REVUE R.A.I.R.O. n° Juillet 1973 - J-2, Pages 63 à 85

ETUDE D'UNE FONCTION FREQUENTIELLE INTERVENANT DANS UN PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE AVEC UNE APPLICATION A LA REDUCTION DE LA TAILLE DE CE PROBLEME

P. BERNHARD (1) et G. COHEN (1)

Résumé. — *On étudie différentes questions relatives à une certaine fonction fréquentielle Γ calculée à partir des données d'un problème du régulateur (de dynamique linéaire). En particulier, on cherche les régulateurs de dynamique donnée conduisant à Γ, et on montre qu'ils ont même gain optimal. On étudie aussi les systèmes de dimension minimale conduisant à Γ. En application, on montre sous quelle condition nécessaire et suffisante on peut réduire la taille d'un problème du régulateur. Enfin, on met en évidence l'information contenue dans Γ, relativement aux régulateurs qui y conduisent.*

1 - INTRODUCTION

Considérons le problème de commande optimale suivant, dit « problème du régulateur » (l'accent désigne la transposition) :

$$\dot{x} = Fx + Gu, \quad x(0) = x_0$$

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \qquad (\text{noté } x_\infty = 0)$$

$$\min_{u(\cdot)} J = \int_0^{+\infty} (x'u') \begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} dt$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, F, G, Q, R, S sont des matrices constantes de dimensions adaptées (Q, R symétriques). Nous ne faisons aucune hypothèse sur la positivité de la matrice,

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix}$$

supposant seulement R positive définie (noté $R > 0$). C'est pourquoi nous introduisons la contrainte supplémentaire $x_\infty = 0$, pour nous limiter aux solutions pratiquement intéressantes.

(1) Centre d'Automatique de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris à Fontainebleau.

En relation avec le problème du régulateur, Popov [11] a introduit la fonction à argument complexe s, et à valeurs dans un espace de matrices de fractions rationnelles :

$$\Gamma(s) = R + S'(sI - F)^{-1}G + G'(-sI - F')^{-1}S + G'(-sI - F')^{-1}Q(sI - F)^{-1}G. \quad (1)$$

On rappelle, en particulier, l'important résultat suivant (*cf.* Willems [13, Théorèmes 5 et 7]).

Sous l'hypothèse (F, G) complètement commandable, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation de Riccati algébrique :

$$F'\pi + \pi F - (\pi G + S)R^{-1}(G'\pi + S') + Q = 0 \quad (2)$$

ait une solution symétrique réelle est que :

$$\Gamma(i\omega) \geqslant 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \ (\Gamma(i\omega) \text{ semi-définie positive}).$$

De plus si (et seulement si) la condition :

$$(\mathscr{C}) : \exists \varepsilon > 0 : \Gamma(j\omega) \geqslant \varepsilon G'(-j\omega I - F')^{-1}(j\omega I - F)^{-1}G, \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$

est réalisée, alors il y a une solution et une seule π^* telle que :

$$\mathscr{R}e\, \lambda\{F - GR^{-1}(G'\pi + S')\} < 0$$

(partie réelle des valeurs propres de la matrice « bouclée » négatives : stabilité asymptotique), et le minimum (atteint pour toute condition initiale x_0) est donné par la loi de commande :

$u = -R^{-1}(G'\pi^* + S')x$. Enfin π^* est *la* solution maximale au sens des matrices définies positives de l'équation de Riccati (2).

A propos de la fonction Γ (dont on supposera toujours qu'elle vérifie $(\mathscr{C})$) et pour préciser son rôle vis-à-vis du problème du régulateur, on peut se poser les questions suivantes :

— Quelle relation y a-t-il entre les problèmes conduisant à la même fonction Γ ?

— Quels sont *tous* les problèmes conduisant à la même fonction Γ, avec une dynamique donnée (F, G) ?

— Quelle information est contenue dans la fonction Γ ?

Pour répondre à ces questions, en utilisant des transformations induites par le lemme de Yacubovich-Kalman-Popov ou « lemme positif réel » (voir Faurre [5]), on interprète Γ comme étant une expression de la forme :

$$Z(s) + Z'(-s)$$

où $Z(s)$ est la fonction de transfert d'un système dynamique linéaire. On établit alors un lien avec le problème classique de la réalisation d'une fonction de transfert. Il en résulte la construction de tous les problèmes ayant une dynamique (F, G) donnée, conduisant à Γ donné, et l'on montre que ces problèmes ont en fait la même solution optimale. On s'interroge, à ce propos, sur tous les problèmes ayant la même solution (problème inverse, *cf.* par exemple Kalman [9]).

Poursuivant alors l'analogie avec la théorie de la réalisation d'une fonction de transfert, on s'intéresse aux « réalisations minimales » de Γ (en un sens qui sera précisé), ce qui montrera à quelles conditions (nécessaires et suffisantes) on peut, à partir d'un problème posé dans un espace d'état $\mathbb{R}^n$, ramener par des calculs linéaires sa résolution à celle d'un problème de même type dans un espace $\mathbb{R}^{n_1}$, plus petit, (la résolution, nécessitant elle, des calculs quadratiques). Ce résultat nous paraît le plus important et se généralise au cas d'un problème de commande optimale linéaire-quadratique à horizon fini (non stationnaire), comme il sera montré dans un article à paraître (Bernhard et Cohen [3]).

Enfin, en ne s'intéressant qu'aux problèmes de dimension minimale, mais à dynamique non imposée, on montre que tous les problèmes (F, G, Q, R, S) du régulateur avec $x_\infty = 0$, et conduisant à Γ donné, ont même gain optimal $R^{-1}(G'\pi^* + S')$, même matrice bouclée $F - GR^{-1}(G'\pi^* + S')$, même matrice R, mais que pour reconstruire Γ il faut connaître, de plus, une matrice $\bar{H}^*$ dont nous n'avons pu trouver une interprétation physique simple. Avant de poursuivre, on rappelle ici les hypothèses valables pour toute la suite, même si l'on omet de les rappeler dans certains énoncés :

a) (F, G) complètement commandable (*cf.* par exemple Kalman, Falb, Arbib [8]).

b) $R > 0 \Leftrightarrow \exists N, N^{-1} : R = N'N$.

c) Les problèmes du régulateur sont à état final imposé : $x_\infty = 0$.

d) Γ vérifie la condition $(\mathscr{C})$ (1). (sauf au paragraphe 5).

e) Hypothèse (H) : *cf.* Lemme 1.

On notera $\Phi_+ = (sI - F)^{-1}$ et $\Phi'_- = (-sI - F')^{-1}$ et de même pour toute fonction matricielle $A(s)$, $A_+ = A(s)$, $A'_- = A'(-s)$.

---

(1) On vérifie (*cf.* remarque *b*) du § 3) qu'alors Γ^{-1} n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire. Réciproquement, il est facile de voir que cette deuxième condition est équivalente à la première si le problème est minimal au sens du § 5. Cette deuxième forme ne fait pas intervenir explicitement le couple (F, G) ce qui est nécessaire pour les théorèmes 8 et 11.

2 - RÉALISATION DE Γ

Considérons les équations :

$$PF + F'P = -Q \tag{3}$$

$$PG + S = H' \tag{4}$$

introduites par le lemme positif réel (*cf.* par exemple Faurre [5]).

LEMME 1 :

Supposons vérifiée l'hypothèse suivante :

(H): *Si λ est valeur propre de F, $-\lambda$ ne l'est pas. Alors Q et S étant donnés, les équations* (3) *et* (4) *définissent une matrice H et une seule et l'on a :*

$$\Gamma(s) = Z(s) + Z'(-s)$$

où $Z(s) = J + H(sI - F)^{-1}G$, avec $J + J' = R$.

DÉMONSTRATION

L'hypothèse (H) que nous supposerons toujours réalisée par la suite, permet d'affirmer qu'il existe une solution et une seule P (symétrique) de l'équation (3) pour Q donné. (Plus généralement, $PA + BP = -Q$ a une solution et une seule en P si : $\lambda(A) + \lambda(B) \neq 0$ pour tout couple de valeurs propres; *cf.* Gantmacher [6, p. 228]). P reportée dans (4) définit H, S étant donné.

L'équation (3) s'écrit aussi :

$$P\Phi_+^{-1} + \Phi_-'^{-1}P = Q \quad \text{(ajouter et retrancher } sP)$$

d'où :

$$\Phi_-'P + P\Phi_+ = \Phi_-'Q\Phi_+.$$

Considérant l'expression (1) de Γ substituant à $\Phi_-'Q\Phi_+$ l'expression ci-dessus, et à S l'expression tirée de (3), on obtient le résultat désiré.

REMARQUES

a) $Z(s)$ peut être considéré comme la fonction de transfert du système linéaire :

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Hx + Ju.$$

On a :

$$y(s) = Z(s)u(s).$$

b) L'hypothèse (H) est vérifiée en particulier si F est asymptotiquement stable (alors $\mathscr{R}e\ \lambda(F) < 0$ pour tout λ).

On est maintenant en mesure de résoudre le :

Problème 1 :

Etant donné le problème (F, G, Q_0, R, S_0) $(x_\infty = 0)$, trouver tous les critères (Q, S) qui conduisent au même Γ (autrement dit, on garde la même dynamique (F, G)).

Théorème 2 :

Toutes les solutions du problème 1 *sont obtenues en faisant varier* P *sur l'ensemble des matrices symétriques (réelles)* $n \times n$, *dans les équations* (3) *et* (4), *en maintenant* H[1], F, G *(et* R*) fixes, ce qui engendre une famille de couples* (Q, S).

DÉMONSTRATION

Remarquons préalablement que $\lim_{|s| \to +\infty} \Gamma(s) = R$, donc R est donné par la donnée de Γ.

a) Tout couple (Q, S) ainsi obtenu est solution du problème 1, car, d'après le lemme 1, Γ ne dépend que de H, F, G, R et tout (Q, S) conduit par construction au même H.

b) Toute solution du problème 1 est ainsi obtenue. En effet, soit (Q_a, S_a) une telle solution.

Par le lemme 1, on peut construire H_a et Γ peut donc s'écrire :

$$\Gamma = R + H_a \Phi_+ G + G' \Phi'_- H_a = R + H \Phi_+ G + G' \Phi'_- H$$

qu'on écrit :

$$(H_a - H)\, \Phi_+ G = G' \Phi'_- (H - H_a).$$

Tout pôle du membre de gauche est une valeur propre de F, tout pôle du membre de droite est une valeur propre de $-F$, ces deux ensembles de valeurs propres sont disjoints par l'hypothèse (H). Il en résulte que les deux membres sont analytiques dans tout le plan complexe (y compris le point à l'infini où ils sont nuls). Ce sont donc des constantes nulles.

Mais $(H_a - H)\, \Phi_+ G = 0$ implique $H_a = H$ par complète commandabilité de (F, G) d'après le lemme suivant. Il en résulte immédiatement que (Q_a, S_a) appartient à la famille décrite.

---

[1] Calculé comme au lemme 1 à partir de (Q_0, S_0).

LEMME 3 :

Si (F, G) *est complètement commandable,*

$$A(sI - F)^{-1}G = B(sI - F)^{-1}G$$

implique : $A = B$ *(où A et B sont des matrices constantes).*

DÉMONSTRATION

La façon la plus simple de le voir est, semble-t-il, de considérer Φ_+ comme la transformée de Laplace de la matrice de transition $\Phi(t)$ qui vérifie : $\dot{\Phi} = F\Phi$ et $\Phi(0) = I$.

Alors :

$$A\Phi_+G = B\Phi_+G \Rightarrow A\Phi(t)G = B\Phi(t)G \Rightarrow$$

$$A\int_0^\tau \Phi(t)GG'\Phi'(t)\mathrm{d}t = B\int_0^\tau \Phi'(t)GG\Phi'(t)\mathrm{d}t$$

et l'on sait (*cf.* Kalman et al. [8]) que, par complète commandabilité, l'intégrale pour tout $\tau \neq 0$, est une matrice inversible.

REMARQUES

a) Compte tenu de l'hypothèse (H), il est possible de s'imposer arbitrairement Q, et de calculer ensuite S.

b) Les matrices F, G, H représentent en fait des opérateurs linéaires entre espaces vectoriels, et les matrices Q, R, S sont des formes bilinéaires. La matrice P est aussi de cette dernière nature. Il est clair que les résultats obtenus sont indépendants du choix de l'espace d'état. Soit $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}_a$ deux espaces isomorphes (isomorphisme T que l'on peut interpréter aussi comme un changement de base).

$$x = Tx_a$$

$$F_a = T^{-1}FT,\ G_a = T^{-1}G,\ H_a = HT,\ Q_a = T'QT,\ S_a = T'S,\ P_a = T'PT.$$

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(F, G, Q, R, S) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "T"'] & (F, G, H, R) \arrow[d, "T"] \\
(F_a, G_a, Q_a, R, S_a) \arrow[r, "P_a"] & (F_a, G_a, H_a, R)
\end{tikzcd}$$

c) Nous avons, par la résolution du problème 1, donné un sens aux P symétriques quelconques (et non pas seulement aux $P \geqslant 0$, comme dans l'énoncé du lemme positif réel et dans son utilisation pour la représentation markovienne des processus stationnaires, *cf.* Faurre [5]).

3 – ÉQUATION DE RICCATI, FACTORISATION DE Γ ET LEMME POSITIF RÉEL

Dans ce paragraphe, on établit le résultat suivant :

Théorème 4 :

Tous les couples (Q, S) solutions du problème 1 donnent lieu à des problèmes du régulateur ayant même solution optimale, caractérisée par le gain constant C $(u = - Cx)$.

Après démonstration de ce théorème par l'intermédiaire d'un lemme, on fait le lien entre l'écriture de Γ sous forme d'une somme $Z'_- + Z_+$ comme au paragraphe précédent et sous forme d'un produit W'_-W_+ à partir de l'équation de Riccati (Willems [13]). Cette juxtaposition nous paraît intéressante comme la suite l'illustrera. (Une utilisation de cette double écriture figure dans Anderson [1]).

La démonstration du théorème 4 passe par le

LEMME 5 :

Considérons chaque couple (Q, S) engendré par P à partir des équations (3) et (4), et π^* la solution maximale de l'équation de Riccati (2) correspondante. Soit $P^* = P - \pi^*$. P^* est un invariant de la famille (est indépendant de P).

DÉMONSTRATION

Remplaçons π par $P - \hat{P}$ dans (2), et servons-nous de (3) et (4). On obtient :

$$F'\hat{P} + \hat{P}F + (H' - \hat{P}G)R^{-1}(H - G'\hat{P}) = 0. \tag{5}$$

Il est clair que P étant fixé, à toute solution π de (2) est associée une solution $\hat{P}$ de (5) et inversement. En particulier à la solution maximale π^* (existante d'après Willems [13] quand Γ vérifie la condition $(\mathscr{C})$) est associée la solution minimale P^* de (5).

Mais cette équation est entièrement définie par (F, G, H, R) et par conséquent P^* est parfaitement définie par ces données et indépendante de P.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4

On a rappelé dans l'introduction que la solution du problème du régulateur avec $x_\infty = 0$ est donnée par le gain :

$$C = R^{-1}(G'\pi^* + S')$$

où π^* est la solution maximale de l'équation (2).

D'après le lemme 5, C s'écrit encore :

$$C = R^{-1}(G'P + S' - G'P^*) = R^{-1}(H - G'P^*)$$

ce qui montre que le gain optimal est le même pour tous les problèmes de la famille [1].

REMARQUES DIVERSES

a) En reportant dans (3), (4) les solutions $\hat{P}$ de (5), on engendre des couples $(\hat{Q}, \hat{S})$ de la famille ayant la particularité de vérifier la relation :

$$\hat{Q} = \hat{S}R^{-1}\hat{S}'$$

facilement établie par (5) (tous les couples ayant cette particularité sont ainsi obtenus). Il en résulte que :

$$\begin{pmatrix} \hat{Q} & \hat{S} \\ \hat{S}' & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L' \\ N' \end{pmatrix} (L, N) \geqslant 0$$

avec : $L = N'^{-1}(H' - \hat{P}G)$.

En particulier, pour la solution minimale P^* de (5), $Q^* = C'RC$, $S^{*\prime} = RC$, et $L^* = N'^{-1}(H' - P^*G) = NC$.

La matrice bouclée $F - GR^{-1}(G'\pi + S')$ s'exprime : $F - GR^{-1}(H' - \hat{P}G) = F - GN^{-1}L$. P^* est la seule solution de (5) rendant stable cette matrice. Cette propriété et la minimalité de P^* ont été mises en évidence par Faurre [5] dans le cas F stable (par le lemme de Lyapounov, on a alors $\hat{P} \geqslant 0$). On ne fait ici que montrer que des résultats de Faurre se retrouvent à partir de résultats de Willems (et le lemme 5) et inversement (Mais Faurre impose seulement $R \geqslant 0$).

Posons :

$$W_+ = N + L(sI - F)^{-1}G.$$

Alors Γ s'écrit sous forme d'un produit : $\Gamma = W' W_+$. Ce résultat est brièvement évoqué par Anderson et Moore [2].

b) On établit de même, par un calcul analogue à celui de la démonstration du lemme 1, en se servant de l'équation (2), que Γ s'écrit encore sous la forme ci-dessus avec :

$$W_+ = N + N'^{-1}(G'\pi + S')\Phi_+G.$$

(*cf.* Willems [13]). En particulier, pour $\pi = \pi^*$,

$$W_+^* = N[I + C\Phi_+G].$$

(1) Une autre démonstration repose sur le fait que tous les critères de la famille sont équivalents au sens de Carathéodory.

De plus,

$$W_+^{*-1} = N^{-1} - C(sI - F + GC)^{-1}GN^{-1}$$

où l'on voit apparaître la matrice bouclée $F - GC$ (stable). W_+^{*-1} est analytique dans le demi-plan droit ($\mathcal{R}e(s) \geqslant 0$). Si F est stable alors W_+^* l'est aussi. On a alors une factorisation forte de Γ (*cf.* par exemple Davis [4]). Cette factorisation forte est unique après que le choix de N ait été arrêté ($N'N = R$ ne définit N qu'à une matrice orthogonale près). De cette considération, et de la complète commandabilité de (F, G), on tire une autre démonstration de l'invariance de C (théorème 4) lorsque F est stable.

4 - QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LE PROBLÈME INVERSE DE LA COMMANDE OPTIMALE

Le théorème 4 nous amène naturellement, et sans que cela soit l'objet principal de notre propos, à nous poser la question suivante :

Est-ce que *tous* les problèmes du régulateur de dynamique (F, G) donnée, (avec $x_\infty = 0$) conduisant au gain optimal C font partie de la même famille (autrement dit, ont le même Γ) ? Pour répondre à cette question, nous résolvons le :

Problème 2 :

Etant donné une dynamique (F, G) (complètement commandable) et un gain C tel que $F - GC$ est asymptotiquement stable, trouver tous les critères (Q, R, S) définissant un problème du régulateur (avec $x_\infty = 0$), ayant $u = -Cx$ pour solution optimale.

REMARQUE

Le problème 2 diffère du problème généralement appelé « problème inverse » par le fait qu'on se limite aux régulateurs avec état final imposé : $x_\infty = 0$.

Bien sûr, la trajectoire optimale vérifiera toujours cette contrainte puisque $F - GC$ est stable, mais le fait de l'imposer a priori facilite la résolution du problème en *étendant* la classe des critères (Q, R, S) retenus. Une autre commodité est de s'autoriser des S non nuls. Kalman [9] remarque, qu'alors, tout gain C est optimal pour une certaine classe de problèmes. Mais nous résolvons ici le problème pour un système multivariable et pour F non forcément stable (mais vérifiant l'hypothèse (H)).

Théorème 6 : (Solution du problème 2)

Toutes les solutions du problème 2 sont obtenues en appliquant la solution du problème 1 (théorème 2) au régulateur initial (F, G, Q^*, R, S^*), où $R > 0$ est arbitraire et $Q^* = C'RC$, $S^* = C'R$.

DÉMONSTRATION

a) Les triplets (Q, R, S) ainsi engendrés sont bien solutions du problème 2. En effet, une fois R fixé, il suffit, en vertu du théorème 4, de le démontrer pour le couple particulier (Q^*, S^*), et pour celui-ci, le critère s'écrit :

$$J = \int_0^{+\infty} (u + Cx)'R(u + Cx)\mathrm{d}t.$$

R étant positif défini, $u = -Cx$ est bien la solution optimale puisque cette loi annule J qui est non négatif, et respecte la contrainte $x_\infty = 0$ ($F - GC$ asymptotiquement stable). Remarquons alors que $\Gamma(j\omega)$ vérifie la condition $(\mathscr{C})$ par la réciproque des résultats de Willems rappelés dans l'introduction. Cette remarque justifie le raisonnement en *b)*.

b) Tout triplet (Q_a, R_a, S_a) solution du problème 2 (ayant C pour gain optimal) est ainsi obtenu. En effet, fixons $R = R_a$. Les calculs faits au *a)* des remarques du paragraphe 3 montrent que le couple $(Q^* = C'R_aC, S^{*\prime} = R_aC)$ fait partie de la famille engendrée par les équations (3), (4) à partir de (Q_a, S_a). Inversement (Q_a, S_a) aurait pu être obtenu à partir de (Q^*, S^*).

REMARQUE : *Autre façon de résoudre le problème 2*

Pour montrer que le problème inverse ainsi posé est en fait assez trivial, pour les raisons indiquées plus haut, nous donnons ici une façon beaucoup plus simple et directe de le résoudre : F, G, C, étant donné

a) choisir $R > 0$ arbitraire,

b) choisir π symétrique arbitraire,

c) de la relation $C = R^{-1}(G'\pi + S')$, tirer S,

d) de l'équation de Riccati (2), tirer Q.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que tous les triplets (Q, R, S) ainsi choisis ont bien C comme gain optimal et que ce sont les seuls. Remarquons au passage que cette méthode de résolution s'étend sans difficultés au cas non stationnaire (horizon fini), $R(.)$, $\pi(.)$ ... étant alors des fonctions du temps et l'équation de Riccati ayant pour second membre $-\dot{\pi}$ (au lieu de 0).

La réponse à la question posée au début de ce paragraphe est donc négative : les problèmes ayant le même gain optimal (et la même dynamique) n'ont pas tous le même Γ; mais ceci est vrai « modulo R », en ce sens que si F, G, C et R sont donnés, Γ est donné.

5 – RÉALISATION MINIMALE DE Γ

Dès le lemme 1, on a montré que Γ peut s'écrire sous la forme $Z'_- + Z_+$ où Z peut être interprété comme la matrice de transfert d'un système linéaire. Il est dès lors loisible d'exploiter tous les résultats connus sur la réalisation minimale d'une matrice de transfert d'un système linéaire stationnaire, en rapport avec les concepts d'observabilité et de commandabilité. Pour la commodité de lecture, on rappelle brièvement l'essentiel de ces résultats (une bonne référence est Kalman [10]).

Au préalable, on remarque que Γ étant donné, R l'est par $\lim_{|s|\to+\infty} \Gamma(s)$ et on travaillera sur $\Gamma - R = Z^{0\prime}_- + Z^0_+$ où Z^0 (s) sera la matrice de transfert d'un système :

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Fx + Gu\\ y &= Hx\end{aligned}\right\} \Rightarrow y(s) = H(sI - F)^{-1}Gu(s) = Z^0(s)u(s)$$

1° Rappels :

a) Un système (H, F, G) étant donné, c'est une réalisation minimale de $Z^0(s) = H(sI - F)^{-1}G$, si et seulement si :

i) (F, G) est complètement commandable $\Leftrightarrow$ la matrice de commandabilité :

$$\mathscr{C} = (G, FG \ldots F^{n-1}G) \text{ est de rang } n$$

ii) et (H, F) est complètement observable $\Leftrightarrow$ la matrice d'observabilité :

$$\mathscr{O} = \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{pmatrix} \text{ est de rang } n.$$

b) Sinon, il existe une décomposition de l'espace d'état en une somme directe $\mathscr{X}_1 \oplus \mathscr{X}_2 \oplus \mathscr{X}_3 \oplus \mathscr{X}_4$ (dimensions respectives n_1, n_2, n_3, n_4) telle que :

i) $\mathscr{X}_1 \oplus \mathscr{X}_2$ est l'image de $\mathscr{C}$ et constitue le sous-espace (intrinsèquement défini) des états commandables.

ii) $\mathscr{X}_2 \oplus \mathscr{X}_4$ est le noyau de $\mathscr{O}$ et constitue le sous-espace (intrinsèquement défini) des états non observables.

iii) n_1, n_2, n_3, n_4 et $\mathscr{X}_2 = (\mathscr{X}_1 \oplus \mathscr{X}_2) \cap (\mathscr{X}_2 \oplus \mathscr{X}_4)$ sont bien définis. En particulier, n_1 = rang du produit $\mathscr{O} \times C$.

iv) Dans une base formée de la réunion de bases de $\mathscr{X}_1$, $\mathscr{X}_2$, $\mathscr{X}_3$, $\mathscr{X}_4$, F, G, H s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} F_{11} & 0 & F_{13} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ 0 & 0 & F_{33} & 0 \\ 0 & 0 & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (H_1 \quad 0 \quad H_3 \quad 0)$$

v) La paire (F_{11}, G_1) est complètement commandable et la paire (H_1, F_{11}) est complètement observable.

vi) De plus : $H_1(sI - F_{11})^{-1}G_1 = Z^0(s)$ et (H_1, F_{11}, G_1) est une réalisation minimale de $Z^0(s)$.

vii) Toute autre réalisation minimale (dimension n_1) (H_a, F_a, G_a) de $Z^0(s)$ se déduit de (H_1, F_{11}, G_1) par les formules :

$$H_a = H_1 T, \; F_a = T^{-1}F_{11}T, \; G_a = T^{-1}G$$

correspondant soit à un changement de base dans $\mathscr{X}_1$ soit à un isomorphisme dû au choix d'un autre supplémentaire de $\mathscr{X}_2$ (bien défini) dans $\mathscr{X}_1 \oplus \mathscr{X}_2$ (bien défini) ou encore les deux opérations simultanément.

c) Etant donné une matrice de transfert, il existe des algorithmes pour trouver une réalisation minimale (*cf.* Gori-Giorgi et Isodori [7]). Pour une matrice à coefficients réels, il existe toujours une réalisation minimale en termes de matrices réelles. Soit $Z^0(s)$ une matrice de transfert $(q \times m)$ de pôles s_i avec ordre de multiplicité d_i, $i = 1, ..., l$. Alors $Z^0(s)$ s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{R_i(s)}{(s - s_i)^{d_i}}$$

($R_i(s)$ matrice polynomiale $q \times m$ de degré maximal $d_i - 1$).

On démontre que la réalisation minimale de Z^0 est la somme directe des réalisations minimales de chaque terme de la somme, c'est-à-dire que si (H_i, F_i, G_i) est une réalisation minimale de $R_i(s)/(s - s_i)^{d_i}$, alors

$$H = (H_1 \ldots H_l), \; F = \begin{pmatrix} F_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_l \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_l \end{pmatrix}$$

est une réalisation minimale de Z^0. En particulier, la dimension minimale n_1 est la somme des dimensions minimales.

2° Réalisation minimale de Γ :

Problème 3 :

$\Gamma(s)$ étant donnée comme une matrice de fractions rationnelles en s à coefficients réels vérifiant $\Gamma(s) = \Gamma'(-s)$ et $\lim_{s\to\infty} \Gamma(s) = R > 0$, trouver les matrices F, G, H, R *réelles* de dimension minimale qui engendrent Γ (donc les problèmes du régulateur de dimension minimale conduisant à Γ).

Remarque

Pour la première fois au cours de cet article, on ne s'impose plus la dynamique.

Disons dès maintenant qu'on ne retiendra pas *toutes* les réalisations minimales (au sens du problème 3) de la fonction Γ mais seulement celles qui conduisent à des F vérifiant l'hypothèse (H).

Γ étant donnée (donc R), la condition $\Gamma(s) = \Gamma'(-s)$ est nécessaire (évident) et suffisante (la suite le prouvera) pour qu'il existe $Z^0(s)$ telle que :

$$\Gamma - R = Z_-^{0\prime} + Z_+^0.$$

On se limitera bien sûr aux Z^0 à coefficients réels, et il existe alors toujours une réalisation minimale réelle (H, F, G) de Z^0 considérée comme fonction de transfert (Ici « réalisation » a le sens classique). Les autres réalisations minimales de Z^0 se déduisent par les formules de changement de base et on les considérera comme des solutions confondues avec l'une d'entre elles (représentant de la classe d'équivalence). On renvoie le lecteur aux algorithmes de réalisation d'une fonction de transfert pour le passage de Z_0 à (H, F, G).

Notre problème se réduit alors à définir Z_0. Il y a plusieurs façons de le faire. La question est donc : trouver celles qui conduisent à des F de dimension minimale (chaque F est minimale vis-à-vis de la réalisation du Z_0 correspondant, mais pas obligatoirement vis-à-vis de la réalisation de Γ).

Des hypothèses faites sur Γ, on déduit que si s_i est pôle de Γ d'ordre de multiplicité d_i, $-s_i$ l'est aussi et $\bar{s}_i$ (la barre désigne le conjugué) l'est également (sauf si s_i est réel), tous deux avec l'ordre d_i. On ne traitera pas pour l'instant le cas particulier où $-s_i$ et $\bar{s}_i$ sont confondus (s_i est imaginaire pur) (se reporter à la remarque de la fin du paragraphe).

Γ s'écrit alors :

$$\Gamma(s) = \sum_i \frac{R_i(s)}{(s-s_i)^{d_i}} + \frac{\varepsilon \bar{R}_i'(s)}{(s-\bar{s}_i)^{d_i}} + \frac{R_i(-s)}{(-s-s_i)^{d_i}} + \frac{\varepsilon \bar{R}_i'(-s)}{(-s-\bar{s}_i)^{d_i}}$$

(si s_i est réel, $\varepsilon = 0$, sinon $\varepsilon = 1$).

$R_i(s)$ est une matrice polynomiale $m \times m$ de degré maximal $d_i - 1$. La méthode de résolution va consister à distribuer de façon cohérente les termes du développement de Γ entre Z^0_+ et $Z^{0\prime}_-$. Si $A_k(s)/(s - s_k)^l$ est attribué à Z^0_+ le terme $\bar{A}_k(s)/(s - \bar{s}_k)^l$ lui est obligatoirement attribué aussi pour que Z^0 soit à coefficients réels. On allègera donc la suite de l'exposé en ne s'intéressant qu'au cas des pôles réels ($\varepsilon = 0$).

Nous distinguerons deux façons de procéder, la première étant celle que nous retiendrons finalement, la seconde étant la plus générale (incluant donc la première). Soit s_i un pôle réel d'ordre d_i. Γ contient les termes :

$$\frac{R_i(s)}{(s - s_i)^{d_i}} + \frac{R_i'(-s)}{(-s - s_i)^{d_i}}$$

($R_i(s)$ de degré maximal $d_i - 1$).

a) Attribuer le premier terme à Z^0_+ et donc le second à $Z^{0\prime}_-$, ou inversement. (On qualifiera cette opération de « regroupement des pôles ».)

b) Attribuer $A_i(s)/(s - s_i)^{l_i} + (-1)^{k_i} B_i'(-s)/(s + s_i)^{k_i}$ à Z^0_+ et obligatoirement $A_i'(-s)/(-s - s_i)^{l_i} + B_i(s)/(s - s_i)^{k_i}$ à $Z^{0\prime}_-$. ($A_i(s)$, $B_i(s)$ sont de degré maximal respectivement $l_i - 1$ et $k_i - 1$).

On a nécessairement :

$$\frac{R_i(s)}{(s - s_i)^{d_i}} = \frac{A_i(s)}{(s - s_i)^{l_i}} + \frac{B_i(s)}{(s - s_i)^{k_i}}$$

On établit alors le :

Théorème 7 :

i) *Toutes les façons de définir* Z^0_+ *suivant la règle du a) conduisent à des F ayant toutes même dimension minimale et vérifiant l'hypothèse* (H).

ii) *Les autres façons de définir* Z^0_+ *(suivant b)) conduisent à des F de dimension supérieure ou égale au cas précédent et ne vérifiant jamais l'hypothèse* (H) *(sauf cas extrême où soit* k_i *soit* l_i *est nul pour tout i, ce qui revient au a)).*

DÉMONSTRATION

i) Rappelons (*cf.* 1° *c*)) que la présence du terme $R_i(s)/(s - s_i)^{d_i}$ apporte une contribution ρ_i à la dimension de la réalisation minimale de Z^0_+. Si ce terme ne figure pas, c'est qu'il est remplacé par $R_i(-s)/(-s - s_i)^{d_i}$ qui apporte la même contribution ρ_i. En effet, d'une manière générale, $Z(s)$ et $Z'(-s)$ ont même dimension minimale car si (H, F, G) est, une réalisation minimale de $Z(s)$, $(-G', -F', H')$ en est une de $Z'(-s)$. On en déduit donc que la façon de procéder en *i*) conduit à des Z^0_+ ayant tous même dimension minimale.

De plus, si (H, F, G) est une telle réalisation, toutes les valeurs propres de F apparaissent comme pôles de Z_+^0 (mais pas forcément avec leur ordre de multiplicité). Alors F vérifie l'hypothèse (H) car si s_i et $-s_i$ étaient simultanément valeurs propres de F, elles apparaîtraient comme pôles simultanément dans Z_+, ce qui est exclu par la façon de procéder.

ii) Par le même raisonnement, on voit que les Z_+^0 obtenus par le *b*) conduisent à des F ne vérifiant pas (H) (sauf le cas extrême du *a*)). Il reste à montrer que les dimensions obtenues en *b*) sont supérieures ou égales à celles du *a*). Pour cela, on remarque d'abord que $Z(s)$ et $Z(s+s_0)$ ont des réalisations minimales de même dimension car si (H, F, G) en est une de $Z(s)$, $(H, F-s_0I, G)$ en est une de $Z(s+s_0)$. Soit :

$$\frac{R_i(s)}{(s-s_i)^d} = \sum_{j=1}^{d} \frac{R_{ij}}{(s-s_i)^j}$$

où les R_{ij} sont des matrices $(m \times m)$ constantes appelées « résidus » (décomposition en éléments simples). La contribution ρ_i de ce terme est la dimension de sa réalisation minimale et donc aussi celle de :

$$\sum_{j=1}^{d_i} \frac{R_{ij}}{s^j}$$

ρ_i est le rang de la matrice de Hankel $(d_i \times d_i)$:

$$H_R = \begin{pmatrix} R_{i1} & R_{i2} & \cdots & R_{id_i} \\ R_{i2} & R_{i3} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ R_{id_i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(*cf.* par exemple Rosenbrock [12, p. 120]).

On développe, de même, les termes $A_i(s)/(s-s_i)^{l_i}$ et $B_i(s)/(s-s_i)^{k_i}$ en éléments simples et l'on a :

$$R_{ij} = A_{ij} + B_{ij},\ j = 1, \ldots, \max(d_i, k_i, l_i)$$

(par exemple $R_{ij} = 0$ si $j > d_i$, ce qui revient à agrandir la matrice de Hankel en la bordant de 0 mais ne change pas son rang). H_A et H_B étant les matrices de Hankel correspondant au (A_{ij}) et (B_{ij}), on a donc :

$$H_R = H_A + H_B.$$

Soit α_i et β_i les contributions (qui s'additionnent) à la dimension minimale de Z_+^0 des termes qui lui sont attribués.

$$\alpha_i = rg\ H_A \text{ (rang de } H_A\text{), etc...}$$

De la relation ci-dessus, on tire :

$$\rho_i \leqslant \alpha_i + \beta_i$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que l'égalité est possible (cas où les images de H_A et H_B considérés comme opérateurs linéaires sont disjointes). C'est pourquoi en rejetant la méthode du 2°), on perd certaines réalisations minimales de Γ (mais dont les F ne vérifient pas (H)).

Enfin, on aurait pu introduire dans Z_+^0 (et $Z_-^{0\prime}$) des pôles qui n'existaient pas dans Γ (cas où $d_i = 0$, et $k_i = l_i > 0$). Manifestement, cela ne fait qu'augmenter la dimension de Z_+^0 c'est pourquoi nous n'avons pas envisagé ce cas au 2°).

REMARQUE : *Cas des pôles imaginaires purs*

Pour un pôle imaginaire pur, le lecteur vérifiera qu'il est impossible d'appliquer la méthode *a*). On obtient donc obligatoirement des F ne satisfaisant pas à l'hypothèse (H).

REMARQUE

Il n'existe qu'une réalisation minimale stable de Γ (1) (à un changement de base près). C'est celle qui correspond, en a), à attribuer les pôles à partie réelle négative à Z_+^0.

6 - LE RÉGULATEUR RÉDUIT

Une application intéressante du paragraphe précédent a pour origine la réflexion suivante : partons d'un problème du régulateur (F, G, Q_0, R, S_0) ($x_\infty = 0$; (F, G) complètement commandable; F vérifie (H), etc...), et formons H, ce qui n'implique que des calculs linéaires. (F, G) étant complètement commandable, (H, F, G) est une réalisation minimale de Γ si et seulement si (H, F) est complètement observable. Sinon, quelle est la signification de la non complète observabilité de (H, F) quant au problème du régulateur initialement posé ? Les théorèmes 8 et 9 répondent à cette question (en introduisant une hypothèse supplémentaire : stabilité de F_2, voir plus loin).

Finalement, il en résultera qu'on peut résoudre le problème, initialement posé dans un espace d'état $\mathbb{R}^n$, en le ramenant à un problème dans $\mathbb{R}^{n_1}$ plus petit et ce par des calculs linéaires (la résolution nécessitant, elle, des calculs quadratiques).

(1) Supposé ne pas avoir de pôle sur l'axe imaginaire.

D'après les rappels du paragraphe 5, 1°, si (H, F) n'est pas complètement observable, soit $\mathscr{X}_\beta$ le noyau de la matrice d'observabilité et soit $\mathscr{X}_\alpha$ un supplémentaire. Dans une base convenable, F et H s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} F_\alpha & 0 \\ F_\gamma & F_\beta \end{pmatrix} \text{ et } (H_\alpha, 0).$$

Supposons qu'il existe un sous-espace $\mathscr{X}_2$ de $\mathscr{X}_\beta$, invariant par F et que ce sous-espace soit engendré par les derniers vecteurs de base. Alors la sous-matrice F_β prend la forme :

$$\begin{pmatrix} F_4 & 0 \\ F_5 & F_2 \end{pmatrix}$$

Considérons un supplémentaire $\mathscr{X}_1$ de $\mathscr{X}_2$. Relativement à cette décomposition de $\mathscr{X}$, F, G, H s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ F_3 & F_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}, (H_1, 0).$$

Nous appellerons la matrice F_2 : « restriction de F au sous-espace invariant ».

Théorème 8 :

Un problème (F, G, Q_0, R, S_0) étant donné et H étant calculé comme au lemme 1, si la paire (H, F) n'est pas complètement observable et s'il existe un sous-espace des états non observables invariant par F et tel que la restriction de F à ce sous-espace soit stable, alors la paire (C, F) (où C désigne le gain optimal de la famille (F, G, H, R) (1)) n'est pas complètement observable et son noyau inclut le sous-espace invariant.

DÉMONSTRATION

Parmi les problèmes de la famille (F, G, H, R), choisissons celui engendré par $P = 0$ (dans (3) et (4)). Alors $Q = 0$ et $S' = H = (H_1, 0)$. Le problème s'écrit :

$$\dot{x}_1 = F_1 x_1 + G_1 u \quad x_1(0) = x_{1_0} \tag{6}$$

$$\dot{x}_2 = F_3 x_1 + F_2 x_2 + G_2 u \quad x_2(0) = x_{2_0} \tag{7}$$

$$(8a)\ x_1(\infty) = 0; \quad (8b)\ x_2(\infty) = 0 \tag{8}$$

$$\min J = \int_0^{+\infty} (u'Ru + 2\, u'H_1 x_1) \mathrm{d}t. \tag{9}$$

(1) C est bien défini grâce au théorème 4. Remarquons que l'observabilité de (C, F) ne dépend donc pas de R, puisque H n'en dépend pas, et bien que C en dépende. Ceci est dû au fait que l'observabilité de (C, F) est une propriété de la description interne, alors que R ne fait intervenir que la description externe.

On peut résoudre le problème en x_1 donné par les équations (6), (9) et (8a) (il a la même fonction Γ que le problème initial d'après § 5, 1°, vi)). Soit C_1 le gain optimal. La commande $u = - C_1 x_1 = - (C_1, 0)x$ est la solution du problème (6), (7), (8), (9) car u minimise J et la contrainte (8b) est satisfaite. En effet, en reportant u dans (7) :

$$\dot{x}_2 = F_2 x_2 + (F_3 - G_2 C_1) x_1$$

et d'après (8a) et la stabilité de F_2, $x_{2\infty} = 0$.

Le gain optimal de la famille (F, G, H, R) s'écrit donc $(C_1, 0)$ ce qui établit le théorème. De plus la démonstration montre que C_1 peut être obtenu par résolution d'un problème de dimension n_1, ce problème étant obtenu par des calculs linéaires à partir de (F, G, Q_0, R, S_0).

Le théorème suivant établit la réciproque.

Théorème 9 :

Si la paire (C, F) n'est pas complètement observable, alors la restriction de F au sous-espace non observable est stable ; de plus la paire (H, F) n'est pas complètement observable et son noyau contient celui de (C, F).

DÉMONSTRATION

Si (C, F) n'est pas complètement observable, dans une base convenable, (où F_2 désigne la restriction de F au noyau de (C, F)) :

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ F_3 & F_2 \end{pmatrix} \quad C = (C_1, 0)$$

d'où :

$$F - GC = \begin{pmatrix} F_1 - G_1 C_1 & 0 \\ F_3 - G_2 C_1 & F_2 \end{pmatrix}$$

Comme C est le gain optimal, $F - GC$ est (asymptotiquement) stable et il est facile de démontrer que F_2 l'est nécessairement ($F - GC$ est bloc-triangulaire), ce qui établit le premier des deux résultats annoncés. Choisissons maintenant $P = P^*$ (dans (3), (4)) (*cf.* § 3).

On a vu que :

$$S^{*\prime} = RC = (RC_1, 0) = (S_1^{*\prime}, 0)$$

$$Q^* = S^* R^{-1} S^{*\prime} = \begin{pmatrix} Q_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrivons P^* sous la forme :

$$\begin{pmatrix} P_1^* & P_3^* \\ P_3^{*\prime} & P_2^* \end{pmatrix}$$

L'équation (3) se décompose en :

$$P_1^* F_1 + F_1' P_1^* + P_3^* F_3 + F_3' P_3^{*\prime} = - Q_1^* \tag{10}$$

$$P_2^* F_2 + F_2' P_2^* = 0 \tag{11}$$

$$P_3^* F_2 + F_1' P_3^* + F_3' P_2^* = 0. \tag{12}$$

Les valeurs propres de F_1 et F_2 sont celles de F. Donc F_1 et F_2 vérifient l'hypothèse (H). De (11), on déduit $P_2^* = 0$ et de (12) $P_3^* = 0$ (car $\lambda(F_1) + \lambda(F_2) \neq 0$). Finalement, en calculant $H' = P^*G + S^*$, on voit que $H = (H_1, 0)$ ce qui établit le théorème.

Corollaire des théorèmes 8 et 9 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que la paire (C, F) ne soit pas complètement observable est que la paire (H, F) ne le soit pas et qu'il existe un sous-espace des états non observables de (H, F) invariant par F et tel que la restriction de F à ce sous-espace soit stable. De plus, le noyau non observable de (C, F) est le sous-espace de cette nature de taille maximale.

Conclusion

Si (C, F) est non observable cela signifie qu'il existe une partie du système qui n'a pas besoin d'être commandée et il est naturel que l'on puisse arriver au même résultat en commandant un système plus petit. Cette remarque est intéressante si on peut tester la non-observabilité de (C, F) et trouver la « partie utile » du système avant d'avoir résolu le problème, donc sans disposer de C, et bien sûr sans faire des calculs équivalents à la recherche de C (calculs quadratiques). On vient de voir que ceci est possible, au moins théoriquement, par des calculs linéaires. Cela est lié au fait suivant : on sait écrire Γ sous les deux formes :

$$R + Z_-^{0\prime} + Z_+^0$$

et

$$W_-^{*\prime} W_+^* \quad (\textit{cf.}\ \S\ 3 : W^* = N(I + C\Phi_+ G))$$

et pour réaliser Γ de façon minimale, on peut soit réaliser Z_+^0, soit W_+^* (qui est aussi une matrice de transfert). Mais la recherche de Z_+^0 implique des calculs linéaires alors que la factorisation est de nature quadratique.

7 - INFORMATION CONTENUE DANS Γ

On a vu (théorème 4) que deux problèmes du régulateur ayant même fonction Γ *et même dynamique* (F, G) ont même gain optimal C. Mais on a vu aussi (regroupement des pôles) que plusieurs dynamiques sont possibles pour réaliser Γ. En se limitant aux systèmes de dimension minimale, on est amené à se poser la question suivante : quelle information, en termes de problème du régulateur, est contenue dans Γ ?

Pour apporter une réponse à cette question, nous allons étudier les réalisations minimales de $\Gamma'(s)^{-1}$ en nous servant des résultats du paragraphe 5. Mais pour relier Γ et Γ'^{-1}, il est clair que c'est l'écriture de Γ en produit qui convient (*cf.* § 3). Afin de bien mettre en correspondance les réalisations de Γ et de Γ'^{-1}, du point de vue de la base dans laquelle elles sont exprimées, nous interprétons les matrices en termes d'opérateurs, linéaires :

$$\Gamma(s) = R + Z^{0\prime}(-s) + Z^0(s).$$

a) $Z^0(s)$ applique $\mathscr{U}$ (espace des commandes) dans $\mathscr{Y}$ (espace des sorties ou observations).

b) $Z^{0\prime}(-s)$ applique donc $\mathscr{Y}^*$ (dual de $\mathscr{Y}$)dans $\mathscr{U}^*$.

Comme Z^0 et $Z^{0\prime}$ sont additionnés, ils doivent être de même nature. On doit donc identifier $\mathscr{Y}$ à $\mathscr{U}^*$.

c) $Z^0(s) = H(sI - F)^{-1}G$:

$$G : \mathscr{U} \to \mathscr{X}$$
$$(sI - F)^{-1} : \mathscr{X} \to \mathscr{X} \text{ et } F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$$
$$H : \mathscr{X} \to \mathscr{U}^*$$

d) $\Gamma(s) : \mathscr{U} \to \mathscr{U}^*$ donc :

$$\Gamma'(s) : \mathscr{U}^{**} = \mathscr{U} \to \mathscr{U}^* \text{ et } \Gamma'^{-1}(s) : \mathscr{U}^* \to \mathscr{U}.$$

e) Soit $\bar{H}, \bar{F}, \bar{G}$ une réalisation de $\Gamma'^{-1}(s)$

$$\bar{G} : \mathscr{U}^* \to \mathscr{X}^*$$
$$(sI - \bar{F})^{-1} : \mathscr{X}^* \to \mathscr{X}^* \text{ et } \bar{F} : \mathscr{X}^* \to \mathscr{X}^*$$
$$\bar{H} : \mathscr{X}^* \to \mathscr{U}.$$

A tout choix d'une base de $\mathscr{X}$ dans laquelle seront exprimés H, F, G, on associera par l'isomorphisme canonique entre $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}^*$ la base correspondante de $\mathscr{X}^*$ pour exprimer $\bar{H}, \bar{F}, \bar{G}$. (Même observation pour $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}^*$).

LEMME 10 :

Les dimensions des réalisations minimales de Γ *et* Γ'^{-1} *sont égales.*

DÉMONSTRATION

Considérons une réalisation minimale particulière (F, G, H, R) de Γ. A partir de ce quadruple, on peut construire un couple (Q, S) par les équations (3), (4) en y plaçant une matrice P symétrique quelconque. Puis on peut former l'équation de Riccati (2) du problème (F, G, Q, R, S). Soit π une solution quelconque de (2). On a rappelé au paragraphe 3 (*cf.* Willems [13]) que Γ peut s'écrire W'_-W_+ avec :

$$W_+ = N + N'^{-1}(G'\pi + S')\Phi_+G.$$

De plus :

$$W_+^{-1} = N^{-1} - R^{-1}(G'\pi + S')\Psi_+GN^{-1}$$

où :

$$\Psi_+ = [sI - (F - GR^{-1}(G'\pi + S'))]^{-1}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\Gamma'^{-1} = W_-^{-1}W_+'^{-1} &= R^{-1} - R^{-1}(G'\pi + S')\Psi_-GR^{-1} \\ &- R^{-1}G'\Psi'_+(\pi G + S)R^{-1} + R^{-1}(G'\pi + S')\Psi_-GR^{-1}G'_+\Psi'_+(\pi G + S)R^{-1}\end{aligned}$$

Γ'^{-1} est donc engendré en particulier par le problème (*cf.* (1))

$$\begin{aligned}\bar{R} &= R^{-1} \\ \bar{F} &= F' - (\pi G + S)R^{-1}G' \\ \bar{G} &= (\pi G + S)R^{-1} \\ \bar{Q} &= GR^{-1}G' \\ \bar{S} &= -GR^{-1}\end{aligned}$$

On en déduit que la dimension minimale des réalisations de Γ'^{-1} est inférieure ou égale à celle de $\bar{F}$ donc de F donc de Γ. Comme on peut appliquer de nouveau le raisonnement à Γ'^{-1} pour retrouver Γ, le lemme est démontré.

Théorème 11 :

Tous les problèmes du régulateur conduisant à une même fonction Γ ont :

— *même matrice R,*

— *même gain optimal C,*

— *même matrice bouclée $F - GC$.*

Mais pour reconstituer Γ il est nécessaire de connaître en plus de R, C, $F - GC$, une autre matrice $\bar{H}^*$ qui est le quatrième élément commun à tous les problèmes.

DÉMONSTRATION

Γ étant donné, R l'est par $\lim_{|s|\to+\infty} \Gamma(s)$, et évidemment aussi Γ'^{-1}. On s'intéresse aux réalisations minimales de Γ'^{-1} et en particulier à *la* réalisation stable (*cf.* remarque de la fin du paragraphe 5) que nous noterons ($\bar{H}^*$, $\bar{F}^*$, $\bar{G}^*$) (et $\bar{R} = R^{-1}$). ($\bar{F}^*$ est même asymptotiquement stable à cause de l'hypothèse ($\mathscr{C}$)). Considérons maintenant un quelconque problème (F, G, Q, R, S) de dimension minimale conduisant à Γ et reprenons les calculs de la démonstration du lemme 10, mais en choisissant maintenant la solution maximale π^* de (2). Alors, le gain optimal C du problème est :

$$C = R^{-1}(G'\pi^* + S')$$

et $\bar{F} = F' - C'G'$, $\bar{G} = C'$ est une réalisation minimale de Γ'^{-1} ($\bar{H}$ étant obtenu à partir de $\bar{Q}$ et $\bar{S}$ et les équations (3), (4)). Or $F - GC$ est la matrice bouclée du problème et elle est donc stable, donc $(\bar{H}, \bar{F}, \bar{G})$ est la réalisation minimale stable de Γ'^{-1} (définie intrinsèquement à partir de Γ). On a donc établit que tout problème du régulateur conduisant à Γ a :

— un R bien défini,

— un gain $C = \bar{G}^{*\prime}$ bien défini,

— une matrice bouclée $F - GC = \bar{F}^{*\prime}$ bien définie.

Mais pour reconstituer Γ'^{-1} donc Γ il faut en plus connaître $\bar{H}^*$ dont nous n'avons su donner une interprétation physique simple.

8 - CONCLUSION

En consacrant un long développement, dont l'intérêt peut paraître, à première vue, assez théorique, à l'étude de la fonction Γ, les auteurs espèrent avoir atteint les objectifs suivants :

a) mettre en lumière un certain nombre d'aspects encore peu connus d'une fonction fréquentielle apparue relativement récemment dans la littérature, et dont l'importance n'est pas encore bien mesurée.

b) contribuer à combler le fossé qui existe peut-être entre les techniques fréquentielles d'une part et les techniques temporelles (par vecteur d'état) d'autre part dans les problèmes d'optimisation.

c) montrer, comme application, un résultat assez important, nous semble-t-il, qui s'énonce : il est possible par des calculs linéaires de tester l'observabilité de la paire (C, F) d'un problème d'optimisation et de trouver le noyau d'états non observables. Il est alors possible de supprimer la partie « inutile » du système et réduire ainsi la taille du problème avant de la résoudre.

Ce résultat est lié au concept d'observabilité dont on ne peut douter de l'importance théorique même si les paires non observables se rencontrent rarement « dans la nature » (un déterminant n'est presque jamais nul). Il peut toutefois avoir un intérêt pratique dans le cas de grands systèmes qui présentent souvent des matrices assez creuses. Notons, de plus, que le résultat, suggéré par cette étude, se généralise aux problèmes de commande optimale en temps fini (*cf.* Bernhard et Cohen [3]).

d) Suggérer enfin une technique pour l'étude d'autres questions. Il est en particulier souvent utile de pouvoir remplacer un problème de commande optimale par un autre ayant même solution. Les auteurs étudient actuellement une application à la commande hiérarchisée.

RÉFÉRENCES

[1] B.D.O. Anderson, « The inverse problem of stationary covariance generation », *J. of Statistical Physics*, Vol. 1, pp. 133-147, 1969.

[2] B.D.O. Anderson, J.B. Moore, « Algebraic structure of generalized positive real matrices », *SIAM J. Control*, Vol. 6, pp. 615-624, 1968.

[3] P. Bernhard, G. Cohen, « Complete dependence of the linear quadratic optimal control problem », 1973. A paraître.

[4] M.C. Davis, « Factoring the spectral matrix », *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-8, pp. 296-305, 1963.

[5] P. Faurre, « Réalisations markoviennes de processus stationnaires », *Thèse de Doctorat d'Etat*, Université de Paris VI, 1972.

[6] F.R. Gantmacher, « Théorie des Matrices », Tome 1 - Dunod, Paris, 1965.

[7] C. Gori-Giorgi, A. Isidori, « A new algorithm for the irreductible realization of a rational matrix », *Ricerche di Automatica* (revue de l'ANIPLA-Milan), Vol. II, pp. 225-239, 1971.

[8] R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib, « Topics in mathematical system theory ", MacGraw-Hill, 1969.

[9] R.E. Kalman, « When is a linear control system optimal ? », *J. of Basic Engineering, Trans. ASME*, sér. D, Vol. 86, pp. 51-60, 1964.

[10] R.E. Kalman, « Mathematical description of linear dynamical systems », *SIAM J. Control*, sér. A, Vol. 1, pp. 152-192, 1963.

[11] V.M. Popov, « Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions », *Rev. Roumaine des Sciences et Techniques*, sér. Electrotechnique Energétique, Vol. 9, pp. 628-690, 1964.

[12] H.H. Rosenbrock, « State-Space and multivariable theory », Nelson, London, 1970.

[13] J.C. Willems, « Least squares stationary optimal control and the algebric Riccati equation », *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-16, pp .621-634, 1971.