Commande optimale linéaire quadratique des systèmes implicites discrets (*)

Pierre BERNHARD (1), José GRIMM (1) et Xiao-Min WANG (1)

Résumé/*Abstract*

Cet article étudie la commande optimale linéaire quadratique des systèmes implicites à temps discret, c'est-à-dire de la forme $Ex_{k+1} = Fx_k + Gu_k$. Nous n'imposons pas que E et F soient carrées. Ce qui fait que la solution du système peut ne pas exister, et si elle existe n'être pas unique. Nous montrerons que si le système est détectable et stabilisable, l'équation de Riccati admet une unique solution positive semi-définie associée au problème à temps infini. Enfin, nous examinons un problème de filtrage qui se traite bien par dualité avec le problème de commande.

In this paper the linear quadratic optimal regulator for the discrete time implicit system $Ex_{k+1} = Fx_k + Gu_k$, where E and F are not necessary square (i.e. systems for which neither existence nor uniqueness of the solution is guaranteed), is investigated. For the infinite-time case, if the implicit system is stabilizable and detectable, the unique positive semi-definite solution of the implicit Riccati equation exists. The optimal filtering problem for the stochastic implicit system is also studied under an assumption which is dual to the one used in the optimal regulator problem.

Mots clés/*Keywords*

Systèmes implicites ; Programmation dynamique ; Commande optimale ; Systèmes stochastiques ; Filtrage ; Dualité.

Implicit systems ; Dynamic programming ; Optimal control ; Stochastic systems ; Filtering ; Duality.

(*) Reçu en février 1988.

(1) Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2004 route des Lucioles, Sophia-Antipolis, 06565 Valbonne Cedex.

 APII-0296-1598/90/01 17 20/$ 4.00

Introduction

Cet article étudie la commande et le filtrage des systèmes implicites à temps discret, c'est-à-dire de la forme

$$Ex_{k+1} = Fx_k + Gu_k .$$

Pour une motivation et des études de réalisation et d'invariants de tels systèmes, on renvoie le lecteur à [1], [5].

Dans [8], nous avons proposé une solution au problème de la commande optimale quadratique en temps fini d'un système implicite linéaire en temps discret. Notons que, contrairement à la plupart des auteurs, et pas plus que dans le présent article, nous ne supposions que le système implicite fût régulier ($\det (zE - F) \neq 0$). Nous n'imposons même pas que E et F soient carrées. Ainsi, la solution du système peut ne pas exister, et si elle existe n'être pas unique. Il faut donc faire attention à la façon même de poser les problèmes.

La solution de [8] utilise une généralisation de la célèbre équation dite de Riccati, les hypothèses sous lesquelles la solution de cette équation, et du problème, existent étaient, dans les notations du chapitre 2 ci-dessous, $(E \quad G)$ *surjective,* $\begin{pmatrix} F \\ Q \end{pmatrix}$ *injective et* S *positive définie.*

Ajoutons qu'une généralisation de la programmation dynamique y était utilisée sans justification, faute de place.

Ici, nous justifions cette version de la programmation dynamique, et l'utilisons à nouveau pour le même problème. Mais une manipulation un peu plus évoluée des équations nous permet d'établir l'existence et l'unicité sous des hypothèses moins restrictives, et au demeurant très naturelles par leur caractère dual. Ensuite, nous développons la théorie asymptotique, d'une façon très parallèle à la théorie classique pour les systèmes « explicites ». Enfin, pour terminer le parallèle avec la théorie classique, nous examinons un problème de filtrage qui se traite bien par dualité avec le problème de commande.

1. Programmation dynamique pour les systèmes implicites

1.1. Définitions

Un système implicite est constitué de

— une collection d'ensembles X_k, $k = 0, 1, \ldots, N$, appelés espaces d'état,

— une collection d'ensembles U_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, appelés espaces de commande,

— une collection de relations $F_k \subset X_{k+1} \times X_k \times U_k$, appelées relations dynamiques.

Nous appellerons l'indice k le temps, ou le pas de temps.

Une suite $\{x_k\}$, $k = 0, \dots, N$ est appelée une trajectoire d'état (ou trajectoire). Une suite $\{u_k\}$, $k = 0, \dots, N-1$ est appelée une trajectoire de commande (ou fonction de commande, ou commande quand aucune confusion avec un élément u_k isolé n'est possible).

Une paire $\{x_k\}$, $\{u_k\}$ est appelée une bitrajectoire. Elle est dite admissible si

$$\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \quad (x_{k+1}, x_k, u_k) \in F_k .$$

Remarque : Dans les cas classiques, les F_k sont données par l'intermédiaire de fonctions $f_k : X_{k+1} \times X_k \times U_k \to \mathbf{R}^m$, par

$$(x_{k+1}, x_k, u_k) \in F_k \Leftrightarrow f_k(x_{k+1}, x_k, u_k) = 0 . \tag{1.1}$$

Un problème de commande optimale implicite est constitué

— d'un système implicite

— d'un état initial $\xi_0 \in X_0$

— d'un critère spécifié par une collection de fonctions $L_k : X_k \times U_k \to \mathbf{R}$, pour $k = 0, 1, \dots, N-1$, et $L_N : X_N \to \mathbf{R}$.

Pour une bitrajectoire $\{x_k\}$, $\{u_k\}$, on pose

$$J(\{x_k\}, \{u_k\}) = \sum_{k=0}^{N-1} L_k(x_k, u_k) + L_N(x_N) ,$$

le problème est de trouver une bitrajectoire admissible $(\{x_k\}, \{u_k\})$ qui minimise J parmi toutes les trajectoires admissibles commençant en $x_0 = \xi_0$.

La technique classique de la programmation dynamique se généralise immédiatement.

THÉORÈME 1 : *S'il existe une suite de fonctions V_k de X_k dans $\mathbf{R}$ et deux suites de fonctions ϕ_k de X_k dans U_k, ψ_k de X_k dans X_{k+1}, telles que*

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad \forall x \in X_k, \quad (\psi_k(x), x, \phi_k(x)) \in F_k . \tag{1.2}$$

i) $\forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $\forall x \in X_k$, $\forall y \in X_{k+1}$, $\forall v \in U_k$ *avec* $(y, x, v) \in F_k$,

$$V_k(x) = V_{k+1}(\psi_k(x)) + L_k(x, \phi_k(x)) \leq V_{k+1}(y) + L_k(x, v) , \tag{1.3a}$$

ii) $\forall x \in X_N$,
$$V_N(x) = L_N(x) , \tag{1.3b}$$

alors, la bitrajectoire engendrée par $x_0 = \xi_0$,

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \qquad u_k = \phi(x_k) \tag{1.4a}$$

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, N\}, \qquad x_{k+1} = \psi(x_k) . \tag{1.4b}$$

est admissible et résout le problème.

Démonstration : La trajectoire engendrée par (1.4) est admissible du fait de l'hypothèse (1.2). L'inégalité dans (1.3*a*) peut aussi s'écrire

$$0 \leq V_{k+1}(y) - V_k(x) + L_k(x, v)\,, \quad \forall (y, x, v) \in F_k\,. \tag{1.5}$$

Soit une bitrajectoire admissible $(\{x_k\}, \{u_k\})$ quelconque avec $x = x_k$, $y = x_{k-1}$ et $v = u_k$, mais satisfaisant $x_0 = \xi_0$. Alors elle satisfait (1.5) à chaque pas de temps. En sommant les inégalités (1.5) de $k = 0$ à $N - 1$, on obtient

$$0 \leq V_N(x_N) - V_0(x_0) + \sum_{k=0}^{N-1} L_k(x_k, u_k)\,,$$

soit, en tenant compte de (1.3*b*)

$$V_0(x_0) \leq J(\{x_k\}, \{u_k\})\,. \tag{1.6}$$

Maintenant, si on prend la suite engendrée par (1.4), l'inégalité dans (1.5) est remplacée par une égalité, et donc aussi dans (1.6). Cela établit le théorème 1. ■

Supposons par exemple que la dynamique soit de la forme (1.1). On pourra déterminer les fonctions V_k, ϕ_k et ψ_k par une procédure classique de programmation dynamique :

1) Partir de $V_N = L_N$.
2) Pour V_i connue de $i = k + 1$ à N, faire pour tout $x \in X_k$

$$V_k(x) = \min_{y, v\,:\,f(y, x, v) = 0} \left[V_{k+1}(y) + L_k(x, v)\right]\,, \tag{1.7}$$

et choisir $(\psi_k(x), \phi_k(x))$ comme un argument du min. On est donc ramené à un algorithme de programmation dynamique où on minimise simultanément par rapport à x_{k+1} et u_k, sous la contrainte (1.1).

2. Cas général du problème de la commande optimale quadratique des systèmes implicites linéaires stationnaires

2.1. Définition du problème

Un système implicite discret linéaire et stationnaire est un cas particulier de système implicite, pour lequel les espaces X_k sont tous égaux à $\mathbf{R}^n$, les espaces U_k sont tous égaux à $\mathbf{R}^r$ et l'équation (1.1) est de la forme

$$Ex_{k+1} = Fx_k + Gu_k\,, \tag{2.1}$$

où les matrices E, F et G ont respectivement les dimensions $m \times n$, $m \times n$ et $m \times r$.

Il faut rappeler que, contrairement au cas classique, la trajectoire $\{x_k\}$ correspondant à une loi de commande $\{u_k\}$ peut ne pas exister, ou si elle existe ne pas être unique.

Nous considérerons le critère quadratique suivant :

$$J(\{x_k\}, \{u_k\}) = \frac{1}{2} x_N^T S x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k), \qquad (2.2)$$

où les matrices S et Q sont symétriques et positives semi-définies, R est symétrique et positive définie.

Le problème de la commande optimale est de déterminer, étant donné x_0 (l'état initial) et un entier N (le temps final), deux suites $\{x_k\}$ et $\{u_k\}$ minimisant le critère (2.2) et satisfaisant les équations (2.1) pour $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

2.2. Solution du problème

Nous utiliserons les hypothèses ci-dessous.

Hypothèse (H)

(H1) $(E \quad G)$ *surjective,*

(H2) $\begin{pmatrix} E \\ Q \end{pmatrix}$ *injective,*

(H3) $\begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix}$ *injective.*

Théorème 2 : *Sous l'hypothèse* (H), *le problème de commande optimale a une solution unique, la commande optimale et la trajectoire optimale associée sont données par*

$$u_k = R^{-1} G^T \lambda_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (2.3)$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_k \end{pmatrix} = M_{k+1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} x_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (2.4)$$

où M_{k+1} est une matrice symétrique et inversible, donnée par

$$M_{k+1} = \begin{pmatrix} P_{k+1} & E^T \\ E & -GR^{-1}G^T \end{pmatrix}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (2.5)$$

P_k est symétrique et positive semi-définie, donnée par

$$P_k = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}^T M_{k+1}^{-1} \begin{pmatrix} P_{k+1} & 0 \\ 0 & GR^{-1}G^T \end{pmatrix} M_{k+1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + Q,$$
$$k = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (2.6)$$

La condition finale associée est

$$P_N = S .$$

Cette équation discrète est résolue à partir du temps final N. Le coût minimal est $\frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0$.

Si l'hypothèse (H3) *n'est pas satisfaite, le problème de commande optimale admet toujours une solution. La bitrajectoire optimale associée est unique, sauf* x_N *(l'état final) qui est déterminé seulement modulo le noyau de* $\begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix}$. *Les équations* (2.3) *à* (2.6) *restent satisfaites pour k variant de* 0 *à* $N-2$, *et pour* $k = N-1$ *elles prennent une forme plus compliquée.*

Nous commencerons par montrer quelques lemmes.

LEMME 2.1 : *Si* $(E \quad G)$ *est surjective, l'équation* (2.7) *suivante admet une solution pour tout y, et* λ *est défini de façon unique. Si en outre* $\begin{pmatrix} E \\ P_{k+1} \end{pmatrix}$ *est injective, la matrice* M_{k+1} *est inversible. Ces conditions sont aussi nécessaires*

$$M_{k+1} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} y . \tag{2.7}$$

Preuve : Calculons le noyau de M_{k+1} en écrivant $M_{k+1} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = 0$, donc

$$P_{k+1} x + E^T \lambda = 0 \tag{2.8}$$

$$Ex = GR^{-1} G^T \lambda . \tag{2.9}$$

Par (2.8), on obtient

$$x^T P_{k+1} x + x^T E^T \lambda = 0 .$$

Par (2.9), on en déduit

$$x^T P_{k+1} x + \lambda^T GR^{-1} G^T \lambda = 0 ,$$

d'où

$$P_{k+1} x = 0 \quad \text{et} \quad G^T \lambda = 0 .$$

En utilisant (2.8) et (2.9) on en déduit

$$\begin{pmatrix} E \\ P_{k+1} \end{pmatrix} x = 0 \qquad \begin{pmatrix} G^T \\ E^T \end{pmatrix} \lambda = 0 . \tag{2.10}$$

Réciproquement, (2.10) entraîne (2.8) et (2.9), et comme M_{k+1} est carrée, elle est inversible si et seulement si elle est injective. On en déduit la deuxième affirmation du lemme.

Supposons maintenant $(E \quad G)$ surjective. Si $\binom{x}{\lambda}$ est dans le noyau de M_{k+1}, par (2.10) on a $\lambda = 0$. En particulier $(0 \quad F^T)\binom{x}{\lambda} = 0$ d'où

$$\operatorname{Ker} M_{k+1} \subset \operatorname{Ker}\,(0 \quad F^T)$$

d'où

$$\operatorname{Im} M_{k+1}^T \supset \operatorname{Im} \binom{0}{F} .$$

On conclut en remarquant que M_{k+1} est symétrique. ■

LEMME 2.2 : *Sous l'hypothèse* (H), *la matrice* P_k *définie par les équations* (2.5), (2.6) *est symétrique, positive semi-définie et* $\binom{E}{P_k}$ *est injective.*

Le lemme est évident pour $k = N$ et se montre par récurrence sur k. Supposons P_{k+1} symétrique, positive semi-définie et $\binom{E}{P_{k+1}}$ injective. Par le lemme précédent, la matrice M_{k+1} est inversible, et ainsi P_k est bien définie. Manifestement elle est symétrique, positive semi-définie, comme somme d'une matrice symétrique positive semi-définie et Q. En particulier $P_k x = 0$ entraîne $Qx = 0$. On conclut grâce à l'hypothèse (H2). ■

LEMME 2.3 : *Supposons l'hypothèse* (H1) *satisfaite. La quantité*

$$f(u_k, x_{k+1}) = \frac{1}{2}\,(x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)\,, \qquad (2.11)$$

sous la contrainte (2.1) *atteint sa valeur minimale pour tous* x_{k+1}, u_k *satisfaisant*

$$u_k = R^{-1} G^T \lambda_k \qquad (2.12a)$$

$$P_{k+1} x_{k+1} + E^T \lambda_k = 0 \qquad (2.12b)$$

$$E x_{k+1} - G R^{-1} G^T \lambda_k = F x_k\,. \qquad (2.12c)$$

Preuve : Par le lemme 2.1, les équations (2.12) ont au moins une solution. Prenons-en une, et calculons $f(u, x)$ avec $u = u_k + v$, $x = x_{k+1} + y$.

La contrainte $Ex = Fx_k + Gu$ s'écrit

$$Ey = Gv$$

et

$$2\,f(u, v) = x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + v^T R v + {} + y^T P_{k+1} y + 2\,v^T R u_k + 2\,y^T P_{k+1} v_{k+1}\,. \qquad (2.13)$$

Notons que si $Ey = Gv$, on a

$$v^T R u_k = v^T G^T \lambda_k = y^T E^T \lambda_k = - y^T P_{k+1} x_{k+1} .$$

La quantité $v^T Rv + y^T P_{k+1} y$ est positive ou nulle. Comme elle s'annule pour $v = y = 0$ (qui satisfait la contrainte), sa valeur minimale est nulle.

Prenons y et v satisfaisant la contrainte et tels que cette quantité soit nulle. Alors $v = 0$ et $P_{k+1} y = 0$. Tenant compte de la contrainte, on en déduit $Ey = 0$. Par conséquent $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$ est dans le noyau de M_{k+1} et λ_k, x, u vérifient les équations (2.12). ■

LEMME 2.4 : *Si l'hypothèse* (H1) *est satisfaite, et* $\begin{pmatrix} E \\ P_{k+1} \end{pmatrix}$ *est injective, la valeur minimale de* (2.11) *est obtenue pour un unique* x_{k+1}, u_k, *satisfaisant les équations* (2.12), *cette valeur minimale étant* $x_k^T P_k x_k$, *où* P_k *est définie via* (2.5) *et* (2.6).

Notons que les hypothèses faites entraînent que P_k est bien définie, et que x_{k+1}, u_k sont définies de façon unique par les équations (2.12).

Par les calculs précédents, la valeur du minimum est

$$\frac{1}{2} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + x_{k+1}^T P_{k+1} x_{x+1}) .$$

Notons que $u_k^T R u_k = \lambda_k^T G R^{-1} G^T \lambda_k$ et que si $A = M_{k+1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$, on a $A x_k = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ d'où

$$u_k^T R u_k + x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} = x_k^T A^T \begin{pmatrix} P_{k+1} & 0 \\ 0 & GR^{-1} G^T \end{pmatrix} A x_K .$$

L'équation (2.6) s'en déduit. ■

Preuve du théorème 2 : Si l'hypothèse (H) est satisfaite, le théorème est une conséquence immédiate des lemmes 2.2, 2.4 et du théorème 1.

Si seules les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites, le théorème se montre de la façon suivante.

A l'instant final N, la valeur minimale du critère est manifestement $x_N^T P_N x_N$ avec $P_N = S$. A l'instant $N - 1$, les lemmes 2.1 et 2.3 montrent que le problème de commande optimale admet au moins une solution u_{N-1}, x_N, linéaire en fonction de x_{N-1}, u_{N-1} étant définie de façon unique. Supposons qu'une de ces solutions soit de la forme $u_{N-1} = A x_{N-1}$, $x_N = B x_{N-1}$. Le coût optimal est alors $x_{N-1}^T P_{N-1} x_{N-1}$ avec $P_{N-1} = Q + B^T SB + A^T RA$. Remarquant que $B^T SB + A^T RA$ est positive semi-définie, on en conclut que $P_{N-1}x = 0$ entraîne $Qx = 0$, et par conséquent, que $\begin{pmatrix} E \\ P_{N-1} \end{pmatrix}$ est injective.

Il suffit alors d'appliquer le théorème 2, avec un instant final $N-1$, et un coût final P_{N-1}. ■

PROPOSITION 2 : *Si E est la matrice identité, l'hypothèse* (H) *est toujours satisfaite, et les équations* (2.5), (2.6) *se ramènent à l'équation de Riccati classique.*

En effet, posons $P = P_{k+1}$, $A = (G^T P G + R)^{-1}$ et $B = GAG^T$. On a alors

$$M_{k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} B & I - BP \\ I - PB & PBP - P \end{pmatrix} . \tag{2.14}$$

Les équations (2.5), (2.6) deviennent

$$P_k = Q + \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B & I - BP \\ I - PB & PBP - P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & GR^{-1}G^T \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} B & I - BP \\ I - PB & PBP - P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} .$$

En développant, on constate que cette équation prend la forme

$$P_k = Q + F^T PF + F^T PCPF \tag{2.15}$$

avec

$$C = -2B + BPB + GR^{-1}G^T - BPGR^{-1}G^T - GR^{-1}G^T B +$$
$$+ BPGR^{-1}G^T PB . \tag{2.16}$$

Écrivant B en fonction de A, (2.16) s'écrit aussi

$$C = GADAG^T \tag{2.17}$$

avec

$$D = -2A^{-1} + G^T PG + A^{-1}R^{-1}A^{-1} - G^T PGR^{-1}A^{-1} -$$
$$- A^{-1}R^{-1}G^T PG + G^T PGR^{-1}G^T PG .$$

Remplaçant A^{-1} par $G^T PG + R$, et en développant, il reste

$$D = -A^{-1} .$$

On en déduit

$$C = -GAG^T = -G(G^T P_{k+1} G + R)^{-1} G^T$$

d'où

$$P_k = F^T P_{k+1} F - F^T P_{k+1} G(R + G^T P_{k+1} G)^{-1} \times \\ \times G^T P_{k+1} F + Q . \quad (2.18)$$

C'est l'équation de Riccati classique. La proposition 2 est établie. ■

L'équation (2.6), qui est un système de $n \times (n+1)/2$ équations récurrentes du premier ordre (P_k est symétrique), est résolue à rebours de N à 0 à partir de la condition $P_N = S$. Ces calculs peuvent donc être exécutés avant le démarrage du processus, soit « hors ligne ».

3. Le problème à temps final infini

Il est souvent naturel de considérer de grands intervalles d'optimisation. Le cas limite obtenu en faisant tendre le temps final N vers l'infini dans le système classique présente de sérieux avantages qui en font l'une des techniques les plus fréquemment exploitées dans la pratique.

3.1. DÉFINITION DU PROBLÈME

Le problème de la commande optimale à temps final infini du système implicite est la détermination de la paire de trajectoires $\{u_k\}$, $\{x_k\}$, minimisant la fonction-coût

$$J(\{x_k\}, \{u_k\}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) , \quad (3.1)$$

sous la contrainte (2.1), et sous la contrainte de stabilité suivante

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0 \qquad \lim_{k \to \infty} u_k = 0 .$$

3.2. HYPOTHÈSES

Comme dans le cas classique, nous supposerons que le système est stabilisable et détectable par la sortie $y_k = Qx_k$.

DÉFINITION 3 : *Le système implicite* (2.1) *est dit stabilisable si, pour tous complexes* (λ, μ) *non simultanément nuls, la matrice* $(\lambda E - \mu F \quad G)$ *est surjective si* $\left| \frac{\lambda}{\mu} \right| \geqslant 1$.

En d'autres termes, si $(E \quad G)$ *est surjective, et si* $(\lambda E - F \quad G)$ *est surjective si* $|\lambda| \geqslant 1$.

Le système implicite (2.1) *est dit détectable par la sortie* $y_k = Qx_k$ *si, pour tous complexes* (λ, μ) *non simultanément nuls, la matrice* $\begin{pmatrix} \lambda E - \mu F \\ Q \end{pmatrix}$ *est injective si* $\left| \dfrac{\lambda}{\mu} \right| \geqslant 1$.

En d'autres termes, si $\begin{pmatrix} E \\ Q \end{pmatrix}$ *est injective, et si* $\begin{pmatrix} \lambda E - F \\ Q \end{pmatrix}$ *est injective si* $|\lambda| \geqslant 1$.

La signification de cette définition est donnée par les deux propositions suivantes.

PROPOSITION 3.1 : *Si le système* (2.1) *est stabilisable, pour tout état initial* x_0, *il existe une bitrajectoire stable admissible admettant* x_0 *comme état initial. On peut supposer que l'état, de même que la commande, tendent géométriquement vers* 0.

Par changement de variables sur l'état, et en multipliant l'équation (2.1) à gauche par une certaine matrice inversible, on peut supposer que E soit de la forme $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice G prend alors la forme $\begin{pmatrix} G_3 \\ G_4 \end{pmatrix}$, et l'hypothèse $(E \quad G)$ surjective s'écrit alors G_4 surjective. Par changement de variables sur la commande, on peut alors supposer que G est de la forme $\begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

Notons que la définition de stabilisabilité est invariante par *feedback*. Supposons que F soit de la forme $\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$, posons $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$ et faisons le *feedback* $u = Kx + v$. Alors

$$F - GK = \begin{pmatrix} F_1 - G_2 F_3 & F_2 - G_2 F_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_5 & F_6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

et le système prend la forme

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= F_5 x_{1,k} + F_6 x_{2,k} + G_1 v_{1,k} + G_2 v_{2,k} \\ 0 &= v_{2,k} . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Écrivons que le système est stabilisable. On obtient que

$$\begin{pmatrix} \lambda I - F_5 & -F_6 & G_1 & G_2 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

est surjective pour $|\lambda| \geqslant 1$, donc que la paire $(F_5, (F_6 \quad G_1))$ est stabilisable (au sens classique).

Il existe par conséquent un *feedback* $\begin{pmatrix} v_{1,k} \\ x_{2,k} \end{pmatrix} = K_1 x_{1,k}$ qui stabilise (3.3) en prenant $v_{2,k} = 0$.

Notons simplement qu'on ne peut appliquer ce *feedback* que pour $k \geqslant 1$, car $x_{2,0}$ est imposé par les conditions initiales. ■

PROPOSITION 3.2 : *Si le système implicite* (2.1) *est détectable par la sortie* $y_k = Qx_k$, *les hypothèses* $y_k \to 0$ *et* $u_k \to 0$ *entraînent* $x_k \to 0$ *pour* $k \to \infty$.

Comme précédemment, on se ramène à $E = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice Q prend alors la forme $(Q_3 \quad Q_4)$, et l'hypothèse $\begin{pmatrix} E \\ Q \end{pmatrix}$ injective s'écrit alors Q_4 injective. Par changement de variables sur la sortie on peut alors supposer que Q est de la forme $\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & I \end{pmatrix}$.

Notons que la définition de détectabilité est invariante par retour de sortie. Supposons que F soit de la forme $\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$, posons $K = \begin{pmatrix} 0 & F_2 \\ 0 & F_4 \end{pmatrix}$ de sorte que $F - KQ$ soit de la forme $\begin{pmatrix} F_5 & 0 \\ F_6 & 0 \end{pmatrix}$.

Le système prend alors la forme

$$Ex_{k+1} = (F - KQ)\, x_k + Gu_k + Ky_k$$

ou

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= F_5 x_{1,k} + G_1 u_k + K_1 y_k \\ 0 &= F_6 x_{1,k} + G_2 u_k + K_2 y_k \end{aligned} \tag{3.4}$$

avec

$$\begin{aligned} y_{2,k} &= Q_2 x_{1,k} + x_{2,k} \\ y_{1,k} &= Q_1 x_{1,k} . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Les conditions de détectabilité disent que la paire $\left(\begin{pmatrix} F_6 \\ Q_1 \end{pmatrix}, F_5\right)$ est détectable au sens classique.

Comme u_k et y_k tendent vers 0, il en est de même de $F_6 x_{1,k}$. On en déduit d'abord que $x_{1,k}$ tend vers 0, puis grâce à (3.5) que $x_{2,k}$ tend vers 0. ■

3.3. SOLUTION DU PROBLÈME

PROPOSITION 3.3 : *Soit* $P_{N,k}$ *la matrice* P_k *définie dans la section* 2, *pour le problème de commande optimale en temps N avec un coût final Q. On suppose le système stabilisable.*

1) *On a* $P_{N,i} = P_{M,j}$ *si* $N - i = M - j$.

2) *La matrice* $P_k = P_{k,0}$ *satisfait l'équation*

$$P_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}^T M_k^{-1} \begin{pmatrix} P_k & 0 \\ 0 & GR^{-1}G^T \end{pmatrix} M_k^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + Q \tag{3.6}$$

avec la condition initiale $P_0 = Q$, *la matrice* M_k *étant définie par* (2.5).

3) *La suite de matrices* P_k *admet une limite* $\bar{P}$, *solution de*

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}^T M^{-1} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & GR^{-1}G^T \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + Q \tag{3.7}$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} P & E^T \\ E & -GR^{-1}G^T \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Preuve : Les points 1) et 2) sont évidents.
Soit

$$J_N(\{x_k\}, \{u_k\}) = \frac{1}{2} x_N^T Q x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k).$$

Si $(\{x_k\}, \{u_k\})$ est une bitrajectoire optimale pour le problème avec instant final $N + 1$, sa restriction à l'intervalle $[0, N]$ est une bitrajectoire admissible pour le problème avec instant final N, et donc

$$x_0^T P_N x_0 \leq J_N(\{x_k\}, \{u_k\}) \leq J_{N+1}(\{x_k\}, \{u_k\}) = x_0^T P_{N+1} x_0.$$

La suite $x_0^T P_N x_0$ est donc croissante en fonction de N. Par la proposition 3.1, il existe une bitrajectoire stable $(\{x_k\}, \{u_k\})$, et pour celle-ci on a

$$x_0^T P_N x_0 \leq J_N(\{x_k\}, \{u_k\}) \leq J(\{x_k\}, \{u_k\}) < \infty.$$

On en déduit que la suite $x_0^T P_N x_0$ est majorée, donc qu'elle converge. Comme P_N est positive semi-définie, la suite P_N est donc convergente. Par continuité, la limite est solution de (3.7). Notons que si $\bar{P}$ est la limite de P_N, et si $\bar{P}x = 0$ on a $0 = x^T \bar{P} x \geq x^T P_N x \geq 0$, et donc, en particulier $Qx = 0$. La matrice M définie par (3.8) est donc bien inversible. ■

PROPOSITION 3.4 : *Si P est une solution positive semi-définie de l'équation de Riccati stationnaire* (3.7), *pour tout état initial* x_0, *il existe une bitrajectoire associée de façon canonique à P. Si cette bitrajectoire est stable, le coût en est* $x_0^T P x_0$.

Pour x_k donné, on pose $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} x_k$ et $u_k = R^{-1} G^T \lambda_k$ où M est définie par (3.8).

Comme $Ex_{k+1} = Fx_k + Gu_k$, on a une bitrajectoire admissible. Elle vérifie manifestement

$$x_k^T P x_k = x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + x_{k+1}^T P x_{k+1} \tag{3.9}$$

et donc

$$x_0^T P x_0 = \sum_{i=0}^{N} (x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i) + x_{N+1}^T P x_{N+1}$$

et ceci prouve la proposition. ■

THÉORÈME 3 : *On suppose le système* (2.1) *stabilisable et détectable par* Q. *Alors le problème de commande optimale admet une solution unique, qui est la bitrajectoire associée de façon canonique à* $\bar{P}$, *unique solution positive semi-définie de l'équation de Riccati* (3.7).

Remarquons que pour toute bitrajectoire admissible $(\{x_k\}, \{u_k\})$ on a

$$J(\{x_k\}, \{u_k\}) \geqslant J_N(\{x_k\}, \{u_k\}) \geqslant x_0^T P_N x_0$$

où P_N est définie par la proposition 3.3. Cette proposition affirme que P_N tend vers une limite $\bar{P}$ solution de (3.7). On en déduit

$$J(\{x_k\}, \{u_k\}) \geqslant x_0^T \bar{P} x_0 .$$

Par la proposition 3.4, il existe une bitrajectoire associée de façon canonique à $\bar{P}$. Admettons un instant que cette bitrajectoire soit stable. Le coût de cette bitrajectoire est alors $x_0 \bar{P} x_0$. On en déduit

$$\min J(\{x_k\}, \{u_k\}) = x_0^T \bar{P} x_0 .$$

Considérons maintenant une solution quelconque, positive semi-définie P de l'équation (3.7). La bitrajectoire canonique associée vérifie (3.9) ; en conséquence la suite $x_k^T P x_k$ est décroissante. Comme elle est positive ou nulle, elle a une limite, et donc la quantité

$$x_k^T P x_k - x_{k+1} P x_{k+1} = x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k$$

tend vers 0. Par conséquent, u_k et Qx_k tendent vers 0. Comme le système est détectable par Q, la proposition 3.2 entraîne que la bitrajectoire est stable.

Considérons maintenant une bitrajectoire admissible quelconque $(\{\tilde{x}_k\}, \{\tilde{u}_k\})$, et écrivons $\tilde{u}_k = u_k + v_k$, $\tilde{x}_k = x_k + y_k$. Reprenant les calculs de la Section 2.2, on a

$$\tilde{x}_k^T Q\tilde{x}_k + \tilde{u}_k^T R\tilde{u}_k + x_{k+1}^T P x_{k+1} = x_k^T P x_k + y_{k+1}^T P y_{k+1} + v_k^T R v_k$$

en sommant, on obtient

$$\sum_{k=0}^{N} (\tilde{x}_k^T Q\tilde{x}_k + \tilde{u}_k^T R\tilde{u}_k) = -x_{N+1}^T P x_{N+1} + x_0^T P x_0 + \\ + \sum_{k=0}^{N} (y_{k+1}^T P y_{k+1} + v_k^T R v_k) .$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{x}_k^T Q\tilde{x}_k + \tilde{u}_k^T R\tilde{u}_k) = x_0^T P x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (y_{k+1}^T P y_{k+1} + v_k^T R v_k) .$$

La valeur minimale de J est donc $x_0^T P x_0$, car $v_k = 0$, $y_k = 0$ satisfait la contrainte.

Remarquons que ceci détermine P de façon unique. On en déduit l'unicité de la solution positive semi-définie de l'équation (3.7).

Par ailleurs, la valeur du critère est minimale lorsque $P y_{k+1} = 0$ et $v_k = 0$. Sachant que $E y_{k+1} = G v_k$, et $P y_{k+1} = 0$ entraîne $Q y_{k+1} = 0$, l'hypothèse (H2) (qui est satisfaite car le système est détectable par Q) entraîne $y_{k+1} = 0$. Il en résulte l'unicité de la bitrajectoire optimale. ■

4. Dualité du problème de la commande optimale et celui du filtrage

4.1. DÉFINITION DU PROBLÈME DE LA COMMANDE OPTIMALE

Étant donné le système implicite (2.1), le problème est la détermination de la commande u_k et de la trajectoire d'état x_k avec x_0 donné, en minimisant la fonction-coût

$$J(\{x_k\}, \{u_k\}) = \frac{1}{2} x_N^T E^T S E x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) . \quad (4.1)$$

Notons que $\begin{pmatrix} E \\ E^T S E \end{pmatrix}$ n'est pas injective, si E n'est pas injective, ainsi l'hypothèse (H3) n'est pas vérifiée.

4.2. Définition du problème du filtrage

Le système implicite stochastique est décrit par

$$Ex_{k+1} = Fx_k + \nu_k \,, \tag{4.2.1}$$
$$y_k = Hx_k + \omega_k \,, \tag{4.2.2}$$

où ν_k et ω_k sont des bruits blancs et gaussiens centrés de covariance Q et R. Q est symétrique et positive semi-définie, et R est symétrique et positive définie.

x_{k_0} est un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $\bar{x}_{k_0}$ et de covariance Σ_{k_0}.

L'objectif du filtrage est de calculer $E\hat{x}_{k_1}$ la prédiction de Ex_{k_1}, qui est linéaire en fonction de $y_{k_0}, y_{k_0+1}, \ldots, y_{k_1-1}$ et $\bar{x}_{k_0}$, telle que le critère

$$J = \mathscr{E}\,[a^T Ex_{k_1} - a^T E\hat{x}_{k_1}]^2 \,, \tag{4.2.3}$$

soit minimum quel que soit a ($a \in \mathbf{R}^m$).

Comme $a^T E\hat{x}_{k_1}$ est linéaire en fonction de $y_{k_0}, y_{k_0+1}, \ldots, y_{k_1-1}$ et $\bar{x}_{k_0}$, nous avons, pour certains coefficients u_k et b qu'il faut déterminer,

$$a^T E\hat{x}_{k_1} = -\sum_{k=k_0}^{k_1-1} u_{k+1}^T y_k + b^T \bar{x}_{k_0} \,. \tag{4.2.4}$$

Proposition 4 : *On peut choisir u_{k+1} et b de façon linéaire en fonction de a, de sorte que $E\hat{x}_{k_1} = -\sum_{k=k_0}^{k_1-1} A_{k+1} y_k + B\bar{x}_{k_0}$, où A_{k+1} et B sont indépendants de a.*

Cette proposition sera démontrée dans la suite.

4.3. Dualité

Afin de résoudre le problème du filtrage, nous introduisons le vecteur z_k décrit par

$$E^T z_{k-1} = F^T z_k + H^T u_k \,, \tag{4.3.1}$$

avec la condition initiale

$$z_{k_1} = a \,. \tag{4.3.2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} a^T Ex_{k_1} &= z_{k_1}^T Ex_{k_1} \\ &= z_{k_0}^T Ex_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} [z_{k+1}^T Ex_{k+1} - z_k^T Ex_k] \,. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

A partir des équations (4.2.1) et (4.3.1), nous avons

$$z_{k+1}^T\, E x_{k+1} = z_{k+1}^T\, F x_k + z_{k+1}^T\, v_k\,, \tag{4.3.4}$$

$$z_k^T\, E x_k = z_{k+1}^T\, F x_k + u_{k+1}^T\, H x_k\,. \tag{4.3.5}$$

Par l'injection de (4.3.4) et (4.3.5) dans (4.3.3), nous obtenons

$$a^T E x_{k_1} = z_{k_0}^T E x_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \left[z_{k+1}^T\, v_k - u_{k+1}^T\, H x_k\right]. \tag{4.3.6}$$

(4.2.2) et (4.2.4) donnent

$$a^T E \hat{x}_{k_1} = - \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \left[u_{k+1}^T\, H x_k + u_{k+1}^T\, \omega_k\right] + b^T \bar{x}_{k_0}\,. \tag{4.3.7}$$

(4.3.6) et (4.3.7) nous donnent

$$\begin{aligned} a^T E x_{k_1} - a^T E \hat{x}_{k_1} &= z_{k_0}^T E x_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \left[z_{k+1}^T\, v_k + u_{k+1}^T\, \omega_k\right] - b^T \bar{x}_{k_0}\,, \\ &= z_{k_0}^T E\left[x_{k_0} - \bar{x}_{k_0}\right] + \left[z_{k_0}^T E - b^T\right] \bar{x}_{k_0} + \\ &\quad + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \left[z_{k+1}^T\, v_k + u_{k+1}^T\, \omega_k\right]. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Le critère (4.2.3) devient

$$\begin{aligned} J &= \mathscr{E}\left[a^T E x_{k_1} - a^T E \hat{x}_{k_1}\right]^2\,, \\ &= \left[\left(z_{k_0}^T E - b^T\right) \bar{x}_{k_0}\right]^2 + \\ &\quad + z_{k_0}^T E \Sigma_{k_0} E^T z_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \left[z_{k+1}^T\, Q z_{k+1} + u_{k+1}^T\, R u_{k+1}\right]. \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Pour minimiser le critère (4.3.9), nous devons choisir le vecteur $b = E^T z_{k_0}$.

Le critère devient alors

$$J = z_{k_0}^T E \Sigma_{k_0} E^T z_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{k_1} \left(z_k^T Q z_k + u_k^T R u_k^T\right). \tag{4.3.10}$$

Donc, le problème du filtrage du système (4.2.1) et (4.2.2) avec le critère (4.2.3) est équivalent au problème de la commande optimale du système (4.3.1) avec le critère quadratique (4.3.10).

L'état initial est z_{k_0}, l'état final est z_{k_1}. L'intervalle du critère N est $k_1 - k_0$.

Il ne nous reste plus qu'à résoudre le problème défini dans 4.1.

4.4. SOLUTION DU PROBLÈME

Nous allons utiliser le théorème 2, qui nous fournit les équations valables pour $k = 0$ à $N - 2$, et pour l'étape $N - 1$, utiliser le lemme 3. Nous allons donc résoudre les équations (2.12), avec $k = N - 1$, et $P_N = E^T SE$.

L'égalité (2.12*b*) s'écrit

$$E^T SEx_N + E^T \lambda_{N-1} = 0\,, \tag{4.4.1}$$

et on peut choisir

$$\lambda_{N-1} = -SEx_N\,. \tag{4.4.2}$$

Par conséquent, (2.12*a*) nous donne

$$\begin{aligned} u_{N-1} &= -R^{-1} G^T SEx_N \\ &= -R^{-1} G^T SFx_{N-1} - R^{-1} G^T SGu_{N-1}\,, \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

et donc

$$u_{N-1} = -(R + G^T SG)^{-1} G^T SFx_{N-1}\,. \tag{4.4.4}$$

Le coût optimal est donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_{N-1}^T P_{N-1} x_{N-1} &= \frac{1}{2} x_{N-1}^T Qx_{N-1} + \frac{1}{2} u_{N-1}^T Ru_{N-1}^T + \frac{1}{2} x_N^T E^T SEx_N\,, \\ &= \frac{1}{2} x_{N-1}^T Qx_{N-1} + \frac{1}{2} u_{N-1}^T Ru_{N-1} + \\ &\quad + \frac{1}{2} (Fx_{N-1} + Gu_{N-1})^T S(Fx_{N-1} + Gu_{N-1})\,. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Cette égalité doit être vérifiée quel que soit x_{N-1}, ainsi nous avons

$$P_{N-1} = Q + F^T SF - F^T SG(R + G^T SG)^{-1} G^T SF\,. \tag{4.4.6}$$

Nous aboutissons ainsi au théorème suivant.

THÉORÈME 4.1 : *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *le problème de commande optimale admet au moins une solution, décrite par le théorème* 2. *De plus, la condition à l'instant $N - 1$ pour la matrice P est donnée par*

$$P_{N-1} = Q + F^T SF - F^T SG(R + G^T SG)^{-1} G^T SF\,, \tag{4.4.7}$$

et la commande u_{N-1} *est*

$$u_{N-1} = -(R + G^T S G)^{-1} S F x_{N-1} . \qquad (4.4.8)$$

Nous avons ainsi le théorème dual du théorème 4.1 pour le problème de filtrage.

THÉORÈME 4.2 : *Sous les hypothèses* $(E \ \ Q)$ *surjective et* $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ *injective, la prédiction de* Ex_{k_1}, *minimisant* (4.2.3) *et vérifiant* (4.2.1) *et* (4.2.2), *s'écrit*

$$a^T E\hat{x}_{k_1} = - \sum_{k=k_0}^{k_1-1} u_{k+1}^T y_k + b^T \bar{x}_{k_0} .$$

les vecteurs u_k, *pour* $k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots, k_1$, *sont déterminés en résolvant le problème de la commande optimale du système* (4.3.1) *avec la condition initiale* (4.3.2) *et la fonction-coût* (4.3.10), *et donc*

$$u_k = R^{-1} H \lambda_k , \quad k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2 , \qquad (4.4.9)$$

$$\begin{pmatrix} z_{k-1} \\ \lambda_k \end{pmatrix} = M_{k-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix} z_k , \quad k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2 , \qquad (4.4.10)$$

avec $$z_{k_1} = a$$

où M_{k-1} *est une matrice symétrique et inversible, définie par*

$$M_{k-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_{k-1} & E \\ E^T & -H^T R^{-1} H \end{pmatrix} , \quad k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2 , \qquad (4.4.11)$$

Σ_k *est symétrique et positive semi-définie, donnée par*

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix}^T M_{k-1}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_{k-1} & 0 \\ 0 & H^T R^{-1} H \end{pmatrix} M_{k-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F^T \end{pmatrix} + Q ,$$
$$k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2 , \qquad (4.4.12)$$

La condition finale pour (4.4.12) *est*

$$\Sigma_{k_0+1} = Q + F\Sigma_{k_0} F^T - F\Sigma_{k_0} H^T (R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1} H\Sigma_{k_0} F^T , \qquad (4.4.13)$$

u_{k_0+1} *s'écrit*

$$u_{k_0+1} = -(R + H\Sigma_{k_0} H^T)^{-1} \Sigma_{k_0} F^T z_{k_0+1} , \qquad (4.4.14)$$

Le vecteur b *est*

$$b = E^T z_{k_0} = F^T z_{k_0+1} + H^T u_{k_0+1} . \qquad (4.4.15)$$

Preuve de la proposition 4 : Par récurrence, il est clair que z_{k-1} et λ_k donnés par (4.4.10), pour $k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2$, sont linéaires en fonction de z_{k_1}, ainsi u_k et b donnés par (4.4.9) et (4.4.15), pour $k = k_1, k_1 - 1, \ldots, k_0 + 2$, le sont aussi. La proposition 4 est donc établie, puisque $z_{k_1} = a$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BERNHARD, *On singular implicit linear dynamical systems,* S.I.A.M. J. Control, 20, n° 5, septembre 1982, p. 612-633.

[2] P. BERNHARD et X. M. WANG, *Filtrage des systèmes implicites linéaires discrets,* C.R. Acad. Sc., Paris, t. 304, série I, 1987, p. 351-354.

[3] S. L. CAMPBELL, *Singular systems of differential equations,* Pitman, London, 1980.

[4] D. COBB, *Controllability observability and duality in singular systems,* I.E.E.E. Trans. Aut. Contr., AC-29, n° 12, 1984, p. 1076-1084.

[5] J. GRIMM, *Realisation and canonicity for implicit systems,* S.I.A.M. J. Control and Optimization, 26, pp. 1331-1347, 1988.

[6] D. G. LUENBERGER, *Time-invariant descriptor systems,* in Proc. J.A.C.C., San Francisco, CA, 1977, p. 725-730.

[7] G. C. VERGHESE, B. C. LÉVY et T. KAILATH, *A generalized state-space for singular systems,* I.E.E.E. Trans. Aut. Contr., AC-26, n° 4, 1981, p. 811-831.

[8] X. M. WANG, P. BERNHARD et J. GRIMM, *Commande optimale linéaire quadratique des systèmes implicites,* C.R. Acad. Sc., Paris, t. 303, série I, 1986, p. 127-130.