La tarification d'options

Proposition pour une approche déterministe

Pierre Bernhard[1]
Stéphane Thiery[2]
Marc Deschamps[3]

Nous proposons ici une théorie de la tarification d'options sur la base d'un modèle de marché introduit récemment. Notre théorie permet, au prix de certaines limites, de déterminer la prime d'une option en temps continu et en temps discret en présence de coûts de transaction. Notre approche se veut complémentaire à celle développée par F. Black et M. Scholes.

OPTION PRICING : A PROPOSAL FOR A DETERMINISTIC APPROACH

We propose a theory of option pricing using a model market introduced recently. Our theory that enables (with some drawbacks) to price option in continuous and discrete time, with transaction costs, is complementary to F. Black and M. Scholes theory. In this article we expose how to modelise this problem and how to find the premium. We conclude by some properties and some limits of this theory.

Classification *JEL* : G11, C61, C79

Pour ce qui est de la détermination du prix d'une option, c'est-à-dire la recherche du prix d'un contrat (la prime) qui donne le droit –et non l'obligation– à son souscripteur d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à terme (dans le cas d'une option européenne) ou durant une période (dans le cas d'une option américaine) à un prix fixé dès le début du contrat, le modèle de F. Black et M. Scholes [1973] est *la* référence incontournable.

De plus ce modèle est à la fois l'une des plus belles et des plus fécondes réussites scientifiques de la théorie économique, comme en atteste notamment l'article de E. Han Kim et al. [2006] sur les contributions qui ont compté en économie depuis 1970, les différents manuels de théorie financière et le prix en

[1] I3S, Université de Nice/Sophia Antipolis et CNRS.
[2] I3S, Université de Nice/Sophia Antipolis et CNRS.
[3] GREDEG, Université de Nice/Sophia Antipolis et CNRS.

la mémoire d'Alfred Nobel du 14 octobre 1997 ; mais c'est également l'une des plus notables innovations de la théorie économique comme le démontre son usage commun par les praticiens, ainsi que l'article de G. Faulhaber et W. Baumol [1988] qui traite des « produits pratiques » issus de la recherche théorique. On doit donc en conclure que « le mariage de la théorie et de la pratique a rarement été aussi productif que dans le cas des options » comme le souligne P. Bernstein [2000, p 231] qui considère par ailleurs que l'option est « l'instrument financier universel ».

Toutefois, si l'on estime à l'instar de la thèse développée par A. Rubinstein [2006] dans son adresse présidentielle à la Société d'Econométrie que l'économiste théoricien a pour objectif de créer des modèles destinés à « raconter des fables », il nous semble permis d'imaginer une autre histoire portant sur les mêmes phénomènes. Notre approche se veut donc *complémentaire* à celle développée par F. Black et M. Scholes au sens où nous proposons une modélisation du problème auquel fait face le banquier[1] et qui, au prix de certaines limites, permet de prendre en compte les coûts de transaction et de faire des choix à la fois en temps continu et en temps discret.

Afin de présenter les traits essentiels de notre approche nous exposerons dans un premier temps la modélisation, avant d'aborder, dans un second temps la résolution et les limites.

LA MODELISATION

Notre approche suit la même logique que la théorie de F. Black et M. Scholes puisqu'elle associe à un modèle de marché le principe fondamental de R. Merton. Toutefois à la différence de ces derniers, nous n'utilisons pas le modèle de marché de Bachelier-Samuelson mais un « modèle à intervalles » qui conduit à l'abandon d'une formalisation probabiliste au profit d'une approche de type commande robuste, donnant la prime comme solution d'un jeu Min-Max. Il faut néanmoins noter que cette même approche, appliquée au modèle de Samuelson, redonne la formule de Black et Scholes (voir P. Bernhard [2005b, p 8]).

Le modèle de marché à intervalles et le modèle de portefeuille

Le point de départ et le cœur de notre analyse repose sur un « modèle de marché à intervalles »[2] introduit simultanément et indépendamment par B. Roorda, J. Engwarda, H. Schumacher [2005], J-P. Aubin, D. Pujal et P. Saint-

---

[1] Nous cherchons ici à savoir à quel tarif un offreur (par exemple un banquier) doit proposer une option pour ne pas faire de perte, tout en étant le plus compétitif possible.

[2] Cette dénomination provient de B. Roorda, J. Engwarda et H. Schumacher [2005].

Pierre [2005] et P. Bernhard [2005a]. Ce modèle a pour caractéristique principale d'abandonner l'approche probabiliste. Il décrit un marché par un ensemble de trajectoires de prix possibles (sans probabilités sur les trajectoires) et fait l'hypothèse que le taux de variation relatif du cours de l'actif sous-jacent, bien qu'*imprédictible*, est supposé borné par deux bornes connues $\tau^- < 0$ et $\tau^+ > 0$ et fixes dans le temps. Cela conduit à la définition suivante :

Définition

Un *modèle de marché à intervalles* est un ensemble de trajectoires de prix dont la variation $\tau(\cdot)$ appartient à l'ensemble Ψ des fonctions mesurables telles que $\tau(t) \in [\tau^-, \tau^+]$, $\forall t \in [0, T]$, où t représente le temps et T la date d'exercice (ou échéance).

Le cours actualisé à l'échéance de l'actif sous-jacent ($u(t)$) sur lequel porte l'option est supposé ici satisfaire l'hypothèse de marché à intervalles. Sur cette base nous présenterons dans un premier temps le modèle dans le cas continu, afin de pouvoir dans un second temps présenter le cas discret qui en est un échantillonnage exact (ce qui signifie que l'on ne change pas de modèle d'actif).

Dans le cas continu, le cours de l'actif sous-jacent est dès lors défini par $u(0) \in \mathbb{R}^+$ et $\tau(\cdot) \in \Psi$ sous la relation :

$$\dot{u} = \tau u \,. \tag{1}$$

Sur la base de ce modèle de marché, tout comme dans la théorie de F. Black et M. Scholes, on s'appuie sur la construction d'un portefeuille contenant une quantité variable de l'actif sous-jacent et une quantité variable d'un actif non risqué (bons sans risques)[1]. En accord avec le principe de Merton, nous cherchons à gérer ce portefeuille à travers une stratégie autofinancée en présence de coûts de transaction[2], de telle sorte que la valeur du portefeuille à l'échéance soit supérieure ou égale au paiement du banquier à son client. Ce paiement ($M(u(T))$) est une fonction de la valeur du cours à l'échéance ($u(T)$)[3].

---

[1] Cet actif évolue à un taux d'intérêt (ρ), mais celui-ci ne joue ici aucun rôle dans la dynamique, du fait de l'actualisation de toutes les variables à l'échéance.

[2] Un portefeuille est dit autofinancé si chacune des transactions s'effectue sans ajouts ni retraits de fonds dans le portefeuille. En présence de coûts de transaction, le portefeuille est dit autofinancé si chaque transaction finance ses coûts.

[3] L'expression de ce paiement est propre au type de l'option européenne considérée (call vanille, put vanille, call digital, put digital).

Pour le modèle de portefeuille on introduit deux variables, le montant investi en actif sous-jacent (v) et la valeur du portefeuille autofinancé (w).

Le banquier peut effectuer des ordres d'achat et de vente, c'est-à-dire des transactions autofinancées (ξ), en temps continu avec un débit de transaction ($\xi_C(t)$) et/ou en temps discret à une suite d'instants $\{t_k\}$ avec des amplitudes (montants) $\{\xi_k\}$ correspondants, tous deux choisis librement. On définit ainsi l'ensemble des transactions admissibles par :

$$\xi(t) = \xi_C(t) + \sum_k \xi_k \delta(t - t_k) . \qquad (2)$$

La dynamique de portefeuille est donnée par le système d'équations suivant (voir P. Bernhard et al. [2007, p 5]) :

$$\begin{cases} \dot{v} = \tau v + \xi_C \qquad \text{et} \qquad v(t_k^+) = v(t_k) + \xi_k & (3) \\ \dot{w} = \tau v - C(\xi_C) \qquad \text{et} \qquad w(t_k^+) = w(t_k) - C(\xi_k) & (4) \end{cases}$$

où t_k^+ désigne la valeur des grandeurs concernées juste après la transaction de l'instant t_k, sans modification du cours de l'actif sous-jacent $\left(u(t_k^+) = u(t_k)\right)$ et où la fonction positive $C(\cdot)$ représente les coûts de transaction. Ces derniers sont supposés ici proportionnels au montant de la transaction et sont donc représentés par une fonction linéaire par morceaux :

$$C(\xi) = C^\varepsilon \xi \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \text{sign}(\xi), \; C^- < 0 \text{ et } C^+ > 0 \quad . \qquad (5)$$

L'équation (4) montre notamment que toute transaction, continue ou discrète, induit une baisse en valeur du portefeuille égale aux coûts de transaction. On retrouve ainsi la notion d'autofinancement du portefeuille.

Pour éviter que le trader puisse faire une prédiction sur les cours futurs, ce qui serait susceptible de créer des opportunités d'arbitrage, on utilise les stratégies dites *non anticipatives* et sont cherchées sous la forme d'une rétroaction d'état[1] :

$$\xi(t) = \varphi(t, u(t), v(t)) \quad \text{avec} \quad \varphi \in \Phi \quad . \qquad (6)$$

[1] La définition précise de l'ensemble des feedbacks admissibles pose des problèmes techniques. C'est pourquoi la théorie complète utilise ici la notion de stratégie non anticipative. On pourra se reporter à P. Bernhard et al. [2007, p 6].

La transaction à un instant donné correspond donc à une fonction de la valeur du cours et du montant investit en sous-jacent au même instant.

Dans le cas discret, le modèle de marché consiste en un échantillonnage du modèle de marché en temps continu, avec des transactions finies ne pouvant intervenir qu'à des instants (t_k) multiples du pas de discrétisation (*h*) d'où $t_k = kh$, où $k \in \{0,1,...,K\}$, avec $T = Kh$. Le banquier est donc soumis à la contrainte suivante :

$$\xi_c(t) = 0, \qquad t_k = kh \quad . \tag{7}$$

Par ailleurs, l'hypothèse $\tau(t) \in [\tau^-, \tau^+]$ peut se traduire par :

$$\frac{u(t_{k+1}) - u(t_k)}{u(t_k)} \in [\tau_h^-, \tau_h^+] \quad , \tag{8}$$

avec

$$\tau_h^\varepsilon = e^{\tau^\varepsilon h} - 1, \qquad \varepsilon \in \{-,+\} \quad . \tag{9}$$

De manière analogue au temps continu (voir P. Bernhard et al. [2007, p 4-6]), et en prenant comme convention de noter $u(t_k) = u(kh) = u_k$ et de la même façon les autres variables, on obtient la dynamique de marché et de portefeuille suivante :

$$\begin{cases} u_{k+1} = (1+\tau_k)u_k \ , \\ v_{k+1} = (1+\tau_k)(v_k + \xi_k) \ , \\ w_{k+1} = w_k + \tau_k(v_k + \xi_k) - C(\xi_k) \ . \end{cases} \tag{10}$$

Les coûts de transaction sont formalisés de la même manière que dans le cas continu et sont donc données par l'équation (5). Les stratégies de transaction sont également trouvées sous la forme d'une rétroaction d'état et correspondent à :

$$\xi_k = \varphi_k(u_k, v_k) \quad \text{avec} \quad \varphi_k \in \Phi_D \subset \Phi \ . \tag{11}$$

L'approche en terme de commande robuste et le jeu Min-Max

Il est maintenant possible, en temps continu et en temps discret, de rechercher la prime définie en accord avec le principe de Merton comme la plus petite valeur d'un portefeuille initial ($w(0)$) avec lequel il est possible de trouver une stratégie de transaction de telle sorte qu'à l'échéance on respecte la condition de couverture, c'est-à-dire que le portefeuille soit de valeur ($w(T)$) supérieure ou égale au paiement ($M(u(T))$).

Dans une approche en terme de commande robuste, on souhaite satisfaire cette condition *quelle que soit la trajectoire du cours de l'actif sous-jacent* satisfaisant l'hypothèse du modèle de marché à intervalles, à savoir $\forall \tau(.) \in \Psi$ à $u(0) \in \mathbb{R}^+$ fixé.

Ainsi dans le cas continu, on dit que la stratégie $\xi(t) = \varphi(t, u(t), v(t))$ est une stratégie de couverture par commande robuste, pour un cours initial $u(0)$, si :

$$\forall \tau(.) \in \Psi, \qquad w(T) \geq M(u(T)) \quad . \tag{12}$$

En intégrant la dynamique du portefeuille (l'équation (4)) sur toute la durée de l'option ([0,T]) il vient :

$$w(T) - w(0) = \int_0^T (\tau(s)v(s) - C(\xi_C(s)))\,\mathrm{d}s - \sum_k C(\xi_k) \quad . \tag{13}$$

En utilisant le $w(T)$ de l'équation (13) dans l'équation (12), la condition de couverture se réécrit sous la forme d'une condition portant sur la valeur initiale du portefeuille :

$$\forall \tau(\cdot) \in \Psi,$$
$$w(0) \geq M(u(T)) + \int_0^T (-\tau(s)v(s) + C(\xi_C(s)))\,\mathrm{d}s + \sum_k C(\xi_k), \tag{14}$$

qui est équivalente à :

$$w(0) \geq \sup_{\tau(.) \in \Psi} \left[M(u(T)) + \int_0^T (-\tau(s)v(s) + C(\xi_C(s)))\,\mathrm{d}s + \sum_k C(\xi_k) \right]. \tag{15}$$

Cette équation fournit au banquier la condition nécessaire sur la valeur initiale, pour une stratégie de transaction donnée, qui lui permet de se couvrir contre toutes variations du cours (c'est-à-dire pour laquelle il est certain de pas subir de perte). Le banquier cherche également à faire une offre la plus compétitive possible. La prime $P\left(u\left(0\right)\right)$ est alors définie en fonction de la valeur initial du cours de l'actif sous-jacent par :

$$P\left(u\left(0\right)\right)=$$
$$\inf_{\varphi\in\Phi}\sup_{\tau(.)\in\Psi}\left[M\left(u\left(T\right)\right)+\int_0^T\left(-\tau\left(s\right)v\left(s\right)+C\left(\xi_C\left(s\right)\right)\right)\mathrm{d}s+\sum_k C\left(\xi_k\right)\right], \quad (16)$$

avec $v\left(0\right)=0$ (la prime étant versée en bons sans risque). Ce critère (équation (16)) associé à la dynamique (équations (1) et (3)) définit un jeu Min-Max[1].

Dans le cas discret, en partant de l'équation (12) et en suivant une analyse analogue, la prime est définie[2] par :

$$P\left(u\left(0\right)\right)=\min_{\varphi\in\Phi_D}\sup_{\{\tau_k\}\in\Psi_D}\left[M\left(u\left(T\right)\right)+\sum_{k=0}^{K-1}\left[-\tau_k\left(v_k+\xi_k\right)+C\left(\xi_k\right)\right]\right], \quad (17)$$

qui, avec la dynamique (les équations (10)) forme à nouveau un jeu Min-Max.

Partant de ces éléments, nous allons introduire la fonction valeur, qui est la solution globale pour toutes les conditions initiales des équations (16) et (17). Le jeu peut alors se résoudre en temps continu à l'aide d'outils issus de la théorie des jeux différentiels d'Isaacs-Breakwell et/ou du concept de solution de viscosité. En temps discret, la résolution du jeu se fait par le biais d'un algorithme de programmation dynamique (l'équation d'Isaacs discrète).

LA RESOLUTION ET LES LIMITES

Sur la base de cette modélisation et afin d'être les plus explicite possible quant à nos conclusions et à leur portée, nous présenterons tout d'abord la résolution et les principaux résultats de notre modèle, puis nous exposerons brièvement les trois principales limites liées à notre approche.

---

[1] A strictement parler il s'agit ici d'un jeu Min-Max impulsionnel puisque les transactions admissibles du banquier sont continues et impulsionnelles.

[2] A la différence du cas continu, dans le cas discret la stratégie qui minimise la valeur du portefeuille de couverture est toujours atteinte.

Résolution dans le cas continu et dans le cas discret

Dans le cas continu, la fonction valeur associée au jeu Min-Max s'écrit :

$$W\left(t,u\left(t\right),v\left(t\right)\right)=$$
$$\inf_{\varphi\in\Phi}\sup_{\tau(.)\in\Psi}\left[M\left(u\left(T\right)\right)+\int_t^T\left(-\tau\left(s\right)v\left(s\right)+C\left(\xi_C\left(s\right)\right)\right)\mathrm{d}s+\sum_{k/t_k\geq t}C\left(\xi_k\right)\right] \tag{18}$$

et la prime (équation (16)) correspond à $P\left(u\left(0\right)\right)=W\left(0,u\left(0\right),0\right)$.

A l'aide d'outils de la théorie des jeux différentiels (voir P. Bernhard [2005b, p 11-12] et P. Bernhard et al. [2006, p 9]) il a été démontré qu'on peut établir la formule de représentation suivante :

$$W\left(t,u,v\right)=\hat{w}\left(t,u\right)+q^{\varepsilon}\left(t,u\right)\left(\hat{v}\left(t,u\right)-v\right)\ , \tag{19}$$

dans laquelle $\varepsilon=\mathrm{sign}\left(\hat{v}\left(t,u\right)-v\right)$, le vecteur colonne $\left(\hat{v}\left(t,u\right),\hat{w}\left(t,u\right)\right)^t$ est obtenu comme la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires couplées, et où $q^{+}\left(t,u\right)$ et $q^{-}\left(t,u\right)$ sont deux fonctions données dont l'expression dépend du type de l'option considérée.

On peut compléter cette analyse en montrant que la fonction *W* obtenue dans l'équation (19) est solution de viscosité de l'équation suivante :

$$0=\min\left\{\frac{\partial W}{\partial t}+\max_{\tau\in\left[\tau^-,\tau^+\right]}\tau\left[\frac{\partial W}{\partial u}u+\left(\frac{\partial W}{\partial v}-1\right)v\right],\frac{\partial W}{\partial v}+C^+,-\left(\frac{\partial W}{\partial v}+C^-\right)\right\}\ , \tag{20}$$

avec la condition au bord $W\left(T,u,v\right)=M\left(u\right)\ \ \forall\left(u,v\right)$ (voir P. Bernhard et al. [2006, p 15-16] et S. Thiery [2007, Chap 5] pour les détails de la preuve).

Dans le cas discret, avec pour pas d'échantillonnage *h*, la fonction valeur associée au jeu Min-Max s'écrit :

$$W_k^h\left(u_k,v_k\right)=\min_{\varphi\in\Phi_D}\sup_{\{\tau_k\}\in\Psi_D}\left[M\left(u_K\right)+\sum_{\ell=k}^{K-1}\left[-\tau_\ell\left(v_\ell+\xi_\ell\right)+C\left(\xi_\ell\right)\right]\right]\ , \tag{21}$$

et s'obtient à partir de l'équation d'Isaacs discrète (voir P. Bernhard et al. [2007, p 10]).

On peut montrer un théorème de représentation semblable à l'équation (19) :

$$W_k^h(u,v) = \hat{w}_k^h(u) + q^{\varepsilon}(kh,u)\left(\hat{v}_k^h(u) - v\right) \quad , \qquad (23)$$

où $\varepsilon = \text{sign}\, \hat{v}_k^h(u) - v$, les q^{ε} sont les mêmes fonctions que précédemment et le vecteur colonne $\left(\hat{v}_k^h(u), \hat{w}_k^h(u)\right)^t$ sont donnés par une récursion linéaire (en *k*). Ce théorème conduit à un algorithme simple et rapide (comme le démontrent P. Bernard et al. [2007, p 10-11], donc applicable en pratique.

Les limites de la modélisation

En contrepartie des apports liés à cette modélisation, il existe au moins trois limites ou difficultés. La principale porte sur le caractère borné du taux de variation relatif qui consiste à faire l'hypothèse *peu réaliste* qu'à chaque instant le taux de variation relatif est compris entre deux bornes connues. Ensuite, le modèle de marché à intervalles est incomplet (au sens de la théorie financière) menant à une couverture par super-réplication, et à un prix auquel le vendeur souhaite vendre et non à un prix d'équilibre. Enfin, si notre modélisation nous permet de traiter des coûts de transaction, grands ou petits, elle oblige à les supposer non nuls[1].

CONCLUSION

Cet article a eu pour but de démontrer la possibilité d'une modélisation *complémentaire* à celle proposé par F. Black et Scholes. En effet, outre l'introduction de coûts de transactions et une modélisation en temps discret, P. Bernhard et al. [2006] ont prouvés l'existence d'un théorème de convergence de la fonction valeur, et donc de la prime, du problème en temps discret vers celle du problème en temps continu lorsque le pas de temps tend vers zéro, en conservant *le même modèle de marché* pour chaque pas de temps, à la différence de la convergence de la solution de J. Cox et al. [1979] vers celle de F. Black et M. Scholes [1973]. Ainsi, l'algorithme rapide du problème en temps discret est-il aussi un algorithme d'approximation de la valeur en temps continu, qui devient ainsi aisément calculable.

Toutefois, il s'agit pour nous, actuellement, d'une simple « fable » au sens de A. Rubinstein [2006], et seul le monde académique et les praticiens pourront, à l'avenir, dire s'il a quelque utilité pour eux.

---

[1] On a montré que sans eux, la théorie se trivialise pour donner la stratégie de couverture dite « stop loss », et une prime égale à 0 ou *K*, suivant la valeur de *u*(0).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AUBIN, J-P., PUJAL, D. et SAINT-PIERRE, P. [2005], "Dynamic Management of Portfolios with Transaction Costs under Tychastic Uncertainty", dans *Numerical Methods in Finance*, BRETON, M. et BEN-AMEUR, H. (eds), Springer, New-York, p 59-90.

BERNHARD, P. [2005a], "A Robust Control Approach to Option Pricing Incuding Transaction Costs", *Annals of International Society of Dynamic Games*, 7, p 391-416.

BERNHARD, P. [2005b], "The Robust Control Approach to Option Pricing and Interval Models : an Overview", dans *Numerical Methods in Finance*, BRETON, M. et BEN-AMEUR, H. (eds), Springer, New-York, p 91-108.

BERNHARD, P., El FAROUQ, N. et THIERY, S. [2006], "An Impulsive Differential Game Arising in Finance with Interesting Singularities", *Annals of International Society of Dynamic Games*, 8, p 335-363.

BERNHARD, P., El FAROUQ, N. et THIERY, S. [2007], "Robust Control Approach to Option Pricing : Representation Theorem and Fast Algorithm", *SIAM Journal on Control and Optimization*, a paraître.

BERNSTEIN, P. [2000], *Des idées capitales*, Paris, Quadrige, PUF.

BLACK, F et SCHOLES, M. [1973], "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81(3), May-June, p 637-654.

COX, J., ROSS, S., et RUBINSTEIN, M. [1979], "Option pricing: a simplified approach", *Journal of Financial Economics*, 7, p 229-263.

FAULHABER, G. et BAUMOL, W. [1988], "Economists as Innovators : Practical Products of Theoretical Research", *Journal of Economic Litterature*, 26(2), June, p 577-600.

HAN KIM, E., MORSE, A. et ZINGALES, L. [2006], "What has Mattered to Economics since 1970", *Journal of Economic Perspectives*, 20(4), p 189-202.

ROORDA, B., ENGWARDA, J. et SCHUMACHER, H. [2005], "Performance of Hedging Strategies in Interval Models", *Kybernetica*, 41(5), p 575-592.

RUBINSTEIN, A. [2006], "Dilemmas of an Economic Theorist", *Econometrica*, 74(4), July, p 865-883.

THIERY, S. [2007], *Evaluation d'options "vanilles" et "digitales" dans le modèle de marché à intervalles*, Thèse de doctorat de Mathématiques Appliquées, Université de Nice/Sophia-Antipolis, à paraître.