# Quelques remarques sur la commande $H_\infty$-optimale

*Pierre BERNHARD*

*INRIA-Sophia Antipolis*

Colloque en l'honneur de Jean CÉA

**Introduction**

La recherche sur la commande dite $H_\infty$-optimale a été un des domaines les plus actifs dans l'automatique de ces dix dernières années. Née de problèmes posés par la commande robuste, elle a vu son champ s'étendre à d'autres problèmes, comme l'assignation de modèle par exemple. Son objectif se décrit comme de choisir une régulation qui assure qu'une certaine fonction de transfert soit stable, donc appartienne à un espace de Hardy $H_\infty$ (de la moitié droite du plan complexe dans le cas à temps continu, de l'extérieur du cercle unité dans le cas à temps discret), et qui minimise la norme de cette fonction de transfert dans cet espace.

En 1984, Doyle a proposé une formulation qui recouvre à peu près tous les problèmes de cette nature qui avaient été considérés jusque là. Soit un système linéaire, que nous prendrons toujours de dimension finie dans cet exposé, doté de deux entrées (vectorielles) distinctes : la commande $u$ et les perturbations $w$, et de deux sorties (vectorielles) distinctes; les observations $y$ et la sortie à réguler $z$. L'objectif est alors de choisir une régulation

$$u = Ky$$

où $K$ est une matrice de transfert stable, donc dans $H_\infty$, telle que la fonction de transfert "bouclée" $T_K$ de $w$ à $z$ soit stable, et de norme $H_\infty$ minimale.

Ce problème est traditionnellement représenté par le schéma ci-dessous.

Si le système de départ s'écrit, en termes de fonctions de transfert,

$$\begin{aligned} z &= G_{11}w + G_{12}u \\ y &= G_{21}w + G_{22}u \end{aligned}$$

on a manifestement

$$T_K = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} = G_{11} + G_{12}(I - KG_{22})^{-1}KG_{21}$$

Plus précisément, le problème qui a reçu une solution simple au cours de ces dix années de recherche est, étant donné un nombre positif $\gamma$, existe-t-il une régulation $K$ telle que la norme $H_\infty$ de $T_K$ satisfasse

$$\|T_K\|_\infty < \gamma \qquad (*)$$

et si oui en exhiber une. (Voire, les exhiber toutes).

L'objectif de cet article, tout en exposant rapidement à quoi ressemble la solution de ce problème, est de discuter certaines questions qui nous semblent rester mystérieuses. Il ne s'agit pas de problèmes ouverts, mais de problèmes résolus dont la solution même pose des questions.

**1) Une étrange ressemblance**

Il faut, à ce point, rentrer dans un peu plus de détails. Suivant la tendance apparue en 1990 pour ce problème [1] [2], nous utilisons une formulation en variables d'état. Soit donc un système linéaire à deux entrées et deux sorties †:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw, \qquad (1)$$
$$y = Cx \qquad + Ew, \qquad (2)$$
$$z = Hx + Gu. \qquad (3)$$

Les variables $u$, $w$, $y$ et $z$ sont les grandeurs évoquées ci-dessus, de dimension respective $m$, $l$, $p$ et $q$. L'état $x$ est supposé de dimension finie $n$. Donc $A$, $B$, $D$, $C$, $E$, $H$ et $G$ sont des matrices de dimension appropriée, qui font partie des donées.

Pour simpplifier les formules, on supposera en outre (ce qui n'est nullement nécéssaire pour la suite)

$$H'G = 0, \qquad DE' = 0, \qquad (4)$$

et on posera

$$H'H = Q, \qquad G'G = R, \qquad DD' = M, \qquad EE' = N.$$

On fait en outre les hypothèses essentielles suivantes : $R > 0$, $N > 0$, le triplet $(H, A, D)$ est minimal.

† On désignera toujours par un point la dérivation par rapport au temps, et par une prime la transposition.

Soit $\gamma$ un nombre positif donné. Un contrôleur stable satisfaisant la contrainte de norme (*) existe sous les conditions suivantes :

**C1** L'équation de Riccati algébrique ci-dessous admet une solution positive définie $P$ :

$$PA + A'P - PBR^{-1}B'P + \gamma^{-2}PMP + Q = 0\,. \tag{5}$$

**C2** L'équation de Riccati algébrique ci-dessous admet une solution positive définie $\Sigma$

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C'N^{-1}C\Sigma + \gamma^{-2}\Sigma Q\Sigma + M = 0\,. \tag{6}$$

**C3** Ces solutions satisfont l'inégalité

$$\rho(\Sigma P) < \gamma^2\,, \tag{7}$$

ce qui assure notamment que $(I - \gamma^{-2}\Sigma P)$ est inversible.

Quand ces trois conditions sont satisfaites, un contrôleur qui satisfait la contrainte est donné par

$$u = -R^{-1}B'P\hat{x}\,, \tag{8}$$

où $\hat{x}$ est donné par

$$\hat{x} = (I - \gamma^{-2}\Sigma P)^{-1}\check{x}\,, \tag{9}$$

$\check{x}$ étant lui même obtenu par le "filtre"

$$\dot{\check{x}} = A\check{x} + Bu + \gamma^{-2}\Sigma Q\check{x} + \Sigma C'N^{-1}(y - C\check{x})\,. \tag{10}$$

La ressemblance avec le contrôleur "de Kalman" solution d'un problème de commande stochastique "L.Q.G." est frappante : deux équations de Riccati régissent la solution, qui ressemblent étrangement à celles du contrôleur L.Q.G. L'usage qui est fait de $P$ dans (8) est identique au cas L.Q.G., un principe de séparation comparable semble s'appliquer, ou plutôt un principe d'équivalence à la certitude, car le filtre (10) n'est pas indépendant du "critère" puisque $Q$ y apparait, mai ce filtre, à son tour, ressemble, à un terme additionnel près, à un filtre de Kalman, avec notamment la même expression pour le gain de correction $\Sigma C'N^{-1}$.

A ce niveau d'analyse, cette ressemblance, qui a intrigué quand les équations ci-dessus ont été découvertes [3], est raisonnablement bien expliquée.

Ainsi, la première équation de Riccati (en $P$) vient du fait très simple suivant. La norme $H_\infty$ de la fonction de transfert est aussi la norme d'opérateur du système considéré, induite par les normes $L^2$ sur les espaces d'entrée et de sortie. Ainsi, l'inégalité (*) est-elle trivialement équivalente à

$$\sup_w \int \left(\|z\|^2 - \gamma^2\|w\|^2\right)\, dt < 0$$

et donc l'existence d'un contrôleur $K$ garantissat cela est équivalent à

$$\inf_K \sup_w \int \left(\|z\|^2 - \gamma^2\|w\|^2\right) \, dt < 0 \, .$$

Ce problème d'inf-sup ressemble à un jeu différentiel, dont on ne s'étonne pas de voir l'équation de Riccati intervenir.

La présence d'un " principe de séparation" apparent dans la solution a été souligné au moins dès l'article [3]. C'est même cette remarque qui nous a mis sur la voie d'un réel principe de séparation, prouvé dans [4] puis [2], réminiscent, dans le cas linéaire quadratique discret, de celui de [5].

Le principe de séparation évoqué ci-dessus fait intervenir un problème de maximisation en $w$ sur le passé, pour rechecher la perturbation la pire, dans un certain sens, compatible avec les observations. Donc l'apparition d'une seconde équation de Riccati dans la détermination de $\hat{x}$ n'est pas non plus complètement mystérieuse. Mais là s'arrête l'affirmation que nous osons faire à son propos.

En effet, pourquoi ce problème d'optimisation devrait-il nous donner une structure de filtre "à la Kalman"? Surtout, pourquoi une pareille symétrie, gravement baptisée "dualité", entre le contrôleur proprement dit et ce filtre? Nous touchons là un problème qui n'a jamais été complètement élucidé dans le problème L.Q.G. classique, de l'aveu même du père fondateur en la matière, R.E. Kalman. À plus forte raison dans le cas présent est-on en droit de s'interroger. Cette symétrie n'est que plus forte (devrait-on dire plus belle?), puisque dans les équations de Riccati "duales" habituelles viennent s'ajouter deux termes qui respectent cette dualité, en $\gamma^{-2}PMP$ dans la première et $\gamma^{-2}\Sigma Q\Sigma$ dans la seconde, chacune empruntant, pour former ce nouveau terme carré, le coefficient constant de l'autre.

En dire beaucoup plus sur cette question, c'est en dire plus sur la dualité, une vieille affaire que d'aucuns jugeront classée, d'autres futile. Par contre, il est une nouvelle remarque qui nous paraît **devoir** recevoir une réponse claire.

Dans les équations ci-dessus, qui sont celles du contrôleur dit *central* qui constitue la solution "naturelle" du problème posé, mais pas la seule, on voit que si on pose formellement $\gamma = \infty$, ou plutôt $\gamma^{-2} = 0$, on retrouve les équations du contrôleur de Kalman classique du cas L.Q.G. Il est devenu classique de se réferer à ce contrôleur comme au cas $H_2$, car on voit facilement que l'espérance du critère quadratique

$$\int \|z\|^2 \, dt$$

sous l'hypothèse que $w$ est un bruit blanc, est la norme $H_2$ de la fonction de transfert $\|T_K\|$ dont nous avions considéré la norme $H_\infty$ ci-dessus. Si formuler le problème L.Q.G. de cette façon le rapproche en effet du précédent, cela ne fournit pas pour autant une explication, dont nous ne doutons pas qu'elle soit possible à trouver.

**2) Une coïncidence étonnante**

Une autre coïncidence a été soulignée dans la littérature. C'est celle qui concerne le problème dit "L.E.Q.G.", qui consiste, toujours en traitant la perturbation $w$ comme un bruit blanc, à minimiser l'espérance de l'exponentielle du critère quadratique classique.

Dans le cas à information complète, c'est à dire où on cherche une commande en feedback d'état $u(t) = \phi(t, x(t))$, la coincidence de la solution de ce problème avec celle du jeu différentiel évoqué ci-dessus avait été notée dès 1973 [6]. Cette coincidence, qui jusque là pouvait passer pour fortuite, s'étend au cas en information imparfaite, comme le montrait [5] dans le cas discret, puis la comparaison de [7] et [3] dans le cas continu. Donc le phénomène n'est **pas** fortuit. Est-il pour autant expliqué?

Dans [6] il apparait comme le résultat d'un calcul direct, et comme une coincidence.

Dans [5], le lien entre espérance de l'exponentielle du critère quadratique et minimax vient de la remarque suivante. Soit $S(u, w)$ une forme quadratique non homogène en $u$ et $w$, alors un calcul direct montre que

$$\int \exp\big(-S(u,w)\big)\,dw = \alpha \sup_w \exp\big(-S(u,w)\big)$$

Cette égalité est utilisée pour convertir le problème L.E.Q.G. en un problème de contrôle minimax, pour lequel un principe déquivalence à la certitude est développé (en des termes un peu mystérieux). Pour autant, est-ce une explication du phénomène? Il est d'autant plus permis de le contester que ce calcul est purement "linéaire quadratique", alors qu'on verra que la coincidence s'étend dans une certaine mesure à une situation non linéaire.

En tout état de cause, la question a continué à interesser les auteurs puisque la référence [8] lui est consacrée, apportant encore une autre explication. Cette fois, un calcul fort savant montre que le problème L.E.Q.G. est équivalent à un problème de minimisation d'entropie, dont on savait déjà que le problème $H_\infty$ peut s'y ramener. Il s'agit de la minimisation de l'entropie

$$I = -\frac{\gamma^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|1-\gamma^{-2}T'(-i\omega)T(i\omega)|\,d\omega$$

Il ne nous paraît pas clair que ceci illumine vraiment le débat. Ceci d'autant moins que les deux équivalences relèvent de calculs compliqués, non d'explications simples.

Tout récemment paraissait une explication originale, et non linéaire [9]. L'auteur considère le problème exponentiel suivant:

$$\dot{x} = f(x,u,w) + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\gamma^2}}w$$

$$G = \int_0^T L(x,u,w)\,dt$$

et la minimisation du critère exponentiel

$$J^\epsilon = \mathbb{E} \exp \frac{1}{\epsilon} G$$

Soit $W^\epsilon$ la fonction de la fonction de Bellman du problème, et $V^\epsilon = \epsilon \ln W^\epsilon$. L'article justifie rigoureusement le passage à la limite pour $V^0$ qui vérifie l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman suivante

$$V^0 + \frac{1}{4\gamma^{-2}}\|\nabla_x V^0\|^2 + \min_u \bigl(f(x,u)\cdot\nabla_x V^0 + L(x,u)\bigr) = 0$$

Ensuite vient ce qui ressemble à une plaisanterie, qui est pourtant sans doute mieux que cela. Remarquons que

$$\frac{1}{4\gamma^{-2}}\|\nabla_x V^0\|^2 = \max_{w\in\mathbb{R}^n}\left(w\cdot\nabla_x V^0 - \gamma^{-2}|w|^2\right).$$

En effectuant la substitution dans l'équation précédente, il vient

$$V^0 + \min_u \max_w \bigl(\tilde{f}(x,u,w)\cdot\nabla V^0 + \tilde{L}(x,u,w)\bigr) = 0.$$

où on a posé

$$\tilde{f}(x,u,w) = f(x,u) + w, \qquad \text{et} \qquad \tilde{L}(x,u,w) = L(x,u) + \gamma^2 w.$$

Ceci est l'équation d'Isaacs du jeu différentiel de dynamique $\tilde{f}$ et de critère $\int \tilde{L}$.

Le cas linéaire quadratique ne serait ainsi qu'un cas particulier, où la structure simple du problème dispenserait de passer à la limite en $\epsilon$. La question est de savoir si cette approche nous explique quant au fond la relation ainsi mise en évidence. Pour ma part, comme je l'ai dit, il me semble plus avoir assisté à un tour de préstidigitation, au demeurant fort brillant, que d'avoir compris la raison profonde de cette étonnante coincidence.

**3) Quelle robustesse ?**

L'origine du problème d'optimisation $H_\infty$ se trouve dans l'étude de questions de robustesse, notamment de commande robuste. Donnons une indication simpliste de cela. Nous considérons le système asservi ci-dessous, où $P$ est la fonction de transfert du système à réguler, supposé stable. (Donc $P$ appartient à l'espace de Hardy $H_\infty$). Mais une préoccupation essentielle ici sera que ce système est suppopsé mal connu, et on voudra prendre cela en compte explicitement. On veut déterminer le compensateur $K$ qui, outre sa fonction de correcteur, que nous n'analysons pas ici, garantit la stabilité du système bouclé, pour une famille aussi large que possible de "vraies" fonctions de transfert $P$, autour d'une nominale $P_0$.

Nous considérons des perturbations "multiplicatives" de $P_0$, c'est à dire des transferts de la forme $P = (I + \Delta P)P_0$.

Une application élémentaire du critère de Nyquist (ou de sa généralisation multivariable) permet d'affirmer que si

$$\forall s \in \mathcal{C}^+, \quad \|P(s)K(s)\| < 1$$

alors le système bouclé est stable. Ainsi, si on règle le correcteur en se servant de $P_0$ pour déterminer $K$, le système restera stable pour tout $\Delta P$ satisfaisant

$$\|\Delta P\|_\infty < \|P_0 K\|_\infty^{-1} - 1 \ .$$

On voit donc l'intérêt de minimiser $\|P_0 K\|_\infty$, tout en satisfaisant aux autres objectifs de la régulation. Ces autres objectifs, à leur tour, pourront être exprimés en termes de normes $H_\infty$ de certaines fonctions de transfert, par exemple minimiser cette norme pour la fonction de transfert $(I - PK)^{-1}PK$ des perturbations $w$ à $y$, ceci dans l'objectif de rejeter au mieux ces perturbations.

La formulation en termes de variables d'état et de jeu différentiel, ou au moins de recherche d'un minimax, est maintenant bien connue. Il semble naturel de penser que si le contrôleur est conçu pour minimiser un critère quadratique contre la perturbation *la pire*, alors il sera robuste, puisqu'aussi bien, les perturbations qui se produiront seront moins défavorables, quoi qu'il arrive.

Parle-t-on bien de la même robustesse? Remarquons d'abord que si la minimisation d'une norme $H_\infty$ s'écrit bien comme un minimax :

$$\min_u \max_{s \in \mathcal{C}^+} \|H(s)\|$$

celui-ci n'a rien à voir avec le minimax en $u, w$ évoqué plus haut. Certes, vis à vis de la fonction de transfert des perturbations vers la sortie, on comprend bien que les deux problèmes sont équivalents. Ceci rend compte de la robustesse vis à vis du modèle de perturbation, mais guère du principal problème abordé par l'ensemble de la littérature "$H_\infty$", à savoir celui de la robustesse vis à vis des erreurs de modélisation.

Il me semble que ceci mériterait une attention plus grande. En effet, on doit pouvoir trouver quels sont les signaux dont on cherche à minimiser les effets, et en tirer une meilleure compréhension du mécanisme de robustesse.

**4) Un point d'histoire**

Je ne vais pas chercher à retrouver les origines de l'utilisation de concepts de type minimax pour aborder des questions de robustesse. Chacun s'y est essayé avant moi, et on trouve dans les bibliographies des articles récents des références fort anciennes, en tous cas plus anciennes que celles dont je veux parler maintenant.

Mon propos remonte à un congrès tenu en 1973 à Ischia : the third IFAC symposium on Sensitivity, Adaptivity, and Optimality. À ce même symposium furent présentés un article de Jacobson et un de moi ayant trait à notre sujet.

Jacobson [10] étudiait le problème dit depuis L.E.Q.G.: le contrôle du système linéaire stochastique muni du critère exponentiel quadratique, dans le cas en information parfaite, i.e. en feedback d'état, il soulignait dès cet article que le régulateur obtenu pouvait s'interpréter comme la solution d'un jeu différentiel.

Dans ce même congrès, j'ai présenté l'article [10] dont l'objet était de trouver le controlleur minimisant le maximum possible d'un critère quadratique classique en présence d'une perturbation de norme $L^2$ bornée. Un roblème à l'évidence équivalent, pour un système linéaire, à celui de la minimisation de la norme de l'opérateur. Par le biais d'un multiplicateur de Lagrange, on se ramenait à ce qu'on appelle maintenant la "$\gamma$-itération". Un peu maladroitement peut-être, on ne considérait que le cas non homogène à état initial non nul. Passer au cas à état initial nul n'était pas tout à fait trivial. Et surtout, l'aspect conditions necessaires ne pouvait pas être complètement résolu à l'époque.

Que manquait-il en 1973 pour que se développe la théorie apparue depuis sous le nom de $H_\infty$? Au plan technique peu de choses. Certes, la théorie du point conjugué, donc des conditions nécessaires, n'est apparue qu'en 1979. [11]. Mais comme le développement proposé dans ([3], chap 8) le montre, pour cette application une extension relativement simple de la théorie de Carathéodory suffit. Si ces idées n'ont pas été poursuivies plus loin à cette époque, c'est pour des raisons non techniques.

Avant toute choses, on n'avait pas perçu tout le parti qu'on pouvait en tirer pour les problèmes de "loop shaping", de robustesse, d'assignation de modèle, etc. Mais il ne faut pas négliger non plus, et c'est peut-être l'objet de cette remarque, ce que la difficulté mathématique de l'approche utilisée de 1981 à 1990 a donné de respectabilité au sujet...

**Bibliographie**


[1] G. Tadmor, "Time domain optimal control and worst case linear system design", *28th Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, December 1989.

[2] T. Başar and P. Bernhard, $H_\infty$ *Optimal control and related minimax design topics : a game theory approach*, Birkhaüser, Boston, 1991.

[3] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, "State-space solutions to standard $H_2$ and $H_\infty$ control problems", *IEEE Transactions on Automatic Control,* **AC-34**(8), pp 831–847, 1989.

[4] P. Bernhard, "A min-max certainty equivalence principle and its application to continuous time, sample data, and discrete time $H_\infty$ optimal control.", Rapport de recherche INRIA # 1347, 1990.

[5] P. Whittle, "Risk-sensitive Linear/Quadratic/Gaussian control", *Advances in Applied Probabilities* **13**, pp 764–777, 1981.

[6] D.H. Jacobson, "Optimal stochastic linear systems with exponential criteria, and their relation to deterministic differential games", *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-18**, pp 124–131, 1973.

[7] A. Bensoussan and J.W. Van Schuppen, "Optimal control of partially observable stochastic systems with an exponential-of-integral performance index", *SIAM Jal on Control and Optimization* **23**(4), pp 293–305, 1989.

[8] K. Glover, "Minimum entropy and risk-sensitive control: the continuous time case", *28th Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, December 1989.

[9] W.H. Fleming, "Risk sensitive optimal control and differential games", LCDS report # 92-1, Brown University, 1992.

[10] P. Bernhard and G. Bellec, "On the evaluation of worst case design with an application to the quadratic synthesis technique", *3rd IFAC Symposium on Sensitivity, Adaptivity and Optimality*, Ischia, Italie, 1973.

[11] P. Bernhard, "Linear-quadratic two-person zero-sum differential games:

necessary and sufficient conditions", *Journal of Optimization Theory & Applications* **27**, pp 51–69, 1979.