

**Parallélisation de la  
recherche d'une trajectoire  
d'approche d'astéroïdes**

*P. Bernhard et R. Fournier*

INRIA Sophia-Antipolis  
2004 Route des Lucioles  
Sophia Antipolis  
06565 VALBONNE

Janvier 1992

## Résumé

Ce rapport présente une méthode de calcul de trajectoire d'une sonde spatiale cherchant à approcher le plus grand nombre possible d'astéroïdes avec une poussée instantanée et une quantité totale de carburant limitées.

Le point de départ est fixé par la position de la planète Mars à la date de départ. La vitesse de départ relative à Mars peut varier dans un cône ayant pour axe la vitesse d'arrivée relative à Mars, son module restant invariant. L'accélération imprimée à la sonde pendant toute la durée de la mission est aussi une variable du problème. Il s'agit de trouver les valeurs de ces variables qui permettront d'approcher le plus grand nombre possible d'astéroïdes.

Le problème, de nature combinatoire (choix de la liste des astéroïdes visités) est résolu en l'immergeant dans un problème d'optimisation continu. La difficulté due au grand nombre d'astéroïdes se trouve reportée sur le calcul du gradient du critère à optimiser. Toutefois, la tâche qui croît avec le nombre de corps est parallélisable.

L'utilisation d'une machine massivement parallèle <sup>1</sup> permet d'associer un processeur à chaque astéroïde et de prendre ainsi en considération tous les astéroïdes connus (4192 dans les calculs faits ici, mais le temps de calcul serait le même jusqu'à 16 380 corps) ce qui était impossible auparavant.

---

<sup>1</sup>Connection Machine. Thinking Machines Corporation.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Description du problème</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>La solution théorique</b>	<b>4</b>
2.1	Formulation . . . . .	4
2.2	Le gradient du critère relatif à l'accélération . . . . .	5
2.3	Le gradient du critère relatif à la vitesse initiale . . . . .	7
2.4	Les contraintes . . . . .	8
<b>3</b>	<b>La parallélisation du problème</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>quelques résultats</b>	<b>11</b>
4.1	Valeurs initiales . . . . .	11
4.2	minimisation sans contraintes . . . . .	12
4.2.1	évolution de $v_0$ et contrôle de la précision . . . . .	12
4.2.2	évolution de $v_0$ et $\gamma(t)$ . . . . .	14
4.3	minimisation avec contraintes . . . . .	15
4.3.1	$\alpha_{initial} = -20^\circ$ . . . . .	15
4.3.2	$\alpha_{initial} = 0^\circ$ . . . . .	16
4.3.3	$\alpha_{initial} = 20^\circ$ . . . . .	17
4.3.4	$\alpha_{initial} = -6.7^\circ$ . . . . .	18
4.3.5	$\epsilon = 0.01$ . . . . .	19
4.3.6	$\epsilon$ décroissant . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>27</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>29</b>

# Chapitre 1

## Description du problème

On s'intéresse à la trajectoire d'une sonde soumise à l'attraction solaire, se déplaçant entre Mars et Jupiter et disposant d'un moyen de propulsion. L'objectif de cette mission est de rencontrer le plus grand nombre possible d'astéroïdes.

On désigne par  $a_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, N$  les trajectoires connues des  $N$  astéroïdes pris en considération ( $N > 4000$ ).

L'instant  $t_0$  et la position  $x_0$  de départ sont aussi connus et correspondent au moment où la sonde s'est assez éloignée de Mars pour qu'on puisse négliger son attraction.

On désigne par  $v_M$  la vitesse de Mars à l'instant  $t_0$  et par  $v_a$  la vitesse d'arrivée de la sonde relative à Mars.

La vitesse de départ de la sonde relative à Mars, notée  $v_d$ , doit satisfaire à:

$$\begin{aligned} \|v_a\| &= \|v_d\|, \\ v_d &\in \text{cone}(v_a, \beta_{max}); \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $\text{cone}(v_a, \beta_{max})$  désigne le cône d'axe  $v_a$  et d'angle  $\beta_{max}$ .

La vitesse absolue de départ de la sonde à l'instant  $t_0$  est

$$v_0 = v_d + v_M. \tag{1.2}$$

On désigne par  $\gamma(t)$  l'accélération fournie à la sonde par ses moyens de propulsion propres et par  $\Delta T$  la durée de la mission. Le budget  $B$  est défini par la quantité de carburant disponible et conduit à la contrainte suivante:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta T} \|\gamma(t)\| dt \leq B \tag{1.3}$$

La poussée instantanée est aussi limitée:

$$\|\gamma(t)\| \leq \Gamma. \tag{1.4}$$

On suppose que la seule force externe à laquelle est soumise la sonde est l'attraction solaire. Cette approximation est suffisante dans la phase de détermination de la mission, c'est à dire le choix de la liste d'astéroïdes visités.

En désignant par  $x$  la position de la sonde, son accélération  $A(x)$  due au potentiel solaire est de la forme:

$$A(x) = -\frac{Gx}{(x, x)^{3/2}} .$$

Les équations régissant le déplacement de la sonde peuvent alors s'écrire:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v & ; & & x(t_0) &= x_0 & , \\ \dot{v} &= A(x) + \gamma & ; & & v(t_0) &= v_0 & . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Le problème peut alors se formuler comme suit:

*Trouver la vitesse initiale  $v_0$  et l'accélération  $\gamma(t)$  qui permettent, dans l'intervalle  $[t_0, t_0 + \Delta T]$ , d'approcher le plus grand nombre possible d'astéroïdes parmi les  $N$  de trajectoires  $a_k(t)$  sachant que les contraintes (1.1), (1.3), and (1.4) doivent être respectées,  $x_0$ ,  $v_a$ ,  $v_M$  étant connus.*

# Chapitre 2

## La solution théorique

### 2.1 Formulation

Le problème posé est fondamentalement combinatoire : choisir une liste ordonnée d'astéroïdes, la plus longue possible, qu'il est possible de visiter en respectant les contraintes de manœuvrabilité de la sonde. Aussi, les approches antérieures étaient-elles combinatoires. ([6], [7]). Par voie de conséquence, elles étaient définitivement inaptes à être étendues au traitement des 4000 corps connus, quels que soient les moyens de calcul mis en jeu, et probablement limitées à quelques dizaines de corps pour l'avenir prévisible.

Nous proposons ([4],[1],[2]) une approche consistant à remplacer le problème combinatoire par la minimisation d'un critère continu décrit ci-dessous. Le volume du calcul du critère et de son gradient croît linéairement avec le nombre de corps pris en compte. En outre nous verrons que ce calcul se prête à être parallélisé, ce qui nous a permis de le mener à bien en gardant les 4192 corps, le tout dans un temps de calcul très modeste.

On pourrait craindre que le nombre d'itérations nécessaires pour faire converger l'algorithme de minimisation croisse de façon prohibitive avec le nombre de corps. Il n'en est rien, parce qu'en réalité, la très grande majorité de ces corps n'intervient pratiquement pas en raison de leur éloignement. Mais l'intérêt de cette méthode est qu'on n'a pas à déterminer à l'avance quels sont ceux qui vont intervenir, ensemble qui dépend lui-même des conditions initiales prises. Or on va voir que faire varier ces conditions initiales est un élément fondamental de l'utilisation systématique de la méthode. (Que nous n'avons pas entamée dans cette étude).

En effet, la complexité combinatoire n'est pas entièrement surmontée pour autant. Elle se traduit par le grand nombre de minima locaux que présente notre fonctionnelle. Il faudrait donc, quelle que soit la méthode employée, dépenser beaucoup de calculs pour procéder à son exploration approfondie. En particulier, il faut certainement essayer un grand jeu de conditions initiales, choisies en y mettant de l'intuition de mécanique céleste. Toutefois, notre expérience numérique *extrêmement limitée* montre que la méthode donne des résultats intéressants dès les premiers

essais.

Nous allons donc définir une fonctionnelle de la trajectoire qui mesure sa "qualité" au vu de l'objectif poursuivi.

On définit pour cela une fonction de la distance sonde-astéroïde qui est minimale pour une distance nulle, qui est voisine de zéro pour une distance élevée et qui est continue et dérivable. Il faut aussi que cette fonction soit monotone croissante sur  $]0, +\infty[$ .

Nous avons choisi la famille de fonctions:

$$\phi_\epsilon(r) = -e^{-\frac{r^2}{\epsilon}} \quad (2.1)$$

Désignons par  $r_k(t)$  la distance de la sonde à l'astéroïde  $k$

$$r_k(t) = \|a_k(t) - x(t)\| \quad (2.2)$$

Il est alors possible de définir un critère d'approche des  $N$  astéroïdes pris en considération, qui sera fonction de l'accélération  $\gamma(t)$  fournie à la sonde par ses moyens de propulsion et de la vitesse initiale  $v_0$

$$J_\epsilon(\gamma, v_0) = \sum_k \phi_\epsilon \left( \min_{t \in [t_0, T]} r_k(t) \right) = \sum_k \min_{t \in [t_0, T]} \phi_\epsilon(r_k(t)). \quad (2.3)$$

## 2.2 Le gradient du critère relatif à l'accélération

Pour une accélération  $\gamma(t)$  connue sur la durée de la mission et une valeur de  $v_0$  choisie, l'instant  $t_{m_k}$  de la meilleure approche de l'astéroïde  $k$  par la sonde est génériquement défini de façon unique.

Le théorème de Danskin permet alors d'écrire:

$$\nabla J(\gamma, v_0) = \sum_k \nabla \phi_\epsilon(r_k(t_{m_k})) \quad (2.4)$$

"ignorant", donc, la dépendance des  $t_{m_k}$  par rapport aux variables de décision. Le calcul de  $\nabla_\gamma \phi_\epsilon(r_k(t_{m_k}))$  peut se faire en utilisant l'état adjoint.

D'une façon générale, si  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^m$  sont tels que  $\dot{x} = f(x, \gamma, t)$  et si on s'intéresse au critère  $K(x(t^*))$  avec  $t^*$  fixe, on peut définir  $\lambda(t)$  tel que:

1.

$$\lambda(t) \in \mathbb{R}^n,$$

2.

$$\lambda^t(t^*) = \frac{\partial K}{\partial x}(x(t^*)),$$

3.

$$\dot{\lambda}^t = -\lambda^t \frac{\partial f}{\partial x},$$

4. Le gradient de  $K$  relatif à  $\gamma$  est alors fourni par

$$\nabla_{\gamma} K = \lambda^t \frac{\partial f}{\partial \gamma}.$$

Dans notre cas, pour l'astéroïde  $k$ , remplaçons  $x^t$  par  $(x^t, v^t)$ ,  $\lambda^t$  par  $(\lambda_k^t, \mu_k^t)$  et  $K(x(t^*))$  par  $\phi_{\epsilon}(r_k(t_{m_k}))$ , l'équation (1.5) peut alors s'écrire sous la forme

$\dot{x} = f(x, \gamma, t)$  avec

$$f(x, v, \gamma) = (v, A(x) + \gamma(t)), \quad (2.5)$$

$\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}^3$  sont définis par les conditions initiales à l'instant  $t_{m_k}$

$$\begin{aligned} \lambda_k^t(t_{m_k}) &= \phi'_{\epsilon}(r_k(t_{m_k})) \frac{x^t(t_{m_k}) - a_k^t(t_{m_k})}{r_k(t_{m_k})}, \\ \mu_k^t(t_{m_k}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

et par le système différentiel:

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_k^t & \dot{\mu}_k^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_k^t \frac{\partial A}{\partial x} & -\lambda_k^t \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

La solution  $\mu_k(t)$  de ce système fournit alors:

$$\nabla_{\gamma} \phi_{\epsilon}(r_k(t)) = \begin{cases} \mu_k^t & , t \leq t_{m_k} \\ 0 & , t > t_{m_k} \end{cases} \quad (2.8)$$

En définissant  $\mu(t) = \sum_k \mu_k(t)$  et  $\lambda(t) = \sum_k \lambda_k(t)$  on obtient le gradient recherché:

$$\nabla_{\gamma} J(\gamma, v_0) = \mu^t,$$

avec

$$\mu(T) = 0, \mu(t) \text{ continu},$$

$$\lambda(T) = 0, \lambda^t(t_{m_k}^-) = \lambda^t(t_{m_k}^+) + \frac{2}{\epsilon} e^{-\frac{r_k^2(t_{m_k})}{\epsilon}} (x^t(t_{m_k}) - a_k^t(t_{m_k})),$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\mu}^t &= -\lambda^t, \\ \dot{\lambda}^t &= -\mu^t \frac{\partial A}{\partial x}. \end{aligned}$$



## 2.3 Le gradient du critère relatif à la vitesse initiale

On peut prouver (référence [1], p. 12-13) que le gradient du critère relatif à la vitesse initiale est fourni par la valeur de la fonction  $\mu(t)$  précédemment définie, à l'instant  $t_0$

$$\nabla_{v_0} J(\gamma, v_0) = \sum_k \mu_k^t(t_0) = \mu^t(t_0) \quad (2.9)$$

Désignons par  $\alpha_a$  et  $\beta_a$  les angles qui vont permettre, par deux rotations successives, autour de l'axe des  $z$  puis autour de l'axe des  $y$ , de définir un repère intermédiaire dont l'axe des  $x$  est orienté suivant le vecteur  $v_a$ .  $\alpha_a$  et  $\beta_a$  sont tels que:

$$v_a = \begin{bmatrix} \cos(\beta_a) \cos(\alpha_a) \\ \cos(\beta_a) \sin(\alpha_a) \\ \sin(\beta_a) \end{bmatrix} \|v_a\| \quad (2.10)$$

Il est alors possible de définir, dans ce repère intermédiaire, la vitesse de départ  $v_d$  relative à Mars, par deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  tels que:

$$v_d = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \cos(\alpha) \\ \sin(\beta) \sin(\alpha) \end{bmatrix} \|v_a\| \quad (2.11)$$

dans ce repère.

Désignons par  $M$  la matrice de transformation qui permet de passer de ce repère au repère de l'écliptique

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_a) \cos(\beta_a) & -\sin(\alpha_a) & -\cos(\alpha_a) \sin(\beta_a) \\ \sin(\alpha_a) \cos(\beta_a) & \cos(\alpha_a) & -\sin(\alpha_a) \sin(\beta_a) \\ \sin(\beta_a) & 0 & \cos(\beta_a) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Il est alors possible d'exprimer le gradient de  $J$  relativement à  $\alpha$  et  $\beta$

$$\nabla_{\alpha} J = \nabla_{v_0} J \frac{\partial v_0}{\partial \alpha} = \mu^t(t_0) M \frac{\partial v_d}{\partial \alpha} \quad (2.13)$$

avec  $\partial v_d / \partial \alpha$  exprimé dans le repère intermédiaire comme suit:

$$\frac{\partial v_d}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \sin(\beta) \end{bmatrix} \|v_a\| \quad (2.14)$$

de même pour  $\beta$

$$\nabla_{\beta} J = \mu^t(t_0) M \frac{\partial v_d}{\partial \beta} \quad (2.15)$$

avec

$$\frac{\partial v_d}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} -\sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \|v_a\| \quad (2.16)$$

## 2.4 Les contraintes

Nous dualisons la contrainte isopérimétrique (de "budget") 1.3, tandis que les contraintes 1.1 et 1.4 seront traitées par projection. On définit le lagrangien du problème  $L_u(\gamma, v_0)$  comme suit:

$$L_u(\gamma, v_0) = J(\gamma, v_0) + u \int_{t_0}^{t_0+\Delta T} \|\gamma(t)\| dt$$

On calcule le gradient de  $L_u(\gamma, v_0)$  relativement à  $\gamma$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , puis on fait évoluer, dans les directions fournies par le calcul des gradients,  $\gamma$  en tenant compte de la contrainte (1.4),  $\alpha$  sans contrainte et  $\beta$  en respectant (1.1).

Faire évoluer  $\gamma$  en tenant compte de la contrainte (1.4) qui limite la poussée instantanée, peut se faire en projetant  $\gamma$  sur la boule de rayon  $\Gamma$  après chaque incrément, ce qui se fait simplement en appliquant la fonction  $P(\gamma)$ :

$$P(\gamma) = \begin{cases} \gamma & \text{si } \|\gamma\| \leq \Gamma \\ \frac{\gamma}{\Gamma} & \text{sinon} \end{cases}$$

Faire évoluer  $\beta$  en tenant compte de la contrainte (1.1) qui maintient la vitesse de départ relative à Mars dans un cône, se fait simplement en limitant  $\beta$  à  $\beta_{max}$

$$\beta \leq \beta_{max}$$

La contrainte (1.3) limitant la quantité de carburant disponible pour la mission sera respectée en ajustant la valeur de la variable duale  $u$  utilisée pour définir  $L_u(\gamma, v_0)$ , de façon à faire peser le coût, estimé en carburant consommé, suffisamment pour ne pas dépasser le budget  $B$  accordé à la mission.

## Chapitre 3

# La parallélisation du problème

On cherche d'abord à minimiser le critère  $J(\gamma, v_0)$ , sans contraintes, en faisant évoluer  $\gamma$  et  $v_0$  dans la direction fournie par  $\nabla_\gamma J$  et  $\nabla_{v_0} J$  jusqu'à l'obtention d'un minimum, puis on calcule, pour ces nouvelles valeurs de  $\gamma$  et  $v_0$ , à nouveau les gradients  $\nabla_\gamma J$  et  $\nabla_{v_0} J$  jusqu'à ce que le nouveau minimum obtenu ne diffère du précédent que d'un ordre de grandeur comparable à la précision du calcul de  $J$ .

L'opération la plus coûteuse en calcul dans ces itérations est l'évaluation de la fonction  $\mu(t)$ , nécessaire au calcul des gradients de  $J$ , par intégration numérique des équations différentielles fournies au chapitre précédent.

On voit en fait que l'incrément à fournir à  $\lambda(t)$  à chaque instant  $t_{m_k}$ , nécessite de pouvoir calculer pour chaque astéroïde pris en considération, pour la valeur courante de  $\gamma$  et  $v_0$ , l'instant de la meilleure approche par la sonde et l'incrément de  $\lambda$  à cet instant qui ne dépend que de la position de la sonde et de l'astéroïde.

Le temps nécessaire au calcul de ces incréments a conduit les études précédentes (référence [1] et [2]) à se limiter à quelques astéroïdes.

La disponibilité d'une machine massivement parallèle nous a conduit à associer un processeur à chaque astéroïde pris en considération et à réaliser l'intégration numérique de  $(\lambda, \mu)$  sur la machine frontale en procédant comme suit.

Désignons par  $h$  le pas de temps qui sera utilisé pour l'intégration de  $(\lambda, \mu)$  (5 jours dans notre implémentation) et par  $P$  le nombre total de pas de temps pour couvrir la durée de la mission (200), par  $K$  le nombre total d'astéroïdes pris en considération (4192).

On commence par calculer en parallèle, sur  $K$  processeurs, la trajectoire des  $K$  astéroïdes pris en considération et on mémorise dans la mémoire locale à chaque processeur les  $P$  positions  $a_k(t_i)$  occupées par l'astéroïde  $k$  à l'instant  $i$ .

Pour une valeur de  $\gamma$  et  $v_0$  connues, on calcule, sur le frontal, la trajectoire de la sonde, et on envoie à chaque pas de temps  $i$  la position  $x(t_i)$  de la sonde à chacun des  $K$  processeurs qui calculent alors la distance  $r_k(t_i)$  et la comparent avec le minimum précédemment atteint. Cette opération permet de mémoriser dans chacun des  $K$  processeurs, l'instant  $t_{m_k}$  de la meilleure approche, ainsi que la position de l'astéroïde  $a_k(t_{m_k})$  à cet instant et la distance à la sonde  $r_k(t_{m_k})$ .

On peut alors commencer l'intégration numérique de  $(\lambda, \mu)$  sur le frontal. À

chaque pas de temps  $i$  on valide les processeurs associés aux astéroïdes qui ont atteint leur meilleure approche à cet instant, on calcule les incréments à  $\lambda$  pour ces astéroïdes et on ramène leur somme sur le frontal pour incrémenter  $\lambda$  en cours d'intégration.

$$\lambda^i(t_i^-) = \lambda^i(t_i^+) + \sum_{k \in K_i} \frac{2}{\epsilon} e^{-\frac{r_k^2(t_{mk})}{\epsilon}} \left( x^i(t_{mk}) - a_k^i(t_{mk}) \right),$$

$K_i$  désignant l'ensemble des astéroïdes qui ont atteint leur meilleure approche à l'instant  $i$ .

Insistons sur le fait que dans cette implémentation, il n'y a plus rien à gagner à chercher à éliminer à l'avance les astéroïdes qui sont si loin de la trajectoire qu'ils n'interviennent ni dans la valeur du critère ni dans celle de son gradient. Le poids du grand nombre d'astéroïdes est entièrement parallélisé. Éviter cette recherche a priori est essentiel, car elle était, dans les implémentations séquentielles, très longue et passablement arbitraire. Qui plus est, elle est dépendante des conditions initiales de l'algorithme de descente, que nous voulons faire varier.

# Chapitre 4

## quelques résultats

### 4.1 Valeurs initiales

Les valeurs numériques utilisées pour la résolution de ce problème sont les mêmes que celles utilisées par J.G. Braker (référence [1]) et B. Chayla (référence [2]).

En voici un rappel rapide.

Instant initial:

$$t_0 = 15 \text{ Octobre } 1997 = \text{Jour Julien } 17454 .$$

Position initiale:

$$x_0 = \begin{bmatrix} -1.3845 \\ 0.9214 \\ 0.0533 \end{bmatrix} \text{ Unités Astronomiques.}$$

Vitesse de mars à l'instant  $t_0$ :

$$v_M = \begin{bmatrix} -12.4786 \\ -18.1218 \\ -0.0777 \end{bmatrix} \text{ km/sec .}$$

Vitesse d'arrivée de la sonde à l'instant  $t_0$ , relative à Mars:

$$v_a = \begin{bmatrix} -1.499 \\ 3.047 \\ -2.786 \end{bmatrix} \text{ km/sec .}$$

Ouverture du cône d'axe  $v_a$  contenant  $v_d$ :

$$\beta_{max} = 45 \text{ deg.}$$

Durée totale de la mission:

$$\Delta T = 1000 \text{ jours.}$$

Budget de la mission:

$$B = 0.7 \text{ km/s.}$$

## 4.2 minimisation sans contraintes

### 4.2.1 évolution de $v_0$ et contrôle de la précision

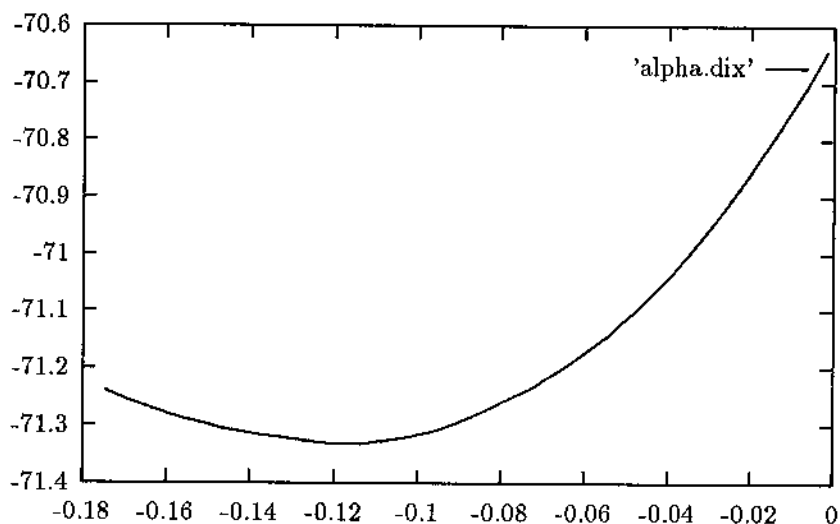


Figure 4.1:  $J$  en fonction de  $\alpha$  pour  $\beta = \beta_{max}$ ,  $\gamma(t) = 0$ , au voisinage du minimum.

Si on cherche à faire évoluer  $v_0$  seulement, en laissant  $\gamma$  nul, on s'aperçoit que l'angle  $\beta$  atteint sa valeur limite  $\beta_{max}$  avant que le critère  $J$  atteigne son minimum.

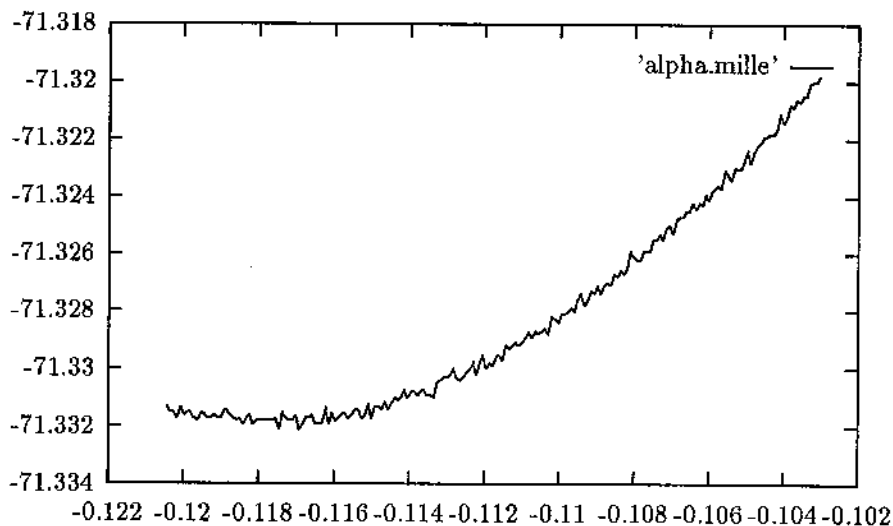


Figure 4.2:  $J$  en fonction de  $\alpha$  pour  $\beta = \beta_{max}$ ,  $\gamma(t) = 0$ , faibles variations de  $\alpha$ .

Il est alors intéressant de calculer les valeurs de  $J$  pour diverses valeurs de  $\alpha$ ,

avec  $\beta = \beta_{max}$  et  $\gamma(t) = 0$ . La figure 4.1 représente la variation de  $J$  pour  $\alpha$  variant de  $-10$  degré à  $0$  degré par pas de  $.1$  degré.

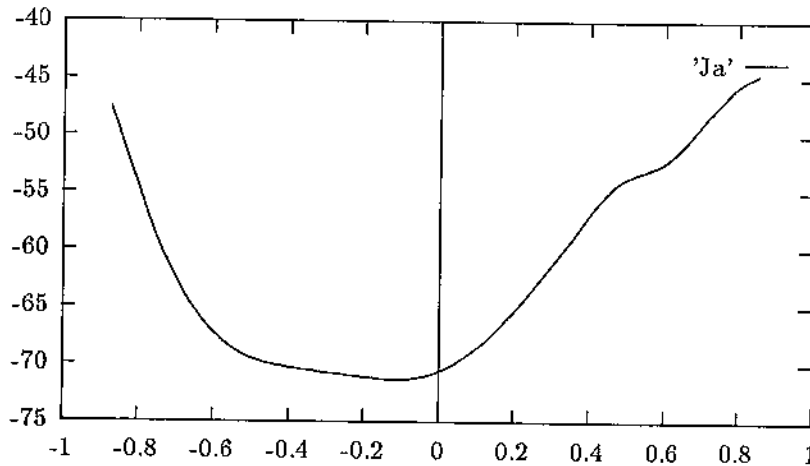


Figure 4.3:  $J$  fonction de  $\alpha$  pour  $\beta = \beta_{max}$ ,  $\gamma(t) = 0$ ,  $\alpha$  variant de  $-50^\circ$  à  $+50^\circ$ .

La figure 4.2 montre les variations de  $J$  dans les mêmes conditions pour  $\alpha$  variant de  $-6.9$  degré à  $-5.9$  degré par pas de  $.005$  degré. Les petites variations de  $J$  perceptibles sur cette figure permettent d'estimer les valeurs à affecter à la limite inférieure des variations de  $J$  pour décider l'arrêt des itérations. On peut s'assurer que ces variations ne sont pas dûes à des minima locaux en calculant le gradient de  $J$  relatif à  $\alpha$  sur le même intervalle.

Le gradient de  $J$  relatif à  $\alpha$  est obtenu à partir de  $\mu(t_0)$ , lequel résulte de l'intégration numérique d'un système différentiel en  $(\lambda, \mu)$  par valeurs décroissantes de  $t$ , il paraît donc intéressant d'utiliser comme moyen de contrôle, une comparaison du gradient ainsi calculé avec celui obtenu par différences finies sur les valeurs de  $J$  calculée pour  $\beta$  et  $\gamma(t)$  fixes.

La figure 4.3 montre les variations de  $J$  pour  $\beta = \beta_{max}$ ,  $\gamma(t) = 0$ ,  $\alpha$  variant de  $-50^\circ$  à  $+50^\circ$ .

La figure 4.4 représente le gradient de  $J$  relatif à  $\alpha$  calculé par intégration numérique du système en  $(\lambda, \mu)$ , pour  $\beta = \beta_{max}$ ,  $\gamma(t) = 0$ ,  $\alpha$  variant de  $-50^\circ$  à  $+50^\circ$ .

La figure 4.5 représente le gradient de  $J$  relatif à  $\alpha$  obtenu par différences finies en utilisant les valeurs de  $J$  qui ont servi à représenter la figure 4.3

De même les figures 4.6, 4.7 et 4.8 représentent les variations de  $J$  et de  $\nabla_\beta J$  pour  $\alpha = -20^\circ$ ,  $\gamma(t) = 0$ ,  $\beta$  variant de  $0$  à  $\beta_{max}$ . Le calcul de  $\nabla_\beta J$  représenté par la figure 4.7 est réalisé par intégration numérique du système en  $(\lambda, \mu)$ , alors que les valeurs utilisées pour la figure 4.8 sont obtenues directement à partir de valeurs de  $J$  calculées.

La figure 4.6 montre également que la fonction  $J$  présente un minimum local qui "piège" la recherche du minimum en évoluant dans les directions fournies par les gradients.

#### 4.2.2 évolution de $v_0$ et $\gamma(t)$

Les figures 4.9 et 4.10 représentent la projection sur le plan de l'écliptique de la trajectoire obtenue en prenant .0005 comme limite inférieure de variation de  $J$  pour test d'arrêt. Les calculs sont fait avec  $\epsilon = .1$ . La valeur de  $J$  correspondant à la trajectoire représentée est  $J = -198.0654$  et on arrive à cette solution après 8 calculs successifs des gradients de  $J$ . Sur les figures 4.10 et 4.11 la position de tous les astéroïdes pris en considération, à l'instant  $t_0$  est également représentée.

La liste suivante fournit les astéroïdes approchés à moins d'un dixième d'unité astronomique par cette trajectoire ainsi que la distance et la date de la meilleure approche.

```
23 asteroides approches a moins de 0.1 UA
ast 2231, r = 0.0108028 UA au jour julien 17994
ast 172, r = 0.013792 UA au jour julien 18089
ast 1325, r = 0.0229372 UA au jour julien 17714
ast 25, r = 0.0254045 UA au jour julien 17614
ast 292, r = 0.0312752 UA au jour julien 18059
ast 2157, r = 0.037188 UA au jour julien 18064
ast 3029, r = 0.0418407 UA au jour julien 17554
ast 2105, r = 0.04844 UA au jour julien 18014
ast 2529, r = 0.0518844 UA au jour julien 18389
ast 2539, r = 0.0547965 UA au jour julien 18384
ast 715, r = 0.0630209 UA au jour julien 18004
ast 2159, r = 0.0685187 UA au jour julien 17649
ast 1198, r = 0.0727071 UA au jour julien 17654
ast 1250, r = 0.0825606 UA au jour julien 18049
ast 2113, r = 0.0934348 UA au jour julien 17684
ast 84, r = 0.0965359 UA au jour julien 18099
ast 424, r = 0.0988974 UA au jour julien 18234
ast 473, r = 0.0988974 UA au jour julien 18234
ast 719, r = 0.0988974 UA au jour julien 18234
ast 724, r = 0.0988974 UA au jour julien 18234
ast 878, r = 0.0988974 UA au jour julien 18234
ast 1026, r = 0.0988974 UA au jour julien 18234
ast 1179, r = 0.0988974 UA au jour julien 18234
```



### 4.3 minimisation avec contraintes

On rappelle que la méthode proposée pour tenir compte de la quantité de carburant disponible pour la mission consiste à minimiser

$$L_u(\gamma, v_0) = J_c(\gamma, v_0) + u \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} \|\gamma(t)\| dt$$

On calcule alors les gradients de  $L_u(\gamma, v_0)$  relativement à  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , puis on fait évoluer ces variables dans la direction fournie par le calcul du gradient correspondant, en limitant leurs valeurs pour tenir compte du cône dans lequel la vitesse initiale doit rester, et de la puissance instantanée maximale.

La valeur limite de  $\beta$  utilisée pour les calculs est  $\beta_{max} = 45$  degrés.

Le budget de la mission, fournissant la consommation maximale autorisée, est  $B = 0.7$  km/s.

La puissance instantanée maximale est choisie en utilisant un coefficient  $G$ , par lequel il faudrait multiplier le budget pour trouver la consommation d'une mission utilisant constamment la puissance instantanée maximale, soit:

$$\Gamma = B * G/T$$

On a choisi  $G = 10$  pour les calculs présentés ici.

La valeur de  $\epsilon$  pour l'évaluation de  $J_c(\gamma, v_0)$  a été affectée à 0.1

La variable duale  $u$  doit être ajustée de façon à faire peser suffisamment le coût de mission, estimé en carburant consommé, dans la fonction à minimiser, pour ne pas dépasser le budget limité à 0.7 km/s.

On s'aperçoit en fait que la valeur initiale de  $\alpha$ , dans la mesure où elle est affectée à une valeur pas trop éloignée de 0 (à peu près entre  $-20^\circ$  et  $+20^\circ$ ), s'écarte peu de sa valeur initiale, alors que  $\beta$  se rapproche de  $\beta_{max}$  et l'atteint pour certaines valeurs initiales de  $\alpha$ .

Les trajectoires obtenues dépendent ainsi du choix initial de  $\alpha$ .

#### 4.3.1 $\alpha_{initial} = -20^\circ$

Voici, pour un choix de  $\alpha$  initial égal à  $-20^\circ$ , et  $\beta$  initial égal à  $\beta_{max}$  la consommation et la valeur de  $J_{0.1}(\gamma, v_0)$  de la trajectoire optimale pour différentes valeurs de  $u$ :

$u$	consommation	$J_{0.1}(\gamma, v_0)$	nb. $\nabla L$	ast. à .1 UA	$\alpha$	$\beta$
5	1.448	-88.44	6	10	-19.556	44.045
8	0.817	-81.95	11	11	-19.675	44.186
8.5	0.723	-80.84	10	9	-19.702	44.242
8.75	0.698	-80.53	12	9	-19.711	44.249
9	0.667	-80.08	8	9	-19.728	44.284
10	0.407	-76.56	11	6	-19.842	44.54

Le temps de calcul de chacune de ces solutions dépend essentiellement du nombre de calculs de gradient de  $L$  nécessaires pour converger. Il est de l'ordre de une minute pour 8 calculs de gradients. On voit que les solutions qui correspondent à une consommation acceptable, de l'ordre de 0.7 nécessitent ici 9 calculs de gradient.

La solution de consommation 0.698, obtenue pour  $u = 8.75$ , permet d'approcher 9 astéroïdes à moins d'un dixième d'unité astronomique. Ce sont les astéroïdes suivants:

9 asteroïdes approches a moins de 0.1 UA  
 ast 1274,  $r = 0.0290299$  UA au jour julien 18449  
 ast 477,  $r = 0.0371238$  UA au jour julien 17864  
 ast 2236,  $r = 0.0385085$  UA au jour julien 17699  
 ast 1704,  $r = 0.0587001$  UA au jour julien 18439  
 ast 1885,  $r = 0.0681762$  UA au jour julien 18054  
 ast 2815,  $r = 0.0708905$  UA au jour julien 17974  
 ast 810,  $r = 0.0733352$  UA au jour julien 17994  
 ast 2609,  $r = 0.0769704$  UA au jour julien 18454  
 ast 3029,  $r = 0.0859687$  UA au jour julien 17619

#### 4.3.2 $\alpha_{initial} = 0^\circ$

Le tableau suivant présente le même type de résultats pour un choix de  $\alpha$  initial égal à  $0^\circ$  et  $\beta$  initial égal à  $\beta_{max}$ .

$u$	consommation	$J_{0.1}(\gamma, v_0)$	nb. $\nabla L$	ast. à .1 UA	$\alpha$	$\beta$
5	4.128	-101.16	4	14	0.577	44.308
5.5	1.760	-95.26	19	12	-1.253	45
5.6	1.722	-94.96	17	15	-1.574	45
5.7	0.472	-79.35	4	9	0.063	44.774
6	0.469	-79.31	3	9	0.061	44.774
7	0.450	-79.07	4	9	0.058	44.770
8	0.411	-78.59	4	7	0.053	44.984
10	0.378	-78.15	4	5	0.048	44.982

On voit ici qu'une faible variation de  $u$ , de 5.6 à 5.7, fait décroître brusquement la consommation, et aussi le nombre d'astéroïdes approchés à moins d'un dixième d'unité astronomique. Ce changement de trajectoire correspond à une variation de  $v_0$  comme le montrent les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  présentées dans le tableau.

La solution de consommation 0.472, obtenue pour  $u = 5.7$ , permet d'approcher les 9 astéroïdes suivants:

9 asteroïdes approches a moins de 0.1 UA  
 ast 3029,  $r = 0.0287882$  UA au jour julien 17604  
 ast 1704,  $r = 0.0613435$  UA au jour julien 18454  
 ast 1274,  $r = 0.0684065$  UA au jour julien 18454

ast 843,  $r = 0.0692449$  UA au jour julien 17724  
 ast 1885,  $r = 0.0767456$  UA au jour julien 18034  
 ast 1088,  $r = 0.0778076$  UA au jour julien 17869  
 ast 2129,  $r = 0.0861425$  UA au jour julien 17914  
 ast 2815,  $r = 0.0924648$  UA au jour julien 17954  
 ast 326,  $r = 0.0994942$  UA au jour julien 17659

### 4.3.3 $\alpha_{initial} = 20^\circ$

Voici un tableau présentant des résultats pour un choix de  $\alpha$  initial égal à  $+20^\circ$  et  $\beta$  initial égal à  $\beta_{max}$ .

$u$	consommation	$J_{0,1}(\gamma, v_0)$	nb. $\nabla L$	ast. à .1 UA	$\alpha$	$\beta$
5	1.52	-91.44	4	8	19.362	42.927
10	1.458	-90.57	4	7	19.374	42.865
20	1.00	-84.68	6	5	19.554	45
22	0.95	-83.56	8	5	19.559	45
23	0.925	-82.95	7	7	19.559	45
23.25	0.91	-82.80	6	7	19.559	45
23.4	0.00004	-59.16	1	4	20	45
23.5	0.00004	-59.16	1	4	20	45
24	0.00004	-59.16	1	4	20	45
25	0.00004	-59.16	1	4	20	45

On constate ici une discontinuité encore plus importante quand  $u$  passe de 23.25 à 23.4, qui correspond à un changement de trajectoire. Voici les astéroïdes approchés pour  $u = 23.25$ :

7 asteroïdes approches a moins de 0.1 UA

ast 326,  $r = 0.0441693$  UA au jour julien 17649  
 ast 1451,  $r = 0.0561916$  UA au jour julien 18414  
 ast 3029,  $r = 0.0847804$  UA au jour julien 17594  
 ast 1527,  $r = 0.0903177$  UA au jour julien 17929  
 ast 2491,  $r = 0.0930014$  UA au jour julien 18289  
 ast 3005,  $r = 0.0963281$  UA au jour julien 18439  
 ast 1025,  $r = 0.0998332$  UA au jour julien 18364

et voici ceux approchés pour  $u = 23.4$ :

4 asteroïdes approches a moins de 0.1 UA

ast 326,  $r = 0.0254538$  UA au jour julien 17649  
 ast 1065,  $r = 0.0681205$  UA au jour julien 17934  
 ast 3216,  $r = 0.070703$  UA au jour julien 17924  
 ast 3029,  $r = 0.0910896$  UA au jour julien 17594

#### 4.3.4 $\alpha_{initial} = -6.7^\circ$

On présente enfin les résultats obtenus en choisissant comme valeurs initiales de  $\alpha$  et  $\beta$ , celles qui ont minimisées  $J$  quand on ne faisait évoluer que  $v_0$ , en conservant  $\gamma(t) = 0$ , soit  $\alpha = -6.7$  degrés et  $\beta = 45$  degrés:

$u$	consommation	$J_{0.1}(\gamma, v_0)$	nb. $\nabla L$	ast. à .1 UA	$\alpha$	$\beta$
7	3.34	-102.30	10	14	-5.772	45
7.5	3.10	-100.52	8	12	-5.779	44.999
7.51	3.10	-100.55	10	12	-5.779	45
7.52	0.524	-79.29	4	9	-6.544	44.945
7.55	0.516	-79.17	4	9	-6.548	44.949
7.6	0.51	-79.09	4	9	-6.549	44.950
8	0.50	-78.95	4	9	-6.552	44.952

Ici encore la baisse de consommation présente une discontinuité qui correspond à un changement de trajectoire. Voici les 12 astéroïdes approchés à moins de 0.1 UA par la trajectoire obtenue pour  $u = 7.51$ :

12 asteroides approches a moins de 0.1 UA  
 ast 2815,  $r = 0.0127381$  UA au jour julien 17964  
 ast 3029,  $r = 0.0288475$  UA au jour julien 17609  
 ast 1697,  $r = 0.0402477$  UA au jour julien 18339  
 ast 1885,  $r = 0.0442863$  UA au jour julien 18079  
 ast 3067,  $r = 0.0472069$  UA au jour julien 18249  
 ast 970,  $r = 0.058335$  UA au jour julien 18229  
 ast 1530,  $r = 0.0610188$  UA au jour julien 18109  
 ast 3022,  $r = 0.0676218$  UA au jour julien 18054  
 ast 477,  $r = 0.0749868$  UA au jour julien 17819  
 ast 2406,  $r = 0.0840551$  UA au jour julien 18439  
 ast 1088,  $r = 0.0855851$  UA au jour julien 18264  
 ast 843,  $r = 0.092421$  UA au jour julien 17734

et voici ceux approchés par la trajectoire correspondant à une consommation admissible, obtenue pour  $u = 7.52$ :

9 asteroides approches a moins de 0.1 UA  
 ast 3029,  $r = 0.0356567$  UA au jour julien 17609  
 ast 1274,  $r = 0.0384607$  UA au jour julien 18454  
 ast 1704,  $r = 0.0572817$  UA au jour julien 18454  
 ast 1088,  $r = 0.0628997$  UA au jour julien 17874  
 ast 2815,  $r = 0.0751987$  UA au jour julien 17959  
 ast 1885,  $r = 0.0761628$  UA au jour julien 18039  
 ast 843,  $r = 0.0800026$  UA au jour julien 17734  
 ast 477,  $r = 0.0907561$  UA au jour julien 17809  
 ast 2129,  $r = 0.0910196$  UA au jour julien 17924

### 4.3.5 $\epsilon = 0.01$

La dernière trajectoire présentée, correspondant à une consommation admissible de  $0.524 \text{ km/s}$ , peut être utilisée comme solution de départ pour la recherche d'une nouvelle trajectoire.

On utilise les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  obtenues pour cette trajectoire, comme valeurs initiales pour de nouveaux calculs avec une valeur de  $\epsilon$  (pour le calcul de  $J_\epsilon(\gamma, v_0)$ ) plus petite. Ce qui revient à faire évoluer la trajectoire en ne prenant en considération que les astéroïdes pour lesquels une bonne approche a été obtenue.

En évoluant à partir de la trajectoire indiquées ci dessus, avec une nouvelle valeur de  $\epsilon = 0.01$ , il faut déterminer une nouvelle valeur de  $u$  (puisque la fonction  $J_\epsilon$  n'est plus la même), qui permette une bonne approche sans dépasser le budget. Le tableau qui suit montre quelques essais pour plusieurs valeurs de  $u$ .

$u$	consommation	$J_{0.01}(\gamma, v_0)$	nb. $\nabla L$	ast. à .1 UA	$\alpha$	$\beta$
2	2.145	-13.75	4	18	-6.518	44.382
2.1	2.144	-13.82	4	18	-6.520	44.393
2.2	0.354	-8.93	5	9	-6.585	45
2.5	0.364	-8.93	4	9	-6.579	45
3	0.364	-8.92	5	9	-6.577	45
4	0.381	-8.87	3	9	-6.571	45
5	0.306	-8.34	5	8	-6.572	45

Voici la liste des 18 astéroïdes approchés par la trajectoire obtenue pour  $u = 2.1$ :

18 asteroïdes approches a moins de 0.1 UA  
 ast 1088,  $r = 0.0135437$  UA au jour julien 17854  
 ast 1399,  $r = 0.0279825$  UA au jour julien 18049  
 ast 1876,  $r = 0.0289391$  UA au jour julien 18359  
 ast 3029,  $r = 0.0383345$  UA au jour julien 17604  
 ast 2129,  $r = 0.0522644$  UA au jour julien 17899  
 ast 1943,  $r = 0.0526219$  UA au jour julien 18169  
 ast 916,  $r = 0.0527357$  UA au jour julien 17939  
 ast 249,  $r = 0.0569075$  UA au jour julien 18029  
 ast 750,  $r = 0.0631846$  UA au jour julien 18444  
 ast 1526,  $r = 0.0699628$  UA au jour julien 18234  
 ast 2750,  $r = 0.0797341$  UA au jour julien 18404  
 ast 477,  $r = 0.0821644$  UA au jour julien 17794  
 ast 1511,  $r = 0.082887$  UA au jour julien 18454  
 ast 337,  $r = 0.0838526$  UA au jour julien 18454  
 ast 2093,  $r = 0.0871353$  UA au jour julien 18019  
 ast 2236,  $r = 0.0904933$  UA au jour julien 17679  
 ast 843,  $r = 0.0925804$  UA au jour julien 17724  
 ast 679,  $r = 0.0960991$  UA au jour julien 17924

Et voici ceux approchés par la trajectoire obtenue pour  $u = 2.2$ , de consommation admissible:

9 asteroides approches a moins de 0.1 UA  
 ast 2129,  $r = 0.0353321$  UA au jour julien 17914  
 ast 3029,  $r = 0.0353372$  UA au jour julien 17604  
 ast 1088,  $r = 0.0381856$  UA au jour julien 17864  
 ast 916,  $r = 0.0514822$  UA au jour julien 17979  
 ast 1274,  $r = 0.0603468$  UA au jour julien 18454  
 ast 1944,  $r = 0.0617843$  UA au jour julien 18074  
 ast 2362,  $r = 0.0711697$  UA au jour julien 18039  
 ast 843,  $r = 0.0808498$  UA au jour julien 17729  
 ast 477,  $r = 0.0943196$  UA au jour julien 17799

#### 4.3.6 $\epsilon$ décroissant

On a calculé précédemment une trajectoire qui s'intéresse à une faible approche d'un grand nombre d'astéroïdes ( $\epsilon = 0.1$ ), puis on a fait évoluer cette trajectoire pour une meilleure approche d'un nombre d'astéroïdes plus réduit ( $\epsilon = 0.01$ ). Il n'est pas nécessaire de passer par une trajectoire intermédiaire respectant le budget, d'où l'idée d'itérer sur les calculs de trajectoire en décrémentant  $\epsilon$  et en utilisant la même valeur de  $u$  bien que la fonction  $J_\epsilon$  ne soit pas la même.

Voici les résultats obtenus en itérant sur 3 valeurs de  $\epsilon$ , 0.1, 0.01 et 0.001

$u$	consommation	$J_{0.001}(\gamma, v_0)$	ast. à .1 UA	$\alpha$	$\beta$
2	3.648	-106.75	14	-4.729	45
5	3.811	-104.19	12	-5.418	44.928
7	3.337	-102.28	14	-5.772	45
7.5	3.091	-100.44	12	-5.779	45
7.51	3.104	-100.54	12	-5.779	45
7.52	0.524	-79.29	9	-6.544	44.945
7.55	0.516	-79.17	9	-6.548	44.949
7.6	0.509	-79.10	9	-6.549	44.950
7.7	0.508	-79.08	9	-6.549	44.950
7.8	0.501	-79.02	9	-6.550	44.950
8	0.496	-78.94	9	-6.552	44.951
10	0.397	-77.74	9	-6.573	44.961

On voit qu'ici la consommation n'est plus rigoureusement une fonction monotone décroissante de  $u$ .

La trajectoire obtenue pour  $u = 7.52$ , pour laquelle la consommation est admissible, approche les astéroïdes suivants:

9 asteroides approches a moins de 0.1 UA  
 ast 3029,  $r = 0.0356567$  UA au jour julien 17609

ast 1274,  $r = 0.0384607$  UA au jour julien 18454  
ast 1704,  $r = 0.0572817$  UA au jour julien 18454  
ast 1088,  $r = 0.0628997$  UA au jour julien 17874  
ast 2815,  $r = 0.0751987$  UA au jour julien 17959  
ast 1885,  $r = 0.0761628$  UA au jour julien 18039  
ast 843,  $r = 0.0800026$  UA au jour julien 17734  
ast 477,  $r = 0.0907561$  UA au jour julien 17809  
ast 2129,  $r = 0.0910196$  UA au jour julien 17924

Une meilleure solution serait sans doute d'évaluer une nouvelle valeur de  $u$  pour chaque nouvelle valeur de  $\epsilon$ , sans pour autant limiter strictement la consommation au budget pour les premières valeurs de  $\epsilon$ , la diminution de consommation se faisant en diminuant le nombre d'astéroïdes auxquels on s'intéresse à chaque nouvelle itération sur  $\epsilon$ . On pourrait aussi envisager de faire décroître  $\epsilon$  régulièrement d'une itération à l'autre.

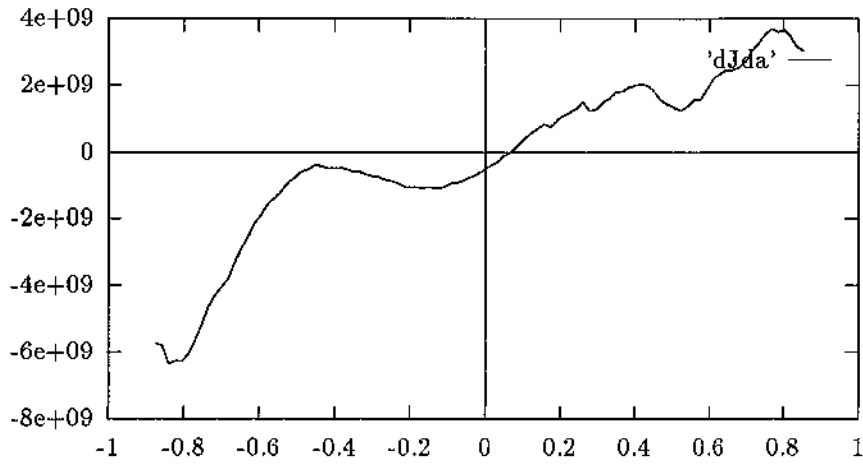


Figure 4.4:  $\nabla_{\alpha} J$  fonction de  $\alpha$  pour  $\beta = \beta_{max}$ ,  $\gamma(t) = 0$ ,  $\alpha$  variant de  $-50^{\circ}$  à  $+50^{\circ}$ .

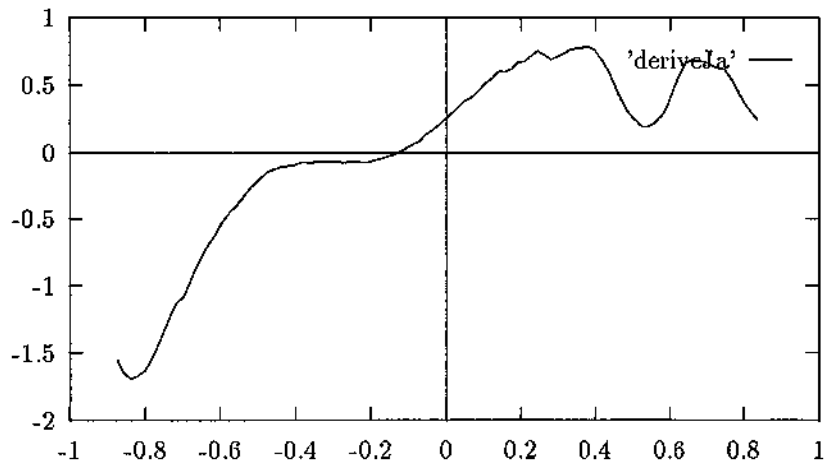


Figure 4.5:  $\nabla_{\alpha} J$  calculé à partir de  $J$ , pour  $\beta = \beta_{max}$ ,  $\gamma(t) = 0$ ,  $\alpha$  variant de  $-50^{\circ}$  à  $+50^{\circ}$ .



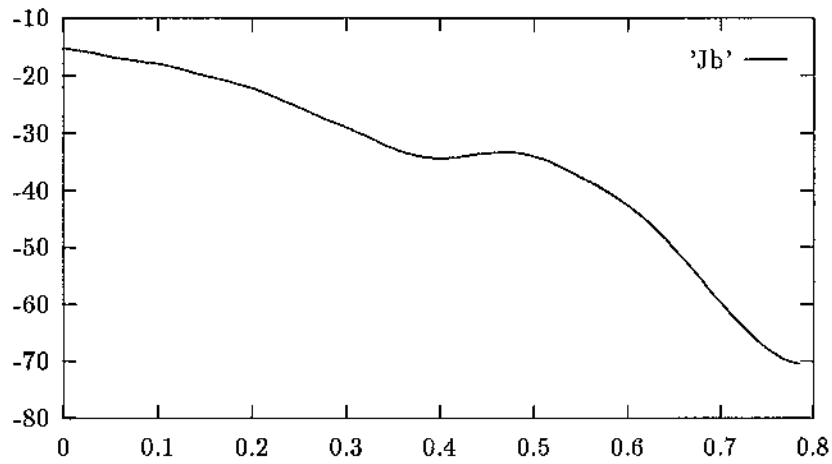


Figure 4.6:  $J$  fonction de  $\beta$  pour  $\alpha = -20^\circ$ ,  $\gamma(t) = 0$ ,  $\beta$  variant de 0 à  $\beta_{max}$ .

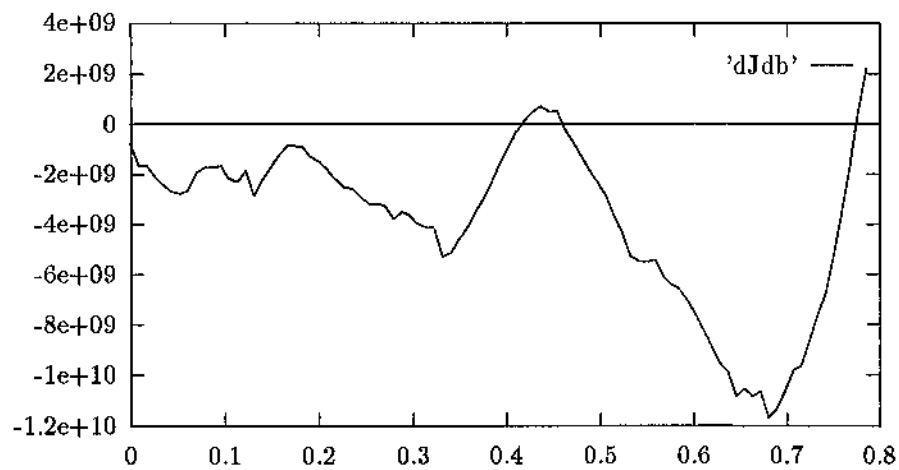


Figure 4.7:  $\nabla_{\beta} J$  fonction de  $\beta$  pour  $\alpha = -20^\circ$ ,  $\gamma(t) = 0$ ,  $\beta$  variant de 0 à  $\beta_{max}$ .

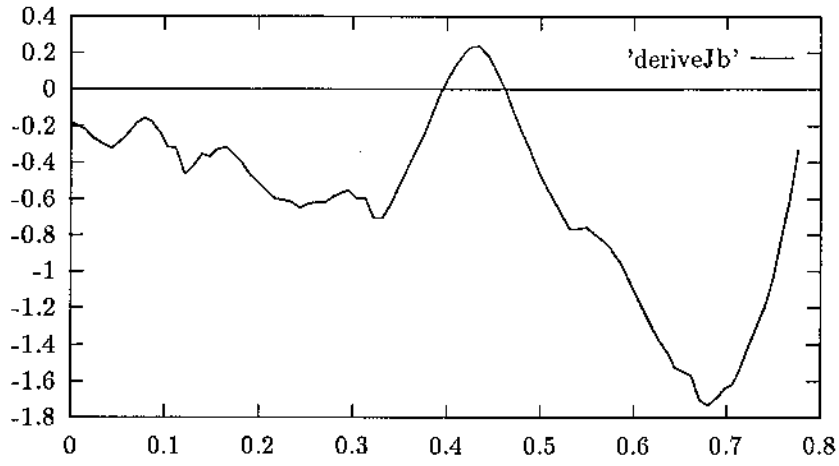


Figure 4.8:  $\nabla_{\beta} J$  calculé à partir de  $J$ , pour  $\alpha = -20^\circ$ ,  $\gamma(t) = 0$ ,  $\beta$  variant de 0 à  $\beta_{max}$ .

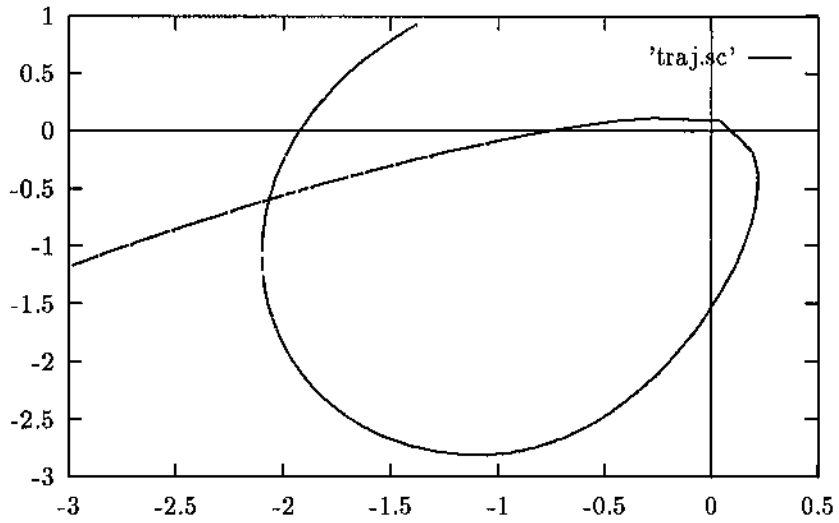


Figure 4.9: Trajectoire optimale sans contraintes.

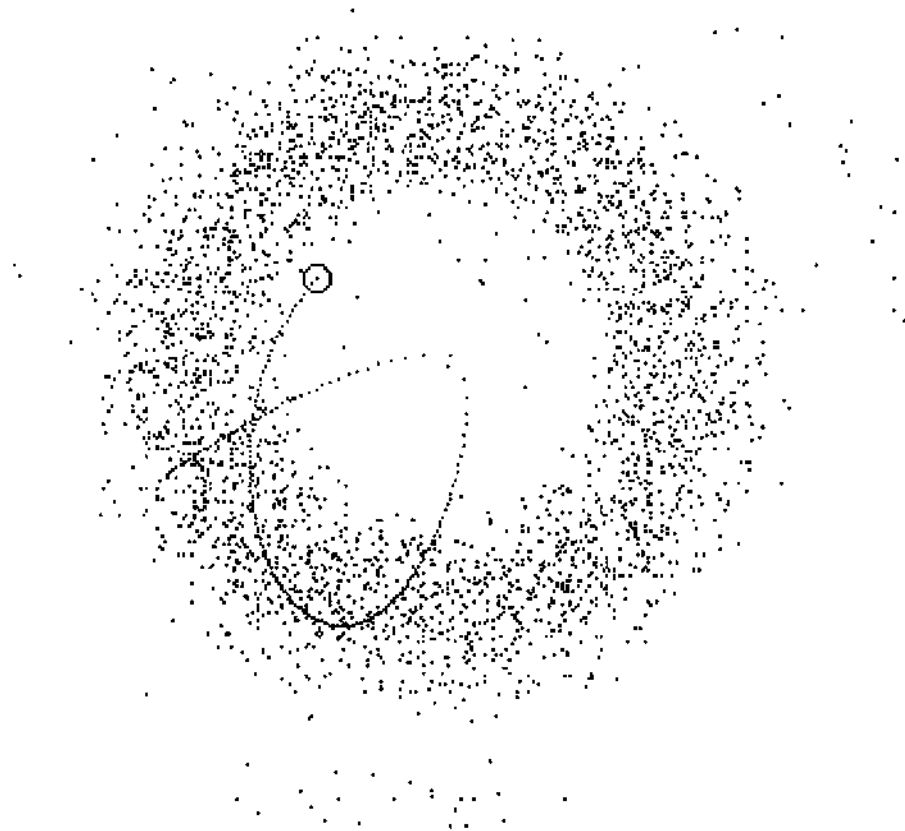


Figure 4.10: Trajectoire optimale sans contraintes.

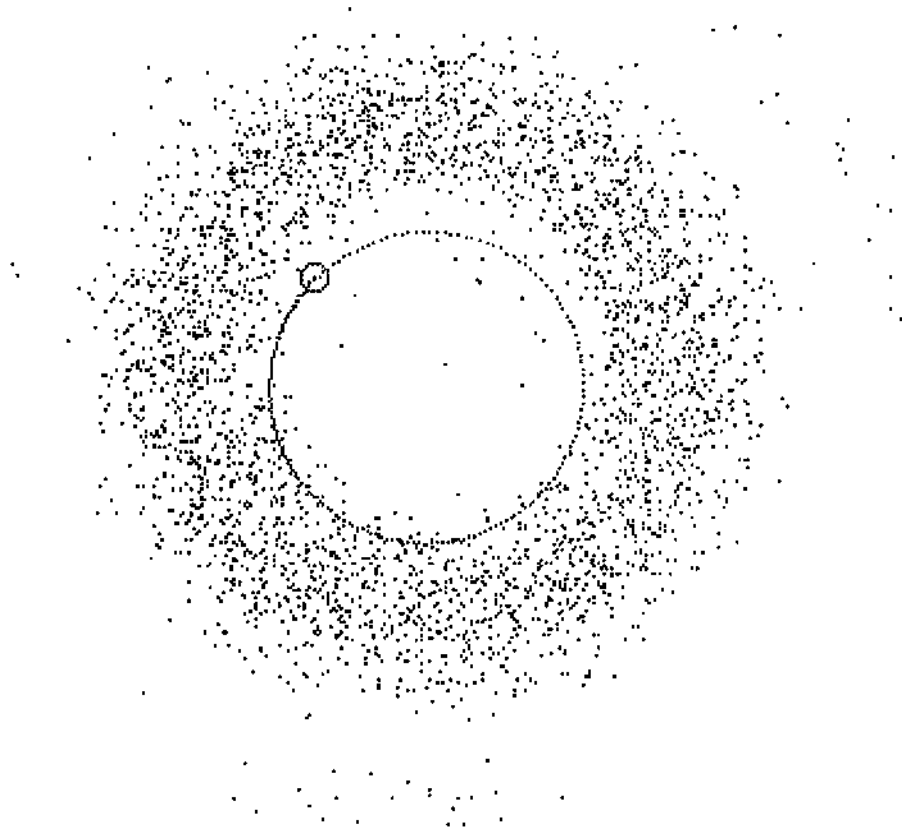


Figure 4.11: Trajectoire optimale avec contraintes.

# Chapitre 5

## Conclusion

On a seulement montré dans ce rapport que la méthode proposée marche, dans le sens où elle converge bien et permet de trouver des trajectoires faisables qui visitent plusieurs astéroïdes. Et aussi où l'utilisation d'une machine massivement parallèle la rend opérationnelle à relativement faible coût, même en présence de plusieurs milliers de corps.

Pour exploiter complètement cette méthode, il resterait du travail à faire.

D'une part, la méthode d'optimisation utilisée est très rustique : un algorithme de gradient avec recherche unidimensionnelle de pas. Il conviendrait d'examiner si on peut accélérer la recherche d'une bonne trajectoire par une technique de minimisation plus élaborée, (gradient conjugué avec lagrangien augmenté par exemple) comme cela a été commencé dans [2]. Ceci devrait améliorer la convergence finale de l'algorithme.

De même, il faut améliorer l'utilisation du paramètre  $\epsilon$  pour passer de la recherche "grossière" d'une "assez bonne" trajectoire à la recherche fine d'une trajectoire passant vraiment près des astéroïdes. Nous avons effleuré ce sujet au chapitre 4. Il y aurait beaucoup plus à faire. Encore faut-il rappeler que l'objectif de notre méthode n'est pas de calculer une mission précisément, mais seulement de déterminer une liste d'astéroïdes et leurs dates de survol. Ensuite, il conviendra d'utiliser des méthodes plus appropriées (résolution d'un problème de Lambert, programmation mathématique sur les dates de survol,...) pour affiner le calcul de mission.

Enfin, il convient de réfléchir à l'exploration de cette surface dont les minima suffisamment profonds correspondent à des trajectoires potentiellement intéressantes. Remarquons d'abord que le véritable objectif recherché n'est pas de trouver la plus longue liste d'astéroïdes visitables, mais un "dictionnaire" de bonnes trajectoires, parmi lesquelles choisir une mission en fonction d'autres considérations. Donc on pourrait, paradoxalement, conclure que le grand nombre de minima locaux est une bénédiction, car il donne un grand nombre d'articles dans le dictionnaire. Bien sûr, cela est excessif, dans la mesure où il y a *beaucoup trop* de minima locaux, dont certains sont sans doute sans intérêt. Ici il faudrait évoquer des méthodes de type "recuit simulé", et aussi utiliser plus de connaissance physique du problème.

Mais il reste que l'utilisation normale de notre méthode est de faire "tourner" le

programme avec des conditions initiales différentes un assez grand nombre de fois.

Au vu de ces remarques, nous considérons comme très encourageant que l'expérimentation numérique initiale ait donné des résultats positifs.

# Bibliographie

- [1] J. G. Braker. *Trajectory Determination for Multiple-Asteroid Flyby Mission 'VESTA' (1994)*. Engineer's thesis. University of Twente, The Netherlands Departement of Applied Mathematics, Group Systems and Control Theory. Performed at INRIA, Sophia Antipolis, FRANCE.
- [2] B. Chayla. *Recherche et optimisation de trajectoires interplanétaires, Mission 'VESTA' (1994)*. Ecole de Mines de Paris, projet de fin d'études. INRIA Sophia-Antipolis, 30 Juin 1989.
- [3] M. Crouzeix and A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*.
- [4] P. Bernhard. *Problème des Astéroïdes*. INRIA Sophia Antipolis, November 1987.
- [5] P. Henrici. *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [6] *VESTA Petits Corps, Analyse de Mission*. CNES Toulouse, March 1987.
- [7] *Dictionnaire des Visites d'Astéroïdes, Tome I - Algorithmes de Calcul*. CNES Toulouse, May 1982.