int_0^t \Phi(t + \tau - s) ds \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \geq 0;$$

soit

$$\gamma + \int_0^{\tau} \Delta\Phi(\tau - s) ds \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^{t+\tau} \Delta\Phi(t + \tau - s) ds \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \geq 0, \quad (19)$$

pour un t tel que

$$\|\Delta\Phi(t + \tau)x\| \leq \gamma + \Delta \int_0^{\tau} \Phi(\tau - s) ds \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \Delta \int_0^t \Phi(t + \tau - s) ds \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

soit

$$\|\Delta\Phi(t + \tau)x\| \leq \kappa(t + \tau). \quad (20)$$

On a utilisé deux fois ci-dessus le fait que, par un simple changement de variable

$$\int_0^{\tau} \Phi(\tau - s) ds = \int_t^{t+\tau} \Phi(t + \tau - s) ds.$$

A nouveau, (20) a la même forme que (16), en y remplaçant τ par $(t + \tau)$. Comme précédemment, introduisons la suite τ_k définie par

$$\tau_0 = 0, \quad \beta\psi(\tau_{k+1}) = \gamma + \alpha\phi(\tau_k),$$

et

$$\forall t < \tau_{k+1}, \quad \beta\psi(t) < \gamma + \alpha\phi(\tau_k).$$

On posera encore

$$\tau_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k.$$

Remarquons que (15) est équivalent à $\tau < \tau_1$, et (19) à

$$t + \tau \leq \tau_2.$$

Par induction, on obtient le théorème ci-dessous :

THÉORÈME 3 : *L'ensemble des états qui peuvent être capturés à l'aide de stratégies récursives sont ceux qui satisfont (16) avec $\tau < \tau_{\infty}$. Si cette inégalité est satisfaite avec $\tau \leq \tau_k$, alors la capture se fera avec une commande étagée de k étages au plus.*

Comme au § 3, on peut chercher à quelle condition tout état initial peut être capturé. On voit facilement qu'il faut et qu'il suffit que $\tau_{\infty} = \infty$, $\kappa(\tau) \rightarrow \infty$. Or τ_{∞} est la plus petite racine de l'équation

$$\beta\psi(\tau) = \gamma + \alpha\phi(\tau).$$

En observant les comportements asymptotiques des deux membres, on voit immédiatement qu'une condition nécessaire est

$$\frac{\alpha}{k} > \frac{\beta}{l}. \quad (21)$$

Cette condition n'est pas suffisante. Mais on peut démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 4 : *Si on a simultanément $\alpha \geq \beta$, et (21), tout état initial peut être recallé arbitrairement bien, face à toute perturbation, à l'aide de stratégies récursives.*

Démonstration : Sous ces conditions, $\kappa(\tau) \rightarrow \infty$ quand $\tau \rightarrow \infty$, comme nous l'avons vu, et comme le premier membre de (16) demeure borné pour $\tau \rightarrow \infty$, (16) sera satisfaite pour un $\tau > 0$, il suffit donc de montrer que $\tau_{\infty} = \infty$. Or τ_{∞} est la plus petite racine positive de l'équation $\kappa(\tau) = 0$. Montrons que κ est toujours positif. On a d'abord $\kappa(0) = \gamma > 0$, quel que soit γ , et

$$\frac{d\kappa}{d\tau} = \frac{\alpha}{k} (1 - e^{-k\tau}) - \frac{\beta}{l} (1 - e^{-l\tau}).$$

On peut écrire

$$\frac{\beta}{l} (1 - e^{-l\tau}) = \frac{\alpha}{m} (1 - e^{-m\frac{\beta}{\alpha}\tau}) \quad \text{où } m = \frac{\alpha}{\beta} l.$$

La condition $\beta/\alpha \leq 1$ donne

$$\frac{\alpha}{m} (1 - e^{-m\frac{\beta}{\alpha}\tau}) \leq \frac{\alpha}{m} (1 - e^{-m\tau}),$$

tandis que (21) implique $m > k$, et de ce fait

$$\frac{\alpha}{m} (1 - e^{-m\tau}) = \alpha \int_0^{\tau} e^{-m\tau} d\tau < \alpha \int_0^{\tau} e^{-k\tau} d\tau = \frac{\alpha}{k} (1 - e^{-k\tau}).$$

On en déduit que $d\kappa/d\tau$ est positif ainsi que $\kappa(0)$, d'où le résultat.

CONCLUSION

Nous exhibons donc des stratégies de commande qui assurent que le système soit recallé en temps fini, quelle que soit la perturbation qui se produira dans la classe des perturbations admissibles. Ces stratégies sont faciles à mettre en œuvre car elles sont constantes par morceaux et ne demandent la mesure de l'état qu'à des instants isolés, chaque observation permettant de fixer, outre la commande à utiliser, le prochain instant d'observation.

Dans cet article, nous avons supposé la mesure exacte. En fait, le même type de méthode permettrait de traiter le cas où la mesure est entachée d'une erreur a priori bornée.

L'important nous semble être qu'un résultat beaucoup plus précis que celui donné par la théorie classique des asservissements a pu être obtenu au prix d'un traitement incomparablement plus simple que celui de la commande optimale stochastique. Ceci provient du choix du modèle des perturbations, décrites par leur support mais non probabilisées. (Cette connaissance, beaucoup plus pauvre, correspond souvent mieux à l'information réellement disponible).

L'exemple de la section 4 montre qu'on peut, comme dans les modèles stochastiques, enrichir la classe des perturbations admissibles à l'aide d'un « shaping filter », sans compliquer notablement le traitement.

Nous avons également montré que la construction proposée en termes abstraits dans [1] peut être faite explicitement, et d'autre part donner des résultats intéressants pour l'Automatique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. V. TOMSKI, *Jeux dynamiques qualitatifs*, Cahier du CEREMADE, n° 7934, Université Paris 9 Dauphine, 1979.
- [2] P. BERNHARD, *Linear Pursuit Evasion Games and the Isotropic Rocket*, PhD thesis, Stanford University, SUDAAR 413, 1970.
- [3] N. L. PONTRIAGUINE, *Linear differential Games I and II*. Soviet Math. Doklady, 8, 1968.
- [4] M. HEYMAN, M. PATCHER et R. J. STERN, *Max-Min Control Problems, a system theoretic approach*, I.E.E.E. Transactions on A.C., AC 21, 1976.
- [5] P. BERNHARD, *Sur la commandabilité des systèmes dynamiques discrets à deux joueurs*, RAIRO J. 3, 1972.
- [6] R. ISAACS, *Differential Games*. Willey, 1965.
- [7] N. KRASSOVSKI et SOUBBOTINE, *Jeux différentiels*, Editions MIR. Moscou, 1978.

COMMENTAIRE DU RAPPORTEUR

La théorie des jeux différentiels évoque inmanquablement le problème du missile anti-missile et autres babioles guerrières. Est-ce la raison du peu d'intérêt qu'elle suscite dans notre pacifique pays ? En réalité, la portée de la théorie des jeux différentiels dépasse très largement le cadre des jeux (?) militaires. En effet, qui peut contester la nécessité d'étudier des asservissements dont le point de consigne peut varier brusquement de façon imprévisible ; n'est-ce pas la situation de tout procédé de fabrication technologiquement évolué dont les points de consigne varient constamment en fonction d'impératifs extérieurs : à la technique de suivre. Abstraitement ceci se traduit par :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad \text{système asservi,}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(y, v) \quad \text{consigne variable,}$$

la cible à atteindre étant l'ensemble $\|x - y\| \leq \varepsilon$ (ε étant l'erreur admissible). Le « joueur » u doit trouver, si c'est possible, une stratégie permettant d'atteindre à tout coup la cible, le « joueur » v étant supposé jouer au pire. C'est bien la situation conflictuelle du jeu différentiel. La seule différence par rapport au problème des missiles est qu'on fait « comme si v jouait au pire » dans l'ignorance ou nous sommes a priori de son jeu, alors que par définition dans un problème de poursuite on est sûr que le poursuivi joue au pire des intérêts du poursuivant. Pour le traitement mathématique, le « faire comme si » ne change rien.

Les auteurs de cet article montrent comment une stratégie en boucle ouverte recalculée périodiquement à partir d'observations de l'état permet de donner une réponse à ce problème. Ils montrent sur deux exemples (académiques certes, mais n'est-ce pas le cas de tous les exemples illustrant les théories abstraites ?) que cette stratégie peut effectivement être calculée ; ils offrent donc un outil a priori utilisable pratiquement.

Au-delà de cet article (qui laisse le lecteur un peu sur sa faim), il serait intéressant de voir publiée dans R.A.I.R.O. une analyse de l'apport de la théorie des jeux différentiels à l'automatique.

CONTRÔLE DE L'ATTITUDE D'UN SATELLITE RIGIDE (*)

par B. BONNARD (1)

présenté par G. BORNARD

Résumé. — On donne des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité pour le problème de contrôle de l'attitude d'un satellite rigide gouverné par des rétrofusées qui émettent du gaz dans deux directions opposées.

Abstract. — We give necessary and sufficient conditions of controllability for the attitude control problem of a rigid spacecraft governed by pairs of opposing gas jets.

1. INTRODUCTION

Le mouvement d'un satellite artificiel est caractérisé par le déplacement de son centre de gravité, qui est celui d'un point matériel dans un champ de forces centrales, et par la position ou l'attitude qu'il occupe par rapport à un référentiel dont l'origine est le centre de gravité et dont les axes occupent des directions que l'on considère approximativement fixes dans l'espace.

On choisit un tel référentiel orthonormé et on note e_1, e_2, e_3 ses axes.

L'attitude du satellite est donc caractérisée par les positions des axes $E_1(t), E_2(t), E_3(t)$ d'un repère lié au solide et dont l'origine coïncide avec le centre de gravité. En d'autres termes, l'attitude du satellite est donnée par la matrice $R(t)$ appelée matrice des cosinus directeurs et définie par $R(t) = (r_{ij}(t))$ où $r_{ij}(t) = (E_i(t), e_j)$ où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire ordinaire de \mathbb{R}^3 .

Si l'on suppose que le repère lié au solide est un repère principal d'inertie et si l'on considère le repère e_1, e_2, e_3 galiléen, les principes fondamentaux de la dynamique nous conduisent aux équations suivantes :

(*) Reçu en octobre 1980.

(1) Laboratoire d'Automatique de Grenoble, École Nationale Supérieure d'Ingénieurs Électriques de Grenoble, St-Martin-d'Hères, France.