

**ETUDE DE LA BARRIERE  
POUR UN PROBLEME DE FUITE OPTIMALE  
DANS LE PLAN**

P. BERNHARD et B. LARROUTUROU

*INRIA, Sophia-Antipolis, 06560 VALBONNE, FRANCE*

**Résumé**

Nous étudions un problème de commande optimale dans le plan qui modélise la poursuite d'un fugitif  $F$  par un poursuivant  $P$ , qui entend le fugitif. Le bruit émis par le fugitif est une fonction croissante de sa vitesse, et le bruit entendu par le poursuivant dépend du bruit émis par le fugitif et de la distance qui les sépare. On s'intéresse au cas simple où le poursuivant se déplace en ligne droite et à vitesse constante. L'utilisation pour ce problème des résultats classiques de la théorie de la commande optimale permet de définir et de calculer une "barrière". Plusieurs propriétés qualitatives de cette barrière sont également démontrées. Par ailleurs, nous regroupons en annexe quelques remarques concernant des questions de commandabilité et viabilité (non linéaires) soulevées par l'étude de ce problème de fuite.

**Abstract**

We study a pursuit problem, modeling the chase of a noisy evader by a potentially listening pursuer. Emitted noise is a function of evader's speed, while perceived noise is also a function of the distance between the opponents. We look here at the simple case where the pursuer coasts in a straight line at constant speed. Use of classical results of optimal control theory allows us to compute a "barrier". Several qualitative properties of this barrier are derived. Furthermore, we regroup in an annex remarks concerning (nonlinear) controllability and viability, raised by this pursuit problem.

## 1. INTRODUCTION

Nous étudions un problème de commande optimale dans le plan qui modélise la poursuite d'un fugitif  $F$  par un poursuivant  $P$ , avec l'hypothèse que le poursuivant, aveugle, ne peut qu'entendre le fugitif. De façon plus précise, le bruit émis par le fugitif est une fonction croissante de sa vitesse, et le bruit entendu par le poursuivant dépend du bruit émis par le fugitif et de la distance qui les sépare. On s'intéresse au cas simple où le poursuivant se déplace en ligne droite et à vitesse constante tant qu'il n'a pas détecté le fugitif.

L'utilisation pour ce problème des résultats classiques de la théorie de la commande optimale permet de définir et de calculer la "barrière" qui sépare les positions initiales à partir desquelles le fugitif peut s'échapper sans être entendu du poursuivant, et les positions à partir desquelles le fugitif sera inmanquablement repéré, quelle que soit sa stratégie de fuite. Plusieurs propriétés qualitatives de cette barrière et de la fuite optimale du fugitif dans le cas limite où sa position initiale est située sur la barrière sont également démontrées. Par ailleurs, nous regroupons en annexe quelques remarques concernant des questions de commandabilité et viabilité soulevées par l'étude de ce problème de fuite.

## 2. MODELE UTILISE

### 2.1. Présentation du problème

Nous nous intéressons à un problème de poursuite dans le plan, dans lequel le poursuivant  $P$  se déplace sur une droite, à vitesse uniforme  $V$ , alors que le fugitif  $F$  se déplace dans le plan. Nous noterons  $w$  la vitesse de  $F$ , et  $\theta$  l'angle des vecteurs vitesses  $\vec{V}$  et  $\vec{w}$ . En utilisant un repère lié au mouvement de  $P$ , dont l'origine est  $P$  et dont l'axe  $x'Ox$  est confondu avec la droite sur laquelle se déplace  $P$  (voir figure 1), on repère la position de  $F$  par ses coordonnées  $(x, y)$  vérifiant:

$$\begin{cases} \dot{x} = w \cos \theta - V , \\ \dot{y} = w \sin \theta . \end{cases} \quad (2.1)$$

INSERER FIGURE 1

En accord avec les hypothèses présentées dans l'introduction, on suppose que le fugitif  $F$  est "entendu" par le poursuivant  $P$  dès que l'inégalité

$$\sqrt{x^2 + y^2} < L(w) , \quad (2.2)$$

a lieu, c'est-à-dire dès que la distance de  $P$  à  $F$  est inférieure à une longueur  $L(w)$ , fonction donnée de la vitesse du fugitif. Pour simplifier l'étude, on supposera par la suite que (2.2) s'écrit:

$$\sqrt{x^2 + y^2} < L_0 + \tau w , \quad (2.3)$$

où  $L_0$  et  $\tau$  sont des constantes positives (voir Remarque 1 à la fin de la section 4 ci-dessous).

Le problème à étudier se présente alors de façon très classique: le fugitif  $F$  cherche à échapper au poursuivant, c'est-à-dire à ne pas être entendu, ou à être entendu le plus tard possible. On supposera que  $F$  peut, à chaque instant, choisir son cap  $\theta$  et sa vitesse  $w$ , avec la contrainte  $0 \leq w \leq W$ .

Bien que nous ayons utilisé le vocabulaire de poursuivant et fugitif, classique en jeux différentiels, il est clair que nous allons simplement obtenir un problème de commande optimale (un "jeu à un seul joueur"), puisque  $P$  est par hypothèse astreint à se déplacer avec une vitesse et un cap donnés. Il faut remarquer à ce sujet que cette hypothèse sur le comportement du poursuivant est tout à fait naturelle pour les situations auxquelles nous allons nous intéresser, dans lesquelles le fugitif réussit à s'échapper, et n'est donc jamais entendu par le poursuivant.

Supposons donc donnée la position initiale  $F_0$  de  $F$  dans le repère lié à  $P$ ; nous allons chercher si  $F$  peut "s'échapper", c'est-à-dire n'être jamais entendu. A ce propos, il est clair que si la distance  $d(0, F_0)$ , séparant initialement le poursuivant et le fugitif est inférieure à  $L_0$ , le fugitif sera instantanément entendu; à l'opposé, si la distance  $d(0, F_0)$  est assez grande, le fugitif s'échappe aisément. Nous allons nous intéresser à la "barrière", c'est-à-dire à la courbe du plan qui sépare les états initiaux à partir desquels  $F$  peut s'échapper de ceux pour lesquels sa "capture" est inévitable (i.e. à partir desquels le fugitif sera entendu quelle que soit sa stratégie).

## 2.2. Quelques rappels

Avant d'étudier cette barrière, nous présentons quelques rappels élémentaires de commande optimale en considérant un problème modèle:

Soit  $U = U(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$  la commande,  $X = X(t) \in \mathbb{R}^n$  l'état, qui satisfait l'équation différentielle (autonome):

$$\dot{X} = F(X, U) , \quad (2.4)$$

avec la condition initiale:

$$X(0) = X_0 . \quad (2.5)$$

On suppose que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $\mathcal{C}$  une partie ouverte et bornée de  $\mathbb{R}^2$  (la cible), dont la frontière  $\Gamma$  est supposée régulière. On notera  $n$  la normale unitaire extérieure à  $\mathcal{C}$  sur  $\Gamma$ .

La question est alors de savoir si, l'état initial  $X_0$  étant donné, on peut trouver une commande  $U(\cdot)$  telle que l'état  $X = X(t)$  évite la cible  $\mathcal{C}$  pour tout  $t > 0$ . On peut aussi remplacer ce problème qualitatif par le problème quantitatif suivant:

$$\max_U J(U) , \quad (2.6)$$

où:

$$J(U) = \begin{cases} t_0 , & \text{premier instant où } X \text{ atteint la cible } \mathcal{C} \text{ si cet instant existe,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Nous supposons que les ensembles:

$$\Gamma_+ = \left\{ X \in \Gamma, \max_{U \in \mathcal{U}} [F(X, U), n] > 0 \right\} , \quad (2.8)$$

$$\Gamma_- = \left\{ X \in \Gamma, \max_{U \in \mathcal{U}} [F(X, U), n] < 0 \right\} , \quad (2.9)$$

sont non vides (les crochets désignent des produits scalaires dans  $\mathbb{R}^n$ ). On dit que  $\Gamma_-$  est la partie utile de la frontière  $\Gamma$ : il est clair que, si la commande réalise le maximum (2.6), la trajectoire (2.4) ne peut atteindre la cible en un point de  $\Gamma_+$  (sinon, en choisissant à l'instant où l'état atteint  $\Gamma_+$  une commande  $U$  telle que  $[F(X, U), n] > 0$ , on peut retarder la capture).

Soit alors  $\mathbf{X}_-$  l'ensemble des états à partir desquels la capture est inévitable:

$$\mathbf{X}_- = \{ X_0 \in \mathbb{R}^n , \forall U(\cdot) , \exists \hat{t} , X(\hat{t}) \in \mathcal{C} \} \quad (2.10)$$

(où  $X(t)$  est solution de (2.4)-(2.5)), et soit  $\mathbf{X}_+$  le complémentaire de  $\mathbf{X}_-$ , c'est-à-dire l'ensemble des états à partir desquels l'évasion est possible. On a bien sûr  $\Gamma_- \subset \mathbf{X}_-$ .

Soit enfin  $\mathcal{B}$  la frontière de  $\mathbf{X}_-$ , que nous appellerons souvent la "barrière" pour le problème considéré. Nous allons successivement étudier cette barrière d'un point de vue géométrique, du

point de vue de l'obtention de conditions nécessaires satisfaites par  $\mathcal{B}$ , et enfin du point de vue de l'obtention de conditions suffisantes.

2.2.1. On peut d'abord énoncer:

**LEMME 1:**

En un point  $X$  de  $\mathcal{B}$ , on désigne par  $\nu(X)$  un vecteur normal à  $\mathcal{B}$  extérieur à  $\mathbf{X}_-$ . Si  $\mathbf{X}_-$  est localement d'un seul côté de  $\mathcal{B}$ , et en tout point  $X$  où  $\mathcal{B}$  est  $\mathcal{C}^1$ , on a:

$$\max_{U \in \mathcal{U}} [\nu(X), F(X, U)] = 0 . \quad (2.11)$$

Démonstration: La barrière  $\mathcal{B}$  est nécessairement "semiperméable", c'est-à-dire qu'on peut empêcher la trajectoire issue d'un point de  $\mathbf{X}_+$  de traverser  $\mathcal{B}$  vers  $\mathbf{X}_-$ ; donc pour tout  $\hat{X}$  de  $\mathcal{B}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}(\hat{X})$  tel que:

$$\forall X \in \mathcal{V}(\hat{X}) \cap \mathbf{X}_+ , \quad \max_U [\nu(\hat{X}), F(X, U)] \geq 0 . \quad (2.12)$$

Mais il est impossible de traverser  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{X}_-$  vers  $\mathbf{X}_+$ , donc:

$$\forall X \in \mathcal{V}(\hat{X}) \cap \mathbf{X}_- , \quad \max_U [\nu(\hat{X}), F(X, U)] \leq 0 , \quad (2.13)$$

d'où (2.11) par continuité de  $F$ .

Nous avons défini ci-dessus ce qu'est une hypersurface  $\mathcal{B}$  semiperméable. Toute direction  $\nu$  satisfaisant (2.11) sera alors appelée une normale semiperméable.

Si  $\mathcal{B}$  est partout  $\mathcal{C}^1$ , une loi de feedback  $U = \hat{\phi}(\hat{X})$  satisfaisant (2.11) détermine un champ de vitesses  $F(\hat{X}, \hat{\phi}(\hat{X}))$  tangent à  $\mathcal{B}$ , et si ce champ est intégrable, des trajectoires qui restent sur  $\mathcal{B}$ . Montrer que le long de ces trajectoires, les équations:

$$\frac{d\nu(X(t))}{dt} = - \left[ \nu, \frac{\partial F}{\partial X}(X, \hat{\phi}(X)) \right] \quad (2.14)$$

fournissent un vecteur  $\nu(X)$  normal à  $\mathcal{B}$  est un exercice classique d'analyse (voir le raisonnement esquissé plus loin pour les propriétés (2.24)-(2.25)). L'équation (2.11) a la forme d'une équation d'Hamilton-Jacobi dont (2.14) est l'équation aux caractéristiques, ou équation d'Euler. Nous reviendrons sur cette interprétation plus loin, dans le cadre des conditions suffisantes.

2.2.2. Il est clair que (2.11)-(2.14) ne peut être considéré comme une véritable condition nécessaire, car ces équations sont établies sous l'hypothèse que  $\mathcal{B}$  est partout  $\mathcal{C}^1$ , ce qu'on ne sait pas démontrer a priori. Une authentique condition nécessaire peut être obtenue par une technique du type "principe du maximum de Pontryaguine", ou encore dans le cas présent, de la façon suivante.

Notons:

$$\mathcal{X}[X_0, \hat{U}(\cdot)](t) = \hat{X}(t) \quad (2.15)$$

la trajectoire issue de  $X_0$  et engendrée par une commande  $\hat{U}(\cdot)$ . Nous supposons que  $X_0 \in \mathbf{X}_-$ , et que cette trajectoire est *maximale*, ce qui signifie que toute trajectoire issue de  $X_0$  touche  $\Gamma$  au plus tard à l'instant  $\hat{t}$ , premier instant où  $\hat{X}(\hat{t}) \in \Gamma$ . On montre alors dans l'Appendice que, sous l'hypothèse supplémentaire que le point  $X_0$  est *normal*, l'application tangente:

$$V(\cdot) \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial U(\cdot)}[X_0, \hat{U}(\cdot)] \cdot V(\cdot) \quad (2.16)$$

est non surjective et plus précisément, en notant  $\hat{\nu}$  la normale extérieure à  $\mathcal{C}$  en  $\hat{X}(\hat{t})$ , que:

$$\left[ \hat{\nu}, \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial U(\cdot)}[X_0, \hat{U}(\cdot)].V(\cdot) \right] = 0 \quad \forall V(\cdot) . \quad (2.17)$$

En notant  $\Phi(t, t_0)$  la matrice de transition associée à l'équation aux variations:

$$\delta \dot{X} = \frac{\partial F}{\partial X}(\hat{X}(t))\delta X , \quad (2.18)$$

il est classique d'écrire (2.17) sous la forme:

$$\left[ \hat{\nu}, \int_0^{\hat{t}} \Phi(\hat{t}, t) \frac{\partial F}{\partial U}(\hat{X}(t), \hat{U}(t)).V(t) dt \right] = 0 . \quad (2.19)$$

Alors, par une technique de localisation classique, et pour tout point  $t$  où  $\hat{U}(t)$  est continue:

$$\left[ \hat{\nu}, \Phi(\hat{t}, t) \frac{\partial F}{\partial U}(\hat{X}(t), \hat{U}(t)) \right] = 0 . \quad (2.20)$$

Posant alors  $\nu(t) = \Phi^*(\hat{t}, t)\hat{\nu}$  et  $H(X, U, \nu) = [\nu, F(X, U)]$ , on obtient les conditions nécessaires:

$$\frac{\partial H}{\partial U}(\hat{X}, \hat{U}, \nu) = 0 , \quad (2.21)$$

$$\frac{d\nu}{dt} = - \left[ \nu, \frac{\partial F}{\partial X}(\hat{X}, \hat{U}) \right] , \quad \nu(\hat{t}) = \hat{\nu} . \quad (2.22)$$

La condition (2.21) n'est qu'une condition de stationnarité; le fait que  $\hat{U}$  doive maximiser  $H$  (et non le minimiser, par exemple) découle facilement de l'interprétation géométrique ci-dessus.

2.2.3. Venons-en enfin à l'aspect condition suffisante. Soit  $\mathcal{E}$  la frontière de  $\Gamma_-$  sur  $\Gamma$ . Supposons que  $\mathcal{E}$  soit une variété différentiable, admettant localement une paramétrisation de la forme:

$$\mathcal{E} = \{X, X = \xi(s), s \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n-2}\}. \quad (2.23)$$

En tout point de  $\mathcal{E}$ , la normale  $n(\xi(s))$  extérieure à  $C$  sur  $\Gamma$  est une normale semipermeable. Pour tout  $s \in \Omega$ , intégrons dans le sens rétrograde le système (2.4)-(2.14), en choisissant pour  $U(t) = \hat{\phi}(X(t))$  un argument du maximum (2.11), et avec  $X(\hat{t}) = \xi(s)$ ,  $\nu(\hat{t}) = n(\xi(s))$  pour conditions finales (en supposant ceci possible). On construit ainsi une famille de solutions  $X = \tilde{X}(t, s)$ ,  $\nu = \tilde{\nu}(t, s)$ . C'est à nouveau un exercice d'analyse élémentaire de vérifier que les propriétés:

$$[\tilde{\nu}, F(\tilde{X}, \hat{\phi}(\tilde{X}))] = [\tilde{\nu}, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}] = 0, \quad (2.24)$$

$$[\nu, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial s}] = 0, \quad (2.25)$$

sont vérifiées (en montrant que les dérivées en  $t$  des membres de gauche de ces égalités le long de chaque trajectoire sont nulles). Ainsi  $\nu = \tilde{\nu}(t, s)$  est bien la normale en  $\tilde{X}(t, s)$  à la variété  $\mathcal{B}$  de dimension  $n - 1$  ainsi construite. Et puisque  $U = \hat{\phi}(\tilde{X})$  donne bien le maximum dans (2.11), la condition nécessaire de semipermeabilité est satisfaite.

Il reste à montrer que la variété  $\mathcal{B}$  est effectivement semipermeable: il se pourrait en effet qu'outre la trajectoire qui reste sur la variété ainsi construite, il existe une autre trajectoire tangente à  $\mathcal{B}$  qui la traverse (voir Figure 2).

INSERER FIGURE 2

Imaginons que  $C$  est plongé dans une famille d'ensembles emboîtés  $\mathcal{C}_\lambda$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  (disons que  $C = \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_\lambda$  pour  $\lambda > 0$ ), pour lesquels les conditions de régularité de  $\mathcal{E}_\lambda$  soient préservées,  $\mathcal{E}_\lambda$  dépendant de manière  $\mathcal{C}^1$  de  $\lambda$ . Alors, par le théorème de dépendance régulière des solutions d'équations différentielles par rapport à leur condition initiale (et sous réserve que  $\hat{\phi}$  soit  $\mathcal{C}^1$ , ce qui sera garanti par un théorème de fonction implicite appliqué à (2.13) si  $F$  est supposé  $\mathcal{C}^2$  par exemple), on construit au moins localement au voisinage de  $\mathcal{E}_0$  une famille  $\mathcal{C}^1$  de variétés du type  $\mathcal{B}_\lambda$ , et une loi  $U = \hat{\phi}(X) \mathcal{C}^1$  dans un voisinage de la variété  $\mathcal{B}_0$ . Cette construction assure, par l'unicité de la solution de l'équation différentielle  $\dot{X} = F(X, \hat{\phi}(X))$ , le caractère semipermeable des variétés  $\mathcal{B}_\lambda$ .

Remarquons au passage que nous avons, ce faisant, résolu en “feedback” (localement) le problème de maximiser  $\lambda$  correspondant à la cible  $\mathcal{C}_\lambda$  atteinte par la trajectoire (voir Remarque 2 ci-dessous). Cette construction est l'équivalent, en termes “qualitatifs”, de la théorie de Hamilton-Jacobi-Carathéodory du calcul des variations (voir [PB]).

### 3. CALCUL DE LA BARRIERE

Nous allons voir que les rappels qui précèdent s'appliquent au problème de “fuite” du fugitif  $F$  exposé dans la section 2.1.

Commençons par une remarque: si la position initiale  $F_0$  du fugitif est située à l'extérieur de la demi-bande  $S = \{(x, y), x > 0, |y| < L_0\}$ , il suffit au fugitif de conserver sa position (i.e. de choisir la stratégie  $w \equiv 0$ ) pour ne pas être entendu. Si  $F_0 \in S$ , le fugitif va chercher à gagner l'extérieur de  $S$ , en se déplaçant à la vitesse maximale qui lui permette de ne pas être entendu; on a donc (tant que  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq L_0$ ):

$$w = \min \left[ \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - L_0}{\tau}, W \right] . \quad (3.1)$$

Le problème se simplifie donc: il reste une seule variable de commande, le cap  $\theta$  du fugitif, et l'état  $(x, y)$  satisfait le système:

$$\begin{cases} \dot{x} = w(x, y) \cos \theta - V , & x(0) = x_0 , \\ \dot{y} = w(x, y) \sin \theta , & y(0) = y_0 , \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $w(x, y)$  est donnée par (3.1). La “capture” a évidemment lieu lorsque  $w = 0$  (sinon,  $F$  réduit sa vitesse pour ne pas être entendu): la cible  $\mathcal{C}$  est donc le disque centré à l'origine et de rayon  $L_0$ . Soit  $\Gamma$  son cercle frontière.

En posant  $(x, y) = \vec{X}$ ,  $\vec{\nu} = (\nu_x, \nu_y)$ , on obtient l'hamiltonien:

$$H(\vec{X}, \theta, \vec{\nu}) = w(\vec{X})[\nu_x \cos \theta + \nu_y \sin \theta] - V \nu_x . \quad (3.3)$$

Puisque  $w(\vec{X})$  est nulle si  $\vec{X} \in \Gamma$ , on en déduit que la partie utile de  $\Gamma$  est  $\Gamma_- = \{(x, y) \in \Gamma, x > 0\}$ , et que la normale à  $\Gamma$  aux points  $A = (0, L_0)$  et  $A' = (0, -L_0)$  est semi-perméable (avec les notations de la section 2.2.3., on a  $\mathcal{E} = \{A, A'\}$ ; voir figure 3).

INSERER FIGURE 3

En posant  $\nu = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$ , et  $\bar{H}(\vec{X}, \vec{\nu}) = H(\vec{X}, \bar{\theta}, \vec{\nu}) = \max_{\theta} H(\vec{X}, \theta, \vec{\nu})$ , on obtient facilement:

$$\cos \bar{\theta} = \frac{\nu_x}{\nu}, \quad \sin \bar{\theta} = \frac{\nu_y}{\nu}, \quad (3.4)$$

$$\bar{H}(\vec{X}, \vec{\nu}) = w(\vec{X})\nu - V\nu_x. \quad (3.5)$$

On en déduit l'équation des courbes semi-perméables (analogue à (2.11)):

$$w(\vec{X})\nu - V\nu_x = 0. \quad (3.6)$$

où  $w(\vec{X})$  est donnée par (3.1), et où  $\vec{\nu}$  est la normale à la courbe semi-perméable.

D'après la section 2.2, la courbe semi-perméable passant par le point  $A$  est aussi obtenue en intégrant dans le sens rétrograde le système (2.4)-(2.14), qui s'écrit ici:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} = -\nu \frac{\partial w}{\partial x}, & \nu_x(0) = 0, \\ \dot{y} = -\nu \frac{\partial w}{\partial y}, & \nu_y(0) = 1, \\ \dot{x} = w(x, y) \frac{\nu_x}{\nu} - V, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = w(x, y) \frac{\nu_y}{\nu}, & y(0) = L_0. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

En fait, l'expression (3.1) de  $w$  n'est pas continûment dérivable. Dans une région où  $w < W$ , ce qui s'écrit aussi  $\sqrt{x^2 + y^2} = r < L_0 + \tau W$ , on a  $w = \tau^{-1}(r - L_0)$  et le système (3.7) s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} = -\frac{x}{\tau r} \nu, & \nu_x(0) = 0, \\ \dot{y} = -\frac{y}{\tau r} \nu, & \nu_y(0) = 1, \\ \dot{x} = \frac{r - L_0}{\tau} \frac{\nu_x}{\nu} - V, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = \frac{r - L_0}{\tau} \frac{\nu_y}{\nu}, & y(0) = L_0. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

A l'opposé, dans une région où  $r > L_0 + \tau W$  une courbe semi-perméable est portée par une droite dont la normale  $\vec{\nu}$  vérifie  $\frac{\nu_x}{\nu} = \frac{W}{V}$  d'après (3.1) et (3.6). En pratique, on peut calculer la courbe semi-perméable  $\mathcal{B}$  issue de  $A$  en intégrant dans le sens rétrograde le système (3.8); si

l'on atteint un point  $\vec{X}(t_0)$  où  $r(t_0) = L_0 + \tau W$ , on raccorde (de façon  $\mathcal{C}^1$ ) la courbe avec une demi-droite normale à  $\vec{V}(t_0)$  (voir la section 4 ci-dessous).

Plusieurs propriétés de la courbe ainsi construite sont démontrées dans la section 4. En particulier, on montre que la courbe  $\mathcal{B}$  coupe l'axe  $y = 0$  en un point  $B$  d'abscisse positive. Il est alors clair que l'arc  $AB$  et l'arc  $A'B$  symétrique par rapport à l'axe  $y = 0$ , sont des barrières pour le problème considéré. Si la position initiale  $F_0$  du fugitif est située à l'intérieur du domaine  $\mathcal{D}$  délimité par ces deux courbes et par le demi-cercle  $\Gamma_+$  (voir figure 3), il sera nécessairement entendu par le poursuivant  $P$ ; si  $F_0$  est situé à l'extérieur de ce domaine, le fugitif pourra s'échapper (on note désormais  $\mathcal{D}$  au lieu de  $\mathbf{X}_-$  pour simplifier). Dans le cas limite où  $F_0$  est situé sur un des arcs  $AB$  ou  $A'B$ , le fugitif pourra s'échapper en se déplaçant le long de la trajectoire barrière jusqu'au point  $A$  (ou  $A'$ ) où il arrivera avec une vitesse nulle: il devra donc choisir à chaque instant le cap optimal  $\bar{\theta}$  et la vitesse optimale  $w(\vec{X})$ , sous peine d'être entendu. Si la position initiale  $F_0$  coïncide avec le point  $B$ , le fugitif peut choisir de s'échapper soit dans la direction des  $y$  positifs (vers  $A$ ) soit dans la direction des  $y$  négatifs (vers  $A'$ ).

Les figures 4 à 7 montrent l'allure de la barrière et du domaine  $\mathcal{D}$  d'où la fuite est impossible, pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha = \frac{\tau V}{L_0}$  et  $\beta = \frac{W}{V}$ . Le calcul de la barrière est effectué en résolvant le système différentiel (3.8) par un schéma explicite (Euler ou Runge-Kutta).

INSERER FIGURES 4 A 7

#### 4. ETUDE MATHEMATIQUE DE LA BARRIERE

Nous allons dans cette section mettre en évidence de façon mathématiquement rigoureuse quelques propriétés qualitatives de la barrière  $\mathcal{B} = AB$  et de la "fuite optimale" du fugitif  $F$  le long de cette barrière.

Etudions donc la courbe  $\mathcal{B}'$  donnée par le système différentiel (3.8), et qui porte au moins une partie de la barrière  $\mathcal{B}$ . Plutôt que d'étudier le système (3.8), nous allons utiliser la caractérisation de la barrière par l'intégrale première (3.6):

$$w = \frac{r - L_0}{\tau} = V \frac{\nu_x}{\nu} . \quad (4.1)$$

D'après (3.8), la barrière est au voisinage du point  $A$  une courbe régulière (au moins  $\mathcal{C}^1$ ) se dirigeant vers la région  $x > 0$ , et qui admet en  $A$  une tangente horizontale. Par conséquent,

la courbe  $\mathcal{B}'$  (ou une portion de cette courbe) peut être décrite sous la forme  $y = f(x)$ , pour  $x$  appartenant à un intervalle de la forme  $[0, \hat{x}]$ . En utilisant cette description  $y = f(x)$ , et en exprimant  $\nu_x$  et  $\nu$  en fonction de  $f$  et  $f'$ , on peut réécrire (4.1) sous la forme:

$$\sqrt{x^2 + f^2} = L_0 - \frac{\tau V f'}{\sqrt{1 + f'^2}} . \quad (4.2)$$

Pour simplifier l'exposé, nous utiliserons à partir de maintenant des variables adimensionnées (l'unité de longueur est choisie égale à  $L_0$ ). Posons  $\alpha = \frac{\tau V}{L_0} > 0$ , paramètre sans dimension. On obtient alors l'équation différentielle non linéaire:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + f^2} = 1 - \frac{\alpha f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \text{ pour } x \in [0, \hat{x}] , \\ f(0) = 1 . \end{cases} \quad (4.3)$$

Nous avons conservé les notations  $x$  et  $f(x) = y$  pour les coordonnées adimensionnées. Avec ces variables, l'inégalité  $r < L_0 + \tau W$ , équivalente à  $w < W$ , s'écrit:  $r < 1 + \alpha\beta$ , avec  $\beta = \frac{W}{V}$ .

Nous allons montrer le résultat suivant:

**PROPOSITION 2:**

On suppose  $\alpha > 0$ . Soit  $f$  une solution de (4.3) sur un intervalle maximal  $[0, \hat{x}]$ . Alors:

$$f \in \mathcal{C}^\infty([0, \hat{x}], \mathbb{R}) , \quad (4.4)$$

$$1 < \hat{x} \leq 1 + \alpha , \quad (4.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f'(x) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = \hat{y} \leq 0 , \quad \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2} = (1 + \alpha) , \quad (4.6)$$

$$\forall x \in ]0, \hat{x}[ , \quad f'(x) < 0 , \quad f''(x) < 0 , \quad \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + f^2} > 0 . \quad (4.7)$$

Avant de démontrer ces propriétés, examinons leur signification et leurs conséquences. L'inégalité  $\hat{y} \leq 0$  montre que la courbe  $\mathcal{B}'$  donnée par (4.3) croise effectivement l'axe  $y = 0$  en un point  $B'$ . Si sur la portion  $AB'$  de cette courbe, on a toujours  $r = \sqrt{x^2 + f^2} < 1 + \alpha\beta$ , la courbe  $AB'$  est la barrière  $\mathcal{B}$  cherchée. Si au contraire il existe un point  $C$  situé sur la courbe  $AB'$ , tel que:

$$r_C = 1 + \alpha\beta \quad (4.8)$$

(et donc  $r < 1 + \alpha\beta$  sur l'arc  $AC$ ,  $r > 1 + \alpha\beta$  sur l'arc  $CB'$  d'après (4.7)), la barrière  $\mathcal{B}$  est constituée de l'arc  $AC$  raccordé à un segment de droite  $CB$ , de pente  $f'(x_C)$ , et le long duquel on a:

$$\frac{\nu_x}{\nu} = \text{Constante} = \beta ; \quad (4.9)$$

la barrière est alors seulement  $\mathcal{C}^1$  (voir figures 7 et 8). Dans ce cas (qui ne peut se produire que si  $\beta < 1$  d'après (4.6)-(4.9)), il résulte de (4.7) que  $x_B > x_{B'}$ , et le domaine délimité par la courbe  $ACB$  et les axes de coordonnées comprend strictement le domaine délimité par les axes et la courbe  $ACB'$  (voir figure 8). L'interprétation de cette propriété est évidente: tous les autres paramètres restant inchangés (i.e.  $\alpha$  étant fixé), il est intuitivement clair que le domaine  $\mathcal{D}$  à partir duquel le fugitif  $F$  n'a aucune chance de s'échapper sans être entendu s'étend lorsque l'on diminue sa vitesse maximale  $W$ . Dans tous les cas (que la barrière  $\mathcal{B}$  soit simplement portée par la courbe  $\mathcal{B}'$  ou qu'elle comprenne un segment de droite  $CB$  vérifiant (4.9)), le domaine  $\mathcal{D}$  est convexe d'après (4.7).

INSERER FIGURE 8

Revenons au cas où  $x_B < 1 + \alpha\beta$ , c'est-à-dire où toute la courbe  $AB$  est barrière (les propriétés qui suivent s'étendent facilement au cas où  $x_B > 1 + \alpha\beta$ ). Nous avons déjà dit que, si sa position initiale est située sur la barrière, la "fuite optimale" du fugitif consiste à se déplacer sur la barrière, en choisissant sa vitesse et son cap selon (3.1) et (3.4). En particulier, (3.4) montre que la direction de la vitesse de  $F$  est normale à la barrière. Les propriétés (4.1) et (4.7) montrent que, au cours de cette fuite optimale:

- (i) le fugitif s'éloigne constamment de l'axe  $y = 0$ ,
- (ii) sa distance au poursuivant décroît constamment,
- (iii) sa vitesse décroît constamment,
- (iv) son cap  $\bar{\theta} \in ]0, \frac{\pi}{2}]$  croît constamment,

toutes ses propriétés étant conformes à l'intuition. Si au lieu d'observer le mouvement de  $F$  dans un repère lié au poursuivant, on se place dans un repère absolu, on obtient pour un fugitif situé initialement en  $B$  et choisissant de fuir dans la direction des  $y > 0$  la trajectoire indiquée sur la figure 9; au point  $B$ , cette trajectoire est perpendiculaire à la barrière  $\mathcal{B}$ ; lorsque le fugitif arrive en  $\tilde{A}$  (où la tangente à la trajectoire est verticale), avec une vitesse qui tend vers 0 (mais au bout d'un temps fini!), le poursuivant est situé en  $\tilde{P}$ , projection de  $\tilde{A}$  sur l'axe  $y = 0$ .

INSERER FIGURE 9

L'estimation  $x_B = r(x_B) < 1 + \alpha$ , (c'est-à-dire  $x_B < L_0 + \tau V$  en variables dimensionnées) peut également s'interpréter. Supposons pour cela que le fugitif dispose des mêmes capacités

de détection que le poursuivant, c'est-à-dire que  $F$  entend  $P$  dès que la distance qui les sépare est inférieure à  $L_0 + \tau V$ . Si au début du "jeu",  $P$  et  $F$  sont très éloignés l'un de l'autre, et si ils se dirigent l'un vers l'autre, le fugitif entendra le poursuivant avant d'être entendu pourvu qu'il se déplace plus lentement ( $w < V$ ). L'inégalité  $x_B < L_0 + \tau V$  (qui implique d'après (4.7) que la distance à l'origine  $P$  de tout point de  $\mathcal{D}$  est inférieure à  $L_0 + \tau V$ ) nous apprend alors que, à l'instant où  $F$  entend  $P$ , il n'est pas dans le domaine  $\mathcal{D}$  d'où la fuite est impossible: il pourra donc s'échapper.

Avant de démontrer la proposition, signalons enfin que toutes les propriétés (4.4)-(4.7) sont bien conformes aux résultats numériques obtenus à la section précédente; en poursuivant l'intégration numérique au delà du point  $B$  dans le domaine  $y < 0$ , on peut même "vérifier" la dernière égalité (4.6) avec une erreur inférieure à  $10^{-6}$ ; le point  $(\hat{x}, \hat{y})$  est un point singulier où la courbe donnée par le système différentiel (3.8) a une tangente verticale et au delà duquel elle se dirige vers la région  $y > 0$  (et n'est plus décrite par (4.2)).

Venons en maintenant à la démonstration de la proposition, qui utilise des arguments simples et classiques en théorie des équations différentielles ordinaires:

Démonstration de la proposition 2:

Etape 1: Puisque la fonction  $z \rightarrow \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$  est dérivable et strictement monotone, il est clair que la solution  $f$  de (4.3) est  $C^\infty$  sur  $[0, \hat{x}[$ . On peut alors dériver (4.3) pour obtenir:

$$r' = \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + f^2} = \frac{x + f f'}{r} = -\frac{\alpha f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}, \quad (4.10)$$

d'où:

$$(x + f f')(1 + f'^2)^{3/2} = -\alpha f'' \sqrt{x^2 + f^2}, \quad (4.11)$$

qui donne  $f''(0) = 0$  (car  $f'(0) = 0$ ). En dérivant encore cette relation, on a:

$$-\alpha f''' r - \alpha f'' r' = 2\sqrt{1 + f'^2}[(1 + f'^2)^2 + f f''(1 + f'^2) + 3f f'' f'^2 + 3x f' f''] , \quad (4.12)$$

d'où l'on tire  $f'''(0) = -\alpha^{-1} < 0$ . Pour un nombre positif  $\epsilon$  suffisamment petit, on a donc, si  $x \in ]0, \epsilon[$ :

$$f''(x) < 0, \quad f(x) < 1, \quad r'(x) > 0, \quad r(x) > 1, \quad (4.13)$$

en utilisant (4.10).

Etape 2: Montrons que  $r' > 0$  sur tout l'intervalle maximal  $]0, \hat{x}[$ .

Supposons qu'il existe  $x_1 > 0$  tel que  $r'(x_1) = 0$ . En prenant pour  $x_1$  le plus petit réel strictement positif où  $r'$  s'annule, on peut écrire, pour  $x \in ]0, x_1[$ :

$$r'(x) > 0, \quad r(x) > 1 \quad (4.14)$$

d'après (4.13), et:

$$f''(x) < 0 \quad (4.15)$$

d'après (4.10). Par ailleurs, on a aussi  $f''(x_1) = 0$  d'après (4.10), et  $f'''(x_1) < 0$  d'après (4.12), ce qui contredit (4.15).

On a donc  $r'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, \hat{x}[$ , d'où aussi  $r(x) > 1$ ,  $f'(x) < 0$  d'après (4.3) et  $f''(x) < 0$  par (4.10).

Etape 3: Il est clair d'après (4.3) que  $r(x) < 1 + \alpha$  pour  $x \in ]0, \hat{x}[$ ;  $\hat{x}$  est donc borné et satisfait (4.5). Puisque l'intervalle maximal sur lequel existe la solution de (4.3) est borné, et que  $f$  est également bornée, on déduit des résultats généraux sur les équations différentielles que:

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} |f'(x)| = +\infty, \quad (4.16)$$

soit:

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f'(x) = -\infty. \quad (4.17)$$

Comme  $f$  est monotone et bornée, on peut poser  $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = \hat{y} \in \mathbb{R}$ . Si  $\hat{y} > 0$ , alors  $f(x) > \hat{y} \forall x \in [0, \hat{x}[$ , et (4.10) et l'étape 2 impliquent  $x + f f' > 0$ , d'où  $f' > -\frac{x}{f}$  ce qui contredit (4.17). On a donc  $\hat{y} \leq 0$ , ce qui achève la démonstration.

Nous pouvons également démontrer une autre propriété qualitative conforme à l'intuition, dont la formulation mathématique est l'objet des deux lemmes suivants. Il s'agit d'étudier comment la barrière  $\mathcal{B}$  dépend des deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

**LEMME 3:**

Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux réels positifs, avec  $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ . Soit  $f_1$  (respectivement:  $f_2$ ) la solution du problème (4.3) dans lequel on a remplacé  $\alpha$  par  $\alpha_1$  (resp.:  $\alpha_2$ ), définie sur un intervalle maximal  $[0, \hat{x}_1[$  (resp.:  $[0, \hat{x}_2[$ ). Alors:  $\hat{x}_2 > \hat{x}_1$ , et pour tout  $x \in [0, \hat{x}_1[$ ,  $f_1(x) < f_2(x)$ .

**LEMME 4:**

Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ , et  $\beta_2$  quatre réels positifs. On considère les barrières  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  associées respectivement à  $(\alpha_1, \beta_1)$  et  $(\alpha_2, \beta_2)$ , et les domaines  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  délimités par ces barrières (domaines d'où la fuite est impossible).

On suppose que  $\alpha_1 < \alpha_2$  et  $\beta_1 \geq \beta_2$ ; alors:

$$\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 . \quad (4.18)$$

Démonstration du lemme 3: D'après (4.12), on a  $f'''_2(0) > f'''_1(0)$ , ce qui implique  $f_2 > f_1$  sur un intervalle  $]0, \epsilon[$  pour  $\epsilon$  assez petit. Soit alors  $\tilde{x}$  le premier point (s'il existe) tel que  $f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x})$ . On a alors (avec des notations évidentes)  $r_1(\tilde{x}) = r_2(\tilde{x})$ , d'où:

$$1 - \frac{\alpha_1 f'_1(\tilde{x})}{\sqrt{1 + f'^2_1(\tilde{x})}} = 1 + \frac{\alpha_1 |f'_1(\tilde{x})|}{\sqrt{1 + f'^2_1(\tilde{x})}} = 1 + \frac{\alpha_2 |f'_2(\tilde{x})|}{\sqrt{1 + f'^2_2(\tilde{x})}} . \quad (4.19)$$

On en déduit:

$$\frac{|f'_1(\tilde{x})|}{\sqrt{1 + f'^2_1(\tilde{x})}} > \frac{|f'_2(\tilde{x})|}{\sqrt{1 + f'^2_2(\tilde{x})}} , \quad (4.20)$$

car  $f'_1(\tilde{x}) \neq 0$ ,  $f'_2(\tilde{x}) \neq 0$ . Cette dernière inégalité implique  $|f'_1(\tilde{x})| > |f'_2(\tilde{x})|$ , c'est-à-dire  $f'_1(\tilde{x}) < f'_2(\tilde{x}) < 0$ , ce qui contredit les hypothèses  $f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x})$ ,  $f_2 - f_1 > 0$  sur  $]0, \tilde{x}[$ .

On a donc  $f_2(x) > f_1(x)$ , pour tout  $x < \min(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . Pour achever la démonstration, supposons  $\hat{x}_2 \leq \hat{x}_1$ . On a alors:

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}_2} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow \hat{x}_2} f_2(x) = \hat{y}_2 \leq 0 . \quad (4.21)$$

Il vient alors:

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}_2} r_1(x) \geq \sqrt{\hat{y}_2^2 + \hat{x}_2^2} = 1 + \alpha_2 . \quad (4.22)$$

Mais, comme  $\hat{x}_2 \leq \hat{x}_1$ , (4.6) et (4.7) impliquent:

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}_2} r_1(x) \leq 1 + \alpha_1 , \quad (4.23)$$

d'où une contradiction.

Démonstration du lemme 4: Si chacune des barrières  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est uniquement constituée d'un arc des courbes  $y = f_1(x)$  et  $y = f_2(x)$  (les barrières ne dépendent alors pas de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ ), le résultat cherché est donné par le lemme 3. Si au contraire une des barrières comprend un segment de droite, la propriété (4.18) est encore vraie et se démontre facilement en utilisant (4.8) et (4.9); nous en laissons la vérification au lecteur.

En revenant aux définitions de  $\alpha = \frac{\tau V}{L_0}$  et  $\beta = \frac{W}{V}$ , on voit dans quelle mesure le résultat (4.18) est conforme à l'intuition. Si,  $L_0$ ,  $V$  et  $W$  étant constants, on augmente  $\tau$ , accroissant par là la distance à laquelle le fugitif est entendu pour une vitesse  $w$  donnée, on étend le domaine  $\mathcal{D}$  à partir duquel la fuite est impossible. Si de la même façon, en gardant  $L_0$  et  $\tau$  constants, on augmente la vitesse  $V$  du poursuivant d'un facteur  $\gamma = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 1$  sans accroître la vitesse maximale  $W$  du fugitif d'un facteur supérieur à  $\gamma$ , on étend aussi le domaine  $\mathcal{D}$ . Il faut toutefois se garder d'interpréter le résultat (4.18) en disant que le domaine  $\mathcal{D}$  d'où le fugitif ne peut s'enfuir s'étend lorsque l'on diminue  $L_0$  en gardant constants tous les autres paramètres; en effet, les domaines  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  apparaissant dans (4.18) sont situés dans le plan des coordonnées adimensionnées, l'unité de longueur étant précisément égale à  $L_0$ .

**REMARQUE 1:** Il n'est pas difficile de vérifier que les propriétés qualitatives énoncées précédemment restent vraies sous des hypothèses plus générales. On peut par exemple utiliser un critère de capture du type (2.2), avec une fonction  $L(w)$  continue de la forme:

$$L(w) = \begin{cases} L_0 & \text{si } 0 \leq w \leq w_0, \\ \mathcal{L}(w) & \text{si } w_0 \leq w \leq W, \end{cases} \quad (4.24)$$

avec  $\mathcal{L}(w_0) = L_0$  et  $\mathcal{L}$  strictement croissante. L'utilisation de (4.27) avec  $w_0 > 0$  correspond à une situation où le bruit émis par le fugitif est indépendant de sa vitesse pour des faibles valeurs de celles-ci. On vérifie facilement que les propriétés présentées ci-dessus sont encore vérifiées dès que  $\mathcal{L}'(w_0) > 0$  (ou même que  $\mathcal{L}^{(p)}(w_0) = 0$  pour  $1 \leq p \leq n - 1$  et  $\mathcal{L}^{(n)}(w_0) > 0$ ).

**REMARQUE 2:** Comme annoncé à la fin de la section 2.2, on peut, en construisant une famille de courbes analogues à  $\mathcal{B}$ , obtenir les trajectoires optimales pour le problème de fuite où le poursuivant, au lieu de chercher à être entendu le plus tard possible, cherche à être situé le plus loin possible de l'axe  $x'Ox$  au moment où il est entendu.

## 5. CONCLUSION

L'étude précédente, très simple du point de vue mathématique, permet de démontrer pour le problème simple de "poursuite" que l'on a considéré toutes les propriétés qualitatives que suggère l'intuition. Mais il présente surtout l'intérêt de pouvoir définir et calculer le domaine  $\mathcal{D}$  à partir duquel le fugitif ne peut s'échapper sans être détecté, ainsi que la stratégie optimale de fuite le long de la barrière. Si à un instant au cours de la "poursuite" le fugitif se trouve sur la barrière, il sera inmanquablement entendu par le poursuivant s'il ne choisit

pas à chaque instant sa vitesse et son cap selon la stratégie optimale donnée par le système différentiel (3.8).

Il serait bien sûr intéressant d'étendre ces résultats en étudiant des situations plus réalistes où le poursuivant peut modifier sa vitesse, ou même sa direction. Il s'agira alors d'un véritable problème de jeux différentiels.

## ANNEXE: COMMADABILITE ET VIABILITE

Nous rassemblons ici quelques remarques sur des questions de commandabilité et viabilité motivées par l'étude abstraite de la barrière  $\mathcal{B}$  présentée dans la section 2.2.

Nous considérons une équation différentielle:

$$\dot{X} = F(X, U) \quad (A.1)$$

dans  $\mathbb{R}^n$ , où  $U \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$  est une commande. On supposera toujours que  $F$  est  $\mathcal{C}^2$ , avec une condition de croissance assurant l'existence de solutions globales de (A.1) pour tout  $U(\cdot) \in \Omega$ , ensemble des fonctions mesurables de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathcal{U}$ , sous ensemble convexe de  $\mathbb{R}^p$ .

Une *cible*  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  est donnée, et on appelle  $\mathcal{D}$  son complémentaire, ou *domaine* du problème. On considère deux problèmes voisins, dont les difficultés sont étonnamment différentes:

\* *Commandabilité*: est-il possible, depuis  $X(0) = X_0$ , "d'atteindre la cible" ?

\* *Viabilité*: est-il possible, depuis  $X(0) = X_0$ , "d'éviter la cible", c'est-à-dire de rester dans  $\mathcal{D}$  ?

Soit donc  $\mathbf{X}^+$  l'ensemble des positions initiales  $X_0$  à partir desquelles il est possible d'atteindre la cible:

$$\mathbf{X}^+ = \{X_0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists U(\cdot), \exists t, X(t) \in \mathcal{C}\}, \quad (A.2)$$

et  $\mathbf{X}^-$  l'ensemble des positions initiales à partir desquelles il est impossible d'éviter la cible:

$$\mathbf{X}^- = \{X_0 \in \mathbb{R}^n \mid \forall U(\cdot), \exists t, X(t) \in \mathcal{C}\}. \quad (A.3)$$

L'objectif de cette note est de caractériser les points frontière de  $\mathbf{X}^+$  et  $\mathbf{X}^-$ . Pour cela nous noterons  $X(t) = \mathcal{X}[X_0, U(\cdot)](t)$  la position à l'instant  $t$  sur la trajectoire  $t \mapsto X(t)$  issue de  $X_0$  et "engendrée par la commande  $U(\cdot)$ ".

Pour plus de simplicité, nous ferons des hypothèses différentes sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  dans les deux problèmes considérés.

### A.1. Commandabilité

On suppose  $\mathcal{C}$  ouvert. Soit  $X_0$  un état n'appartenant pas à  $\mathbf{X}^+$  mais tel que, pour une commande  $\hat{U}(\cdot)$ , il existe  $t = \hat{t}(X_0)$  tel que:

$$\mathcal{X}[X_0, \hat{U}(\cdot)](\hat{t}(X_0)) \in \partial\mathcal{C}. \quad (A.4)$$

La trajectoire  $\hat{X}(t)$  engendrée par  $\hat{U}(t)$  sera dite *maximale*, et nous noterons:

$$\hat{t} = \hat{t}(X_0), \quad \hat{X} = \mathcal{X}[X_0, \hat{U}(\cdot)](\hat{t}(X_0)). \quad (\text{A.5})$$

On a alors le résultat suivant:

**PROPOSITION A.1:**

Le point  $X_0$  est sur la frontière de  $\mathbf{X}^+$ .

Démonstration: Par hypothèse,  $X_0$  n'appartient pas à  $\mathbf{X}^+$ . Mais l'application  $X_0 \mapsto \mathcal{X}[X_0, \hat{U}(\cdot)](\hat{t})$  est localement bijective et continue. Donc tout voisinage de  $X_0$  a pour image un ouvert contenant  $\hat{X}$ , et contient donc des points capturés à  $\hat{t}$  par  $\hat{U}(\cdot)$ .

Nous avons alors la caractérisation suivante de tels points.

**PROPOSITION A.2:**

Si la commande  $\hat{U}(t)$  est intérieure à  $\mathcal{U}$  pour tout  $t$ , (en particulier si  $\mathcal{U}$  est ouvert), il existe  $\nu \in \mathbb{R}^n$  tel que:

$$\forall V(\cdot) \in \Omega, \quad \left( \nu, \frac{d\mathcal{X}}{dU}[X_0, \hat{U}(\cdot)]V(\cdot) \right) = 0. \quad (\text{A.6})$$

On suppose que  $\partial\mathcal{C}$  est  $\mathcal{C}^1$  en  $\hat{X}$ , et on note  $\nu$  la normale extérieure à  $\mathcal{C}$  en  $\hat{X}$ ; on a alors:

$$\forall V \in \mathcal{U}, \quad (\nu, F(\hat{X}, V)) \geq 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\forall V(\cdot) \in \Omega, \quad \left( \nu, \frac{d\mathcal{X}}{dU}[X_0, \hat{U}(\cdot)] \cdot (V(\cdot) - \hat{U}(\cdot)) \right) \geq 0. \quad (\text{A.8})$$

Démonstration: Si  $\hat{U}(t)$  est intérieur à  $\mathcal{U}$  pour tout  $t$ , et si  $d\mathcal{X}/dU$  est surjective en  $\hat{U}(\cdot)$ , alors  $\mathcal{X}[U(\cdot)](\hat{t})$  est localement surjective d'un voisinage de  $\hat{U}(\cdot)$  sur un voisinage de  $\hat{X}$  (voir [3]). Alors il existerait des commandes admissibles telles que  $X_0$  soit capturé, contredisant l'hypothèse. Donc  $d\mathcal{X}/dU$  n'est pas surjectif de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Il existe donc une normale non triviale  $\nu$  à son image.

Supposons maintenant que  $\partial\mathcal{C}$  est  $\mathcal{C}^1$  en  $\hat{X}$ , avec  $\nu$  pour normale extérieure. Si il existe  $V \in \mathcal{U}$  tel que  $(\nu, F(\hat{X}, V)) < 0$ , en intégrant la trajectoire un temps positif depuis  $(\hat{X}, \hat{t})$  avec cette commande, on aura, dans un voisinage droit de  $\hat{t}$ ,  $X(t) \in \mathcal{C}$ , contredisant l'hypothèse que  $X_0$  ne peut être capturé. Ce qui démontre (A.7).

On peut même dire plus: si le minimum en  $U$  de  $(\nu, F(X, U))$  est atteint en un  $U$  unique dans un voisinage de  $\hat{X}$ , alors nécessairement ce minimum est nul. En effet, par l'hypothèse d'unicité de l'argument du minimum, et par le théorème de Danskin, la fonction  $\min_U (\nu, F(X, U))$  est dérivable en  $X$ , et donc continue. Alors si ce minimum était positif en  $\hat{X}$  il le serait aussi dans un voisinage, ce qui contredit l'hypothèse que la trajectoire  $\hat{X}(\cdot)$  atteint  $\hat{X}$  de l'extérieur de  $\mathcal{C}$ .

Supposons enfin qu'il existe une commande admissible  $V(\cdot)$  telle que:

$$\left( \nu, \frac{d\mathcal{X}}{dU}[X_0, \hat{U}(\cdot)] \cdot (V(\cdot) - \hat{U}(\cdot)) \right) < 0, \quad (\text{A.9})$$

et considérons la famille de commandes  $V^\theta(\cdot)$  données par:

$$V^\theta(t) = \hat{U}(t) + \theta(V(t) - \hat{U}(t)). \quad (\text{A.10})$$

Du fait de la convexité de  $\mathcal{U}$ , ces commandes sont admissibles pour  $\theta \in [0, 1]$ . Posons  $X^\theta = \mathcal{X}[X_0, V^\theta(\cdot)](\hat{t})$ . On a  $X^0 = \hat{X}$  et  $(\nu, dX^\theta/d\theta) < 0$ . Donc, pour  $\theta$  assez petit positif,  $X^\theta \in \mathcal{C}$ , contredisant l'hypothèse que  $X_0$  ne peut être capturé.

## A.2. Viabilité

On suppose maintenant  $\mathcal{D}$  ouvert ( $\mathcal{C}$  fermé) et toujours  $\mathcal{U}$  convexe.

Soit  $X_0 \in \mathbf{X}^-$  et:

$$\hat{t}(X_0) = \sup\{t \mid \exists U(\cdot) : [0, t] \rightarrow \mathcal{U}, \forall s < t, \mathcal{X}[X_0, U(\cdot)](s) \in \mathcal{D}\}. \quad (\text{A.11})$$

Autrement dit,  $\hat{t}(X_0)$  est la "durée de vie" maximale depuis  $X_0$ .

### DÉFINITION:

Le point  $X_0 \in \mathbf{X}^-$  est dit *normal* s'il existe une trajectoire  $\mathcal{X}[X_0, \hat{U}(\cdot)]$  telle que:

$$\mathcal{X}[X_0, \hat{U}(\cdot)](t) \in \mathcal{D}, \quad \forall t < \hat{t}(X_0). \quad (\text{A.12})$$

Cette trajectoire est alors dite *intérieure maximale*.

Notre objectif est de caractériser de telles trajectoires par une condition nécessaire analogue à la Proposition A.1. Si  $X_0$  est un point normal, et  $\hat{X}(t) = \mathcal{X}[X_0, \hat{U}(\cdot)](t)$  une trajectoire

intérieure maximale, par définition de  $\hat{t}$ ,  $X(t)$  n'appartient plus à  $\mathcal{D}$  pour tout  $t$  supérieur à  $\hat{t}$ . Donc nécessairement  $\hat{X} = X(\hat{t})$  est sur la frontière de  $\mathcal{D}$ . On a alors le résultat suivant:

**PROPOSITION A.3:**

Soit  $X_0$  un point normal, et  $\hat{X}(t) = \mathcal{X}[X_0, \hat{U}(\cdot)](t)$  une trajectoire intérieure maximale. Si  $\partial\mathcal{D}$  est  $\mathcal{C}^1$  en  $\hat{X}$  et admet  $\nu$  pour normale intérieure à  $\mathcal{D}$  (donc, comme précédemment extérieure à  $\mathcal{C}$ ), ou si  $\mathcal{C}$  est localement contenu dans le demi-espace  $\{X | (\nu, X - \hat{X}) \leq 0\}$ , (on dira que  $\mathcal{C}$  est *localement supporté*), on a:

$$\forall V \in \mathcal{U}, \quad \left( \nu, F(\hat{X}, V) \right) \leq 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\forall V(\cdot) \in \Omega, \quad \left( \nu, \frac{d\mathcal{X}}{dU}[X_0, \hat{U}(\cdot)](\hat{t}) \cdot (V(\cdot) - \hat{U}(\cdot)) \right) \leq 0. \quad (\text{A.14})$$

Démonstration: Si  $V \in \mathcal{U}$  est tel que  $(\nu, F(\hat{X}, V)) > 0$ , alors, par continuité, il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\hat{X}$  tel que, à partir de tout point  $\tilde{X} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}$  on peut intégrer l'équation différentielle avec cette commande  $V$  en restant un temps  $\delta t > 0$  dans  $\mathcal{D}$ . En prenant  $\tilde{X} = \mathcal{X}[X_0, \hat{U}(\cdot)](t)$  avec  $t \in (\hat{t} - \delta t/2, \hat{t})$ , on construit ainsi une trajectoire issue de  $X_0$  qui reste dans  $\mathcal{D}$  un temps supérieur à  $\hat{t}$ , ce qui contredit la définition de  $\hat{t}$ .

Dans le cas  $\mathcal{C}^1$ , on peut remarquer comme dans la proposition A.2 que si le maximum en  $V$  de  $(\nu, F(\hat{X}, V))$  est atteint en un point unique de  $\mathcal{U}$ , alors ce maximum est nécessairement nul en  $\hat{X}$ .

Quant à l'inégalité (A.14), sa démonstration repose sur le lemme suivant.

**LEMME A.4:**

Si (A.11) n'a pas lieu, il existe une trajectoire issue de  $X_0$  et intérieure à  $\mathcal{D}$  sur tout l'intervalle fermé  $[0, \hat{t}]$ .

Une fois le lemme démontré, le résultat découle du fait qu'on peut alors prolonger la trajectoire sur un petit intervalle de temps au delà de  $\hat{t}$ .

Démonstration: Pour  $X \in \mathcal{D}$ , notons  $\Delta X$  la distance de  $X$  à  $\mathcal{C}$  dans le cas  $\mathcal{C}^1$ , et de  $X$  à l'hyperplan support dans le cas localement supporté. Dans les deux cas,  $\Delta X$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  de  $X$  dans un voisinage de  $\hat{X}$ . Supposons qu'il existe  $V(\cdot)$  violant (A.14), c'est à dire tel que:

$$V(\cdot) \in \Omega, \quad \left( \nu, \frac{d\mathcal{X}}{dU}[X_0, \hat{U}(\cdot)] \cdot (V(\cdot) - \hat{U}(\cdot)) \right) > 0, \quad (\text{A.15})$$

et posons:

$$V^\theta(t) = \hat{U}(t) + \theta(V(t) - \hat{U}(t)), \quad (\text{A.16})$$

$$X^\theta(t) = \mathcal{X}[X_0, V^\theta(\cdot)](t). \quad (\text{A.17})$$

Par la convexité de  $\mathcal{U}$  et donc de  $\Omega$ ,  $V^\theta$  est une commande admissible et  $X^\theta$  est une trajectoire admissible pour  $\theta \in [0, 1]$ . L'inégalité (A.15) donne:

$$\left( \nu, \frac{dX^\theta(\hat{t})}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \right) > 0, \quad (\text{A.18})$$

d'où:

$$\frac{d\Delta X^\theta(\hat{t})}{d\theta} \Big|_{\theta=0} > 0. \quad (\text{A.19})$$

Mais l'application  $t \mapsto d\mathcal{X}/dU[X_0, U(\cdot)](t)$  est continue, et donc aussi, par la dérivabilité de  $\Delta$ , l'application  $t \mapsto d\Delta X^\theta(t)/d\theta$ . Ainsi il existe  $\epsilon > 0$  tel que:

$$\forall t \in [\hat{t} - \epsilon, \hat{t}], \quad \frac{d\Delta X^\theta(t)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} > 0. \quad (\text{A.20})$$

Donc, pour  $\theta$  suffisamment petit positif,  $X^\theta(t) \in \mathcal{D}$ , pour tout  $t$  dans le segment fermé  $[\hat{t} - \epsilon, \hat{t}]$ .

Mais pour  $t \in [0, \hat{t} - \epsilon]$ , la trajectoire  $\hat{X}(t)$  est intérieure à  $\mathcal{D}$ , et il existe  $\eta$  positif tel que  $d(X(t), \mathcal{C}) \geq \eta$ . Donc, il existe  $\delta$  positif tel que pour  $0 < \theta < \delta$ ,  $X^\theta(t) \in \mathcal{D}$ ,  $\forall t \in [0, \hat{t} - \epsilon]$ . Finalement, pour  $\theta$  positif suffisamment petit, la trajectoire admissible  $X^\theta(t)$  est intérieure à  $\mathcal{D}$  pour tout  $t \in [0, \hat{t}]$ . Le lemme est démontré, et avec lui la proposition.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. M. DANSKIN, *The theory of max-min and its application to weapons allocation problems*, Springer-Verlag, Berlin, (1967).
- [2] G. LEITMANN, *An introduction to optimal control*, McGraw Hill, New-York, (1966).
- [3] J.P. AUBIN et I. EKELAND, *Applied nonlinear analysis*, Wiley, New-York, (1984).