Théorie des Systèmes et Jeux Différentiels.

P. BERNHARD

Octobre 1980

Résumé

Cet article présente quelques résultats de la théorie des systèmes linéaires à deux joueurs, et donne des preuves simples de quelques résultats récents. Il propose le concept de capturabilité comme extension naturelle de la théorie de la commandabilité au cas à deux joueurs. En matière d'observabilité, il donne un théorème qui pourrait fonder une théorie simple, encore à créer.

Summary

This paper reviews some results of the theory of two players linear systems, giving new and simple proofs of some recent results. It proposes the concept of capturability as a natural extension of the concept of controllability in the presence of two players. In the theory of observability, it gives a result that might serve as the basis of a simple theory, yet to be worked out.

Théorie des Systèmes et Jeux Différentiels.

P. BERNHARD

Octobre 1980

La théorie mathématique des systèmes, et plus particulièrement des systèmes linéaires, comporte, dans son état présent, deux types de résultats.

Les premiers sont de nature qualitative, ou "structurelle". Ils nous renseignent sur des propriétés intrinsèques fondamentales du système : existence, unicité de tel ou tel objet . L'archétype en est la théorie de la réalisation [1], avec la théorie de la commandabilité et de l'observabilité connue préliminaire. L'outil priviligié de cette étude est l'algèbre, linéaire ou polynomiale (encore que la géométrie des espaces vectoriels, de dimension finie, très liée à l'algèbre linéaire, joue aussi un rôle important. Cf.[2]), et pour cette raison l'ensemble de ces résultats fait partie de la théorie algébrique des systèmes.(1)

Les seconds sont de nature quantitative, et constituent pour l'essentiel le corps de résultats connu sous le nom de théorie de la commande optimale, ou théorie du contrôle. Dans ce cadre, des résultats puissants existent y compris pour les systèmes non-linéaires [4],ou linéaires mais de dimension infinie [5], i.e. gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

Un fait remarquable est que, malgré la nature apparemment analytique des problèmes de commande optimale, une théorie algèbrique existe pour les systèmes linéaires dotés d'un critère quatratique. [6] [7] [8]. Ceci étend donc le champ de la théorie algèbrique des systèmes à des problèmes d'optimisation, et confère à cet ensemble une cohérence profonde qui se traduit par une incontestable élégance mathématique.

---

(1) Pour les systèmes non linéaires, une théorie analogue, quoique beaucoup moins complète, se développe utilisant la géométrie différentielle, et la structure algébrique des algèbres de Lie [3]:

Par ailleurs, dans de nombreuses applications, la description d'un système comme un objet dont l'évolution est décrite de manière univoque par un ensemble de commandes entre les mains du décideur n'était pas satisfaisant. Les automaticiens ont très tôt voulu inclure des perturbations, représentées par un autre ensemble de commandes (ou input), décrites par leurs propriétés statistiques. Puis, les applications aux modèles de combat puis aux sciences sociales se développant, on a voulu introduire plusieurs décideurs, manipulant chacun un ensemble de commandes.

Ces deux extensions ont donné naissance, la première à la théorie de la commande optimale stochastique, aujourd'hui très développée [9] [10] , la seconde à la théorie des jeux différentiels [11] [12]. Le fait à noter est que ces deux théories sont des extensions de la commande optimale, avec des modèles de comportements différents pour le deuxième groupe de commandes. (Stochastique dans un cas, "intelligent" dans l'autre). Les résultats de nature structurelle ou algébrique, concernant les systèmes à plusieurs joueurs sont peu nombreux.

Une exception majeure à cette situation est la théorie du découplage dominée par la théorie géométrique de WONHAM [21], sur laquelle nous reviendrons ci-dessous. Il faut aussi citer certains travaux de G.SONNEVEND [13] . En outre, comme nous l'avons signalé, la théorie "quantitative" peut rejoindre la théorie "qualitative". Certains résultats que nous exposerons ci-dessous exploitent, ou tentent d'exploiter ce fait.

Cet article rassemble quelques résultats dans l'objectif de mieux appréhender certains éléments de la théorie des systèmes à deux joueurs. La première partie rappelle le résultat de base de WONHAM dans la théorie du découplage, et donne une version élémentaire d'un théorème de EMRE et HAUTUS qui éclaire le résultat précédent d'un jour nouveau et intéressant. La deuxième partie rassemble des résultats sur la capturabilité, que nous proposons comme notion de commandabilité en présence de commandes exogènes, moins exigente que le découplage. La troisième partie examine la question de l'observabilité, et donne quelques résultats, de Sonnevend pour l'un, original pour l'autre, dont aucun n'est encore très satisfaisant.

Dans tout cet article nous nous intéresserons à un système linéaire, stationnaire, à deux commandes, d'une des deux formes ci-dessous :

$(*)$ $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + Ev(t)$ (Version discrète)

$(**)$ $\frac{dx}{dt} = Fx(t) + Gu(t) + Ev(t)$ (version continue)

$y(t) = Hx(t)$ ϵ (dans les deux cas)

On supposera toujours que :

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^m, m = n-\ell$

F,G,E,H sont des matrices constantes de type convenable.
Dans le cas continu $(**)$, la dérivée sera souvent notée $\dot{x}$. On supposera toujours que les fonctions $t \to u(t)$ et $t \to v(t)$ sont mesurables. On sera amené parfois à renforcer ces hypothèses en restreignant ces fonctions à appartenir à des classes Ω_u et Ω_v de fonctions de carré sommable.

Nous désignerons par $\mathcal{G}$ et $\mathcal{E}$ les espaces images de G et E respectivement.

1 - LA THEORIE DU DECOUPLAGE

1.1 Découplage des perturbations

Rappelons que le problème de découplage des perturbations (ou de découplage strict des perturbations, respectivement) est le suivant :
PROBLEME 1. Existe-t-il une commande en "feedback" $u(t) = \varphi(x(t),v(t))$ (ou en feedback" strict $u(t) = \varphi(v(t)))$ telle que, si l'état initial est nul, la sortie y reste nulle quelque soit la perturbation v. (Dans le cas continu, il faut que φ soit tel que l'équation différentielle ait une solution pour toute perturbation).
La solution de ce problème, donnée par Wonham (cf. par exemple [2]) s'exprime en terme du plus grand sous espace $\mathcal{V}^*$ possédant les propriétés que

(1) . $\mathcal{V}^*$ est F-invariant modulo G : $F\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^* + \mathcal{G}$,

(2) . $\mathcal{V}^*$ est contenu dans le noyau de H : $\mathcal{V}^* \subset \mathrm{Ker}H$,

et s'exprime par la condition de Wonham :

THEOREME 1 - (Wonham). Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème du découplage ait une solution est que

(3) $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^* + \mathcal{G}$,

et pour le découplage strict (et si on impose que pour un état initial nul et v = o, l'état reste à zéro))

(4) $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^*$.

DEMONSTRATION. Condition nécessaire : Soit $\mathcal{V}$ le sous espace engendré par les états accessibles (depuis l'origine) pour le système $v \to x$ ci-dessous :

$$x(t+1) = Fx(t) + G\varphi(x(t), v(t)) + Ev(t).$$

Il faut par définition du problème que

(5) $\mathcal{V} \subset \mathrm{Ker}\, H$.

Mais de par la définition de $\mathcal{V}$, en représentant x dans $\mathcal{V}$ comme une combinaison linéaire d'états accessibles, et en faisant v = 0 il vient

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad Fx + G\varphi \in \mathcal{V},$$

soit

(6) $F\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{G}$,

et en faisant x = 0

$$\forall v \in \mathbb{R}^q, \quad Ev + G\varphi(o, v) \in \mathcal{V},$$

soit

(7) $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} + \mathcal{G}$.

(5) et (6) Montrent que nécessairement $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^*$ et (7) établit le caractère nécessaire de (3). En outre, pour le découplage strict, la condition supplémentaire que nous avons imposée avant (4) donne $\varphi(o) = o$, et (4) découle du même raisonnement que (7) ci-dessus.

Condition suffisante. Soit V une matrice dont les colonnes forment une base de $\mathcal{V}$. Les conditions (1) et (2) se traduisent par

(8) $\exists A$ et C : $FV = VA + GC$,

ou de manière équivalente sous la transformation [1]

$$C_1 = C\,(V'V)^{-1}V', \qquad C = C_1 V,$$

(1) La notation V' désigne V transposée.

par

(8a) $\exists A$ et C_1 : $(F-GC_1)V = VA$

et

(9) $HV = 0.$

Quant à la condition de Wonham (3) elle s'écrit

(10) $\exists B$ et D : $E = VB+GD.$

La condition (4) est identique en faisant $D = 0.$

Supposons donc ces conditions satisfaites. (8a) donne

$$(zI-F+CG)V = V(zI-A),$$

soit

$$V(zI-A)^{-1} = (zI-F+GC_1)^{-1}V,$$

et en prémultipliant par H et utilisant (9)

$$0 = H(zI-F+GC_1)^{-1}V.$$

Enfin en multipliant par B et en utilisant (10)

$$0 = H(zI-F+GC_1)^{-1} \quad (E-GD).$$

ceci montre que le feedback linéaire

(11) $u(t) = -C_1x(t)-Dv(t)$

conduit pour le système bouclé à une fonction de transfert de v à y nulle, tant pour le système discret (*) que pour le système continu (**).
En outre, si $D = 0$, on a obtenu en (11) un feedback strictement causal. □

REMARQUE 1 Le feedback trouvé est linéaire. Donc, par application d'un principe de superposition, une commande de la forme

$$u(t) = -C_1x(t)-Dv(t)= \hat{u}(t)$$

permet de commander le système, de dynamique F-GC indépendemment de la perturbation V .

PROPOSITION 1 - Si la pertubation peut être découplée strictement (et si le système n'est pas trivial : les commandes u et/ou v peuvent agir sur la sortie y) alors il n'existe pas de feedback

$$v(t) = \Psi(x(t),u(t))$$

qui découple la commande u.

PREUVE. Soit φ le feedback strict (11) (où D=0). Considérons le système ci-dessous, qui a toujours une solution :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) - GC_1x(t) + E(\Psi(x(t), - C_1x(t) + \hat{u}(t))) + G\hat{u}(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

D'après la remarque 1, le système $\hat{u} \to y$ est commandé par $\hat{u}$ sans être affecté par la commande $\hat{v} = \varphi(x, - Cx+\hat{u})$ résultante. En outre, on sait que l'espace des états accessibles est le même pour (F-GC,G) et pour (F,G). Si ce dernier était inclus dans Ker H, alors u ne pourrait pas agir sur y, et il faudrait donc, puisque le problème 1 est supposé avoir une solution, que l'espace accessible de la paire (F,E) fût également dans Ker H : le système serait trivial.
Mais par ailleurs, quelque soit la commande u(t), par exemple $\hat{u} = -C_1x + \hat{u}$, le feedback Ψ assurerait que pour un état initial nul, y resterait toujours nul, ce qui contredit la conclusion précédente.

Donc la possibilité de découpler, au moins strictement, constitue une supériorité nette d'un joueur sur l'autre. Ce sera une particularité, en apparence surprenante, que cela ne soit plus vrai de la capturabilité. Mais remarquons dès maintenant qu'il ne serait absolument pas paradoxal que les deux joueurs puissent découpler la commande de l'autre de manière <u>non stricte</u> : il s'en suivrait simplement que les équations

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x,v) + \hat{u} \\ v &= \Psi(x,u) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} u &= \varphi(x,v) \\ v &= \Psi(x,u) + \hat{v} \end{aligned}$$

n'auraient pas de solution, sauf éventuellement, pour des commandes $\hat{u}$ et $\hat{v}$ qui maintiennent des systèmes $(F+G\varphi,G)$ et $(F+E\Psi,E)$ respectivement, dans Ker H. Un exemple évident est le cas où G=E.

La propriété (1) de F-invariance modulo G a naturellement l'interprétation physique de caractériser un sous-espace dans lequel u seul (avec v=o) peut maintenir l'état. La condition de Wonham implique que v ne peut faire sortir l'état de ce sous-espace. Ignorant v à nouveau, la relation (8a), par exemple, montre qu'on peut considérer la restriction du système (F,G) à $\mathcal{V}$. Mais $\mathcal{V}^*$ risque de n'être pas complètement accessible. On introduit alors les sous-espaces $\mathcal{V}_i$ des états qui peuvent être atteints par u seul au temps i, avec $x_j \in$ Ker H, j=1,...,i-1. On a évidemment

$$(12) \qquad \mathcal{V}_{i+1} = F(\mathcal{V}_i \cap \text{Ker } H) + \mathcal{G}, \qquad \mathcal{V}_o = \{0\}.$$

On voit facilement que la suite $\mathcal{V}_i$ est croissante, et a donc une limite $\mathcal{V}_*$ en n pas ou moins. On montre facilement ([2]), que

$$(13) \qquad \mathcal{R} = \mathcal{V}^* \cap \mathcal{V}_*$$

est F-invariant modulo G et que la restriction du système à $\mathcal{R}$ est complètement accessible, de sorte que dans (8a), où $\mathcal{V}$ est remplacé par $\mathcal{R}$, les pôles de $F-GC_1$ peuvent être assignés arbitrairement par le choix de C_1.

1.2 Assignation de modèle

La représentation fréquentielle du système à deux joueurs peut s'écrire à l'aide des fonctions de transfert

$$(14) \qquad \mathcal{H}_1(z) = H(zI-F)^{-1}G, \qquad \mathcal{H}_2(z) = H(zI-F)^{-1}E,$$

sous la forme

$$Y(z) = \mathcal{H}_1(z)U(z) + \mathcal{H}_2(z)V(z) = (\mathcal{H}_1(z) \quad \mathcal{H}_2(z))\begin{pmatrix} U(z) \\ V(z) \end{pmatrix}$$

où Y, U et V désignent les transformées "en z" ou de la place des fonctions y(t), u(t) et v(t) respectivement.

Il est donc logique de s'attendre à ce que les fonctions de transfert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ jouent un rôle dans cette théorie.

A cet égard, un résultat assez récent de Emre et Hautus [14] montre que les propriétés de commandabilité respective par les deux joueurs peuvent être liées à des propriétés autres de théorie des systèmes, ce qui conforte la thèse que l'étude des systèmes à deux joueurs fait partie intégrante de la théorie des systèmes. Il concerne le problème de l'assignation exacte de modèle ci-dessous (respectivement de l'assignation de modèle stricte)

PROBLEME 2. Etant données deux matrices de transfert $\mathcal{H}_1(z)$ et $\mathcal{H}_2(z)$, qui peuvent toujours être réalisées sous une forme

(14) $\quad \mathcal{H}_1 = H(zI-F)^{-1}G, \qquad \mathcal{H}_2 = H(zI-F)^{-1}E,$

éxiste-t-il un système causal (respectivement strictement causal) de fonction de transfert $\mathcal{K}$ qui cascadé en préfiltre avec $\mathcal{H}_1$ reproduise exactement $\mathcal{H}_2$:

(15) $\quad \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \mathcal{K}$

Le résultat de Emre et Hautus ci-dessous a été donné par les auteurs dans le cadre d'une théorie algèbrique non élémentaire. Nous donnons ci-dessous une preuve élémentaire de ce résultat, dont la partie condition suffisante est en fait une paraphrase dans la réalisation élémentaire de la preuve d'origine.

L'intérêt de cette démonstration est de souligner le parallèlisme étonnant avec la preuve du théorème 1.

THEOREME 2 (Emre-Hautus). La condition de Wonham (large (3) ou stricte (4)) est une condition nécessaire et suffisante pour que le problème d'assignation de modèle (large ou strict) ait une solution.

DEMONSTRATION. Condition nécessaire. Supposons $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ réalisés sous la forme (14), et (15) satisfait. Soit v $(\cdot)$ une fonction de commande arbitraire, et $u(\cdot) = \mathcal{K}v(\cdot)$ sa transformée par $\mathcal{K}$. Ecrivons en outre

(16) $\quad u(t) = D\, v(t) + w(t)$

ou $w(\cdot)$ est l'image de $v(\cdot)$ par la partie <u>strictement causale</u> de $\mathcal{K}$. On a

$$(\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1\, \mathcal{K})v = H(zI-F)^{-1} \quad (-G \quad E-GD) \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

et soit $\mathcal{V}$ l'espace des états accessibles pour ce système. Par hypothèse donc

(16) $\mathcal{V} \subset \mathrm{Ker}\, H.$

En faisant $v(t)=0$, on obtient que

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad Fx-Gw \in \mathcal{V}$$

donc

$$F\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{G}.$$

Enfin, $w(\cdot)$ est strictement causal en $v(\cdot)$, donc $w(t)$ est indépendant de $v(t)$. Donc

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad \exists w : \quad \forall v, \qquad Fx-Gw+(E-GD)v \in \mathcal{V},$$

ce qui implique

$$\mathrm{Im}\,(E-GD) \subset \mathcal{V}$$

soit

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{V} + \mathcal{G}$$

Les relations (17), (18) et (19) sont identiques à (5), (6) et (7), et on conclue comme au théorème 1, en remarquant en outre que si $\mathcal{K}$ est strictement causale, D=0 dans (16), et que le dernier raisonnement donne alors la condition forte (4).

Condition suffisante. On part de la condition (8), qu'on réécrit :

$$(zI-F)V = V(zI-A) - GC,$$

soit

$$V(zI-A)^{-1} = (zI-F)^{-1}V - (zI-F)^{-1}GC(zI-A)^{-1},$$

et en prémultipliant par H et utilisant (9) et en post multipliant par B et en utilisant (10)

$$0 = H(zI-F)^{-1}(E-GD) - H(zI-F)^{-1}GC(zI-A)^{-1}B.$$

On réarrange cette dernière équation en

$$H(zI-F)^{-1}E = H(zI-F)^{-1}G\,[D+C(zI-A)^{-1}B],$$

Ce qui montre que le système de fonction de transfert

$$(19) \qquad \mathcal{H}(z) = D+C(zI-A)^{-1}B$$

satisfait (13). En outre, sours la condition (4), D=0 et (20) définit un système strictement causal.

∎

REMARQUE 2 - Naturellement, le résultat de la proposition 1 subsiste, et se traduit simplement ici par le fait que la matrice rationnelle $\mathcal{H}$ est strictement propre, son inverse ne saurait être propre. Par contre, une matrice rationnelle propre, mais non strictement, peut avoir une inverse propre. C'est le cas trivialement de l'identité qui résoud le problème si G=E,i.e. $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$

REMARQUE 3 - Dans le cas monovariable u,v et y scalaires, la solution du problème 2 est évidente : Une fois $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ ramenées au même dénominateur, le numérateur de $\mathcal{H}_2$ doit être de degré pas supérieur, ou inférieur pour le problème strict, à celui du numérateur de $\mathcal{H}_1$. Par l'utilisation de forme canonique observable, on vérifie directement que cette condition permet de résoudre le problème du découplage (on généralise d'ailleurs facilement au cas d'entrées vectorielles).

2 - LA THEORIE DE LA CAPTURABILITE

La théorie du découplage des perturbations présente, en dépit de son très grand intérêt, deux faiblesses.

D'une part, la propriété demandée est très forte : pouvoir annuler complètement l'effet des perturbations. D'autre part, le critère obtenu est complexe, et difficilement vérifiable, car la détermination de $\mathcal{V}^*$ est difficile.

Nous allons proposer une notion moins forte, qui a l'avantage de ne faire intervenir que les matrices de commandabilité de sortie

$$(21) \qquad \mathcal{C}_k = H(G\ FG\ \ldots\ F^{k-1}G) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_k = H(E\ FE\ \ldots\ F^{k-1}E)$$

des systèmes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ considérés ci-dessus. On rappelle que pour tout opérateur linéaire à image fermée, Im A = Im AA^*, de sorte que

$$\text{(22 a)} \qquad \operatorname{Im} \mathcal{C}_k = \operatorname{Im} C_k \qquad \text{où} \quad C_k = \sum_{i=1}^{k} HF^{k-1}GG'F'^{k-1}H'$$

$$\text{(22 b)} \qquad \operatorname{Im} \mathcal{D}_k = \operatorname{Im} D_k \qquad \text{où} \quad D_k = \sum_{i=1}^{h} HF^{k-1}EE'F'^{k-1}H'.$$

On dira que le système est complément capturable modulo Ker H ou "output capturable", s'il existe une stratégie causale telle que, pour toute perturbation $v(\cdot)$, et tout état initial, on ait $y(t_1)=0$ pour t_1 fixé à l'avance.

Toutefois, pour des raisons techniques, la définition précise diffère un peu suivant qu'on est dans le cas discret ou continu. Nous donnerons donc ces définitions plus loin avec les preuves. Le fait à noter est que le critère est le même dans les deux cas.

THEOREME 3. La condition nécessaire est suffisante pour que le système (H,F,G,E) soit complètement output capturable est qu'il soit complètement u-output commandable, et que

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{Im} \mathcal{D}_k \subset \operatorname{Im} \mathcal{C}_k, \qquad k=1,\dots,n.$$

2.1. Système discret

DEFINITION. Le système discret (*) est complètement output capturable s'il existe un instant t_1, qu'il suffit de prendre à égal à n, et une stratégie $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ tels que, pour tout état initial, et quelque soit la perturbation $t \to v(t)$, le système commandé par

$$\text{(24)} \qquad u(t) = \varphi\,(x(t),v(t),t)$$

satisfasse

$$\text{(25)} \qquad y(t_1) = 0.$$

DEMONSTRATION du théorème 3. Condition nécessaire. Il est manifestement nécessaire que le système soit complètemnt u-output commandable. Sinon, pour les

états initiaux non u-commandables modulo Ker H, la perturbation v = 0, suffirait à empêcher la capture (25).
En outre, en posant

$$U_k = \begin{pmatrix} u(t_1-k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u(t_1-1) \end{pmatrix} , \qquad V_k = \begin{pmatrix} v(t_1-k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v(t_1-1) \end{pmatrix} ,$$

on voit immédiatement qu'on a

$$y(t_1) = HF^k x(t_1-k) + \mathcal{C}_k U_k + \mathcal{D}_k V_k .$$

Admettons donc que

(26) $$HF^k x(t_1-k) \in \mathrm{Im}\, \mathcal{C}_k ,$$

ce qui apparait comme une condition nécessaire pour que la capture (25) puisse être obtenue contre v=0, mais que (23) soit violée. Il existe alors V_k tel que

$$HF^k x(t_1-k) + \mathcal{D}_k V_k \notin \mathrm{Im}\, \mathcal{C}_k .$$

Donc, contre une telle perturbation (même si, a cet instant, elle est connue pour tout le futur), aucune commande ne peut assurer La capture.

Condition suffisante. Si le système est complètement u-output commandable, $\mathrm{Im}\, \mathcal{C}_n = \mathbb{R}^m$, et donc (26) est satisfait pour le k=n. Montrons donc que l'hypothèse (23), qui est équivalente à

(27) $$\mathrm{Im}\, HF^{k-1} E \subset \mathrm{Im}\, \mathcal{C}_k = \mathrm{Im}\, C_k$$

pour tout k, implique alors que la stratégie

$$u(t) = - G'F^{t_1-t-1} H' C^{\dagger}_{t_1-t} HF^{t_1-t-1} (Fx(t) + Ev(t))$$

assure (26) pour tout k, et ce quelque soit v(·).

En reportant cette expression de u(t) dans l'équation (*) on obtient

$$(28)\quad HF^{k-1}\ x(t_1-k+1) = (I-HF^{k-1}GG'F'^{k-1}H'C_k^{\dagger})\ (HF^k\ x(t_1-k) + HF^{k-1}EV(t_1-k)).$$

Mais d'après (26) et (27), on a

$$HF^k\ x(t_1-k) + HF^{k-1}Ev(t_1-k) = C_k\ C_k^{\dagger}\ (HF^k\ x(t_1-k) + HF^{k-1}Ev(t_1-k)),$$

de sorte que (28) s'écrit aussi

$$HF^{k-1}\ x(t_1-k+1) = (C_k-HF^{k-1}GG'F'^{k-1}H')C_k^{\dagger}(HF^k\ x(t_1-k) + HF^{k-1}Ev(t_1-k)),$$

soit d'après la définition (22) de C_k,

$$HF^{k-1}\ x(t_1-k+1) = C_{k-1}\ HF^{k-1}(Fx(t_1-k) + Ev(t_1-k)) \quad \epsilon \text{ Im } C_{k-1}.$$

le même calcul permet finalement de passer de

$$HF\ x(t_1-1)\ \epsilon \text{ Im } GG'.$$

à (25). ∎

REMARQUE 4. Cette démonstration un peu compacte cache en fait un raisonnement sous jacent très simple de programmation dynamique, qui peut être étendu au cas non stationnaire, ou à d'autres structures d'information (cf.[15])

REMARQUE 5. La condition (23) peut aussi s'écrire

$$(29)\qquad \exists\, \varepsilon > o : \forall k \qquad C_k - \varepsilon D_k > 0.$$

Cette condition peut s'étendre au problème non stationnaire, en utilisant les matrices de commandabilité non stationnaires correspondantes. On vérifie alors que (29) est encore la condition nécessaire et suffisante de capturabilité. L'existence de ce critère formellement identique pour les cas stationnaires et non-stationnaires est une autre similitude intéressante avec la théorie de la commandabilité.

2.2. Système continu

DEFINITION. Le système continu (**) est complètement output capturable si pour t_1 donné il existe une stratégie $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ telle que, pour toute perturbation $v(\cdot) \in \Omega_v = L^2([0,t_1] ; \mathbb{R}^q)$, le système commandé par

$$(30) \qquad u(t) = \varphi(x(t),t)$$

i) ait une solution,
ii) que cette solution engendre par (30) une commande $u(\cdot) \in \Omega_u = L^2([0,t_1], \mathbb{R}^p)$
iii) et qu'elle satisfasse (25) :

$$(25) \qquad y(t_1) = 0.$$

DEMONSTRATION du théorème 3. Nous ne démontrerons que la condition suffisante, la condition nécessaire étant notablement plus technique. Pour une preuve détaillée voir [16].

La condition (23) est équivalente à

$$(31) \qquad \exists \varepsilon > 0 : \forall t < t_1, \quad C(t) - \varepsilon D(t) > 0$$

où $C(t)$ et $D(t)$ sont les équivalent continus de C_k et D_k :

$$C(t) = H \int_t^{t_1} \Phi(t_1,\tau)\, GG'\Phi'(t_1,\tau)\, d\tau\, H'$$

(32)

$$D(t) = H \int_t^{t_1} \Phi(t_1,\tau)\, EE'\Phi'(t_1,\tau)\, d\tau\, H'$$

et $\qquad \Phi(t_1,t) = e^{(t_1-t)F}.$

Ceci se voit en considérant les dérivées en t_1 de la matrice $C-\varepsilon D$, en exprimant que la première doit être négative ou nulle, puis en remarquant que la deuxième, restreinte au noyau de la première, est nulle, et que donc la troisième, restreinte à ce même noyau, doit être négative ou nulle, et ainsi de suite, en considérant les intersections des noyaux successifs des dérivées impaires, les dérivées paires s'annulant sur ces intersections.

Nous montrons enfin que (31) assure la capturabilité. Posons

(33) $$Z(t) = \Phi'(t_1,t)H'(C(t)-\varepsilon D(t))^{-1}H\,\Phi(t_1,t).$$

Cette matrice existe, car $C-\varepsilon D$ est par hypothèse positive définie, donc inversible. On a en outre,

(34) $$Z(t) \geq 0$$

C'est un calcul direct, bien que fastidieux, de vérifier l'identité suivante, où $x(t)$ est défini par (**) :

$$\frac{d}{dt}\, x'(t)Z(t)x(t) = \| u+G'Z(t)x(t)\|^2 - \|u(t)\|^2 - \frac{1}{\varepsilon}\| v-\varepsilon E'Z(t)x(t)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|v(t)\|^2.$$

Intégrons cette égalité de 0 à $t < t_1$. En réarrangeant, il vient :

(35) $$\int_0^t \|u(s)\|^2 ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|v(s)\|^2 ds + x'(o)Z(o)x(o) - x'(t)Z(t)x(t)$$

$$- \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_o}^t \|v(s-\varepsilon E'Z(s)x(s)\|^2 ds$$

$$+ \int_{t_o}^t \|u(s)+G'Z(s)x(s)\|^2 ds.$$

Supposons que nous utilisions la stratégie $u(s)=\varphi(x(s),s)$ où

$$\varphi(x,t) = -G'Z(t)x(t).$$

Elle est linéaire en x. Donc pour $t<t_1$, (**) a une solution sur $[o,t]$. Cette solution vérifie donc (35), mais la dernière intégrale y est alors nulle. Nous nous intéressons maintenant au comportement de ces quantités quand $t \to t_1$.

Du fait de (34), on voit qu'on a

$$\int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|v(s)\|^2 ds + x'(o)Z(o)x(o).$$

Si $v(\cdot) \in \Omega_V$, l'intégrale du deuxième membre est bornée, donc aussi celle du premier membre et $u(\cdot) \in \Omega_u$.

De plus, dans (35) (ou la dernière intégrale est nulle) le terme de gauche est positif, donc aussi celui de droite. Les deux premiers termes, positifs, étant bornés, chacun des deux suivants, qui sont tous les deux négatifs, doit être borné en valeur absolue. Il existe donc un réel positif a tel que

$$\forall t < t_1, \qquad x'(t)Z(t)x(t) \leq a^2$$

soit

$$(36) \qquad x'(t)\Phi'(t_1,t)H'(C(t)-\varepsilon D(t))^{-1}H\Phi(t_1,t)x(t) \leq a^2.$$

Considérons alors la norme.

$$\| H\Phi(t_1,t)x(t)\| = \| [C(t)-\varepsilon D(t)]^{\frac{1}{2}} [C(t)-\varepsilon D(t)]^{-\frac{1}{2}} H\Phi(t_1,t)x(t)\|$$

donc, en utilisant l'inégalité de Schwartz, puis (36),

$$\| H\Phi(t_1,t)x(t)\| \leq \| [C(t)-\varepsilon D(t)]^{\frac{1}{2}}\| a.$$

Mais $C(t)$ et $D(t)$ tendent vers zéro quand $t \to t_1$, donc aussi $(C-\varepsilon D)^{\frac{1}{2}}$.

Donc $H\Phi(t_1,t)x(t) \to 0$, et comme $\Phi(t_1,t) \to I$, il en découle que, en définissant $x(t_1)$ comme la limite de $x(t)$ quand $t \to t_1$, $Hx(t_1) = 0$. (comme u et v sont de carré sommable, donc a fortiori sommables sur $[o,t_1]$, on est assuré que $x(t_1)$ existe.) ∎

REMARQUE 6. La condition (31), peut s'étendre au cas non stationnaire en prenant pour Φ, dans (32), la matrice de transition associée à F. La démonstration ci-dessus reste rigoureusement inchangée. Elle apparaît donc bien comme l'équivalent continu de la relation (29). Comme pour la commandabilité, c'est l'expression en termes de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{B}_k$ qui ne peut être obtenue que dans le cas stationnaire.

On est donc en présence d'un concept qui semble avoir des propriétés intéressantes du point de vue de la théorie des systèmes. Mais ses conséquences, notamment pour des problèmes en horizon infini (stabilisabilité contre certaine classes de perturbation,...) n'ont pas encore été étudiées à notre connaissance.

3 - Observabilité

La dualité (au sens de la théorie des systèmes) établit, dans la théorie classique, un parallèle remarquable entre les problèmes d'estimation et de contrôle. On la verra, en partie, à l'oeuvre dans la théorie ci-dessous, due à SONNEVEND [13] (1) et qui reprend des éléments de dualité presque oubliés depuis qu'ils avaient été introduits par BASILE et MARRO [17].

3.1. - Découplage des perturbations en information imparfaite

On considère encore le système linéaire à deux entrées (*) ou (**), mais observé seulement à l'aide d'une deuxième sortie dite mesure z :

(37) $z(t) = Jx(t).$

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION. Dans le système (*) observé par z donné par (37), l'état à l'instant i peut-être déterminé modulo $\mathfrak{W}_i \cap \operatorname{Ker} J$, où les sous espaces $\mathfrak{W}_i$ satisfont la récurence ci-dessous :

(38) $\mathfrak{W}_{i+1} = F(\mathfrak{W}_i \cap \operatorname{Ker} J) + \mathcal{D}$.

PREUVE. x(o) est inconnu, mais z(o) permet de le déterminer modulo Ker J :

$$x(o) \in \bar{x}(o) + \operatorname{Ker} J.$$

Donc

$$x(1) \in F(\bar{x}(o) + \operatorname{Ker} J) + Gu + \mathcal{D} = F\bar{x}(o) + Gu + \mathfrak{W}_1.$$

Puis, à nouveau, z(1) permet une détermination $\bar{x}(1)$ modulo Ker J, d'où

(39) $x(1) \in (F\bar{x}(o) + Gu + \mathfrak{W}_1) \cap (\bar{x}(1) + \operatorname{Ker} J)$

---

(1) Le professeur M. HAUTUS nous a signalé l'existence de travaux analogues, dus à AKASHI et IMAI (1979), et des travaux non encore publiés de PERNEBO, de SCHUMACHER et de WILLEMS et COMMAULT.

la récurence s'établit alors d'elle-même moyennant le lemme élémentaire suivant :

LEMME. Soit $\hat{x}_1$ un point quelconque du deuxième membre de (39) :

$$\hat{x}_1 \in (F\bar{x}(o)+Gu+\mathcal{W}_1) \cap (\bar{x}(1)+\text{Ker } J)$$

on a :

$$(F\bar{x}(o)+Gu+\mathcal{W}_1) \cap (\bar{x}(1)+\text{Ker } J) = \hat{x}(1)+\mathcal{W}_1 \cap \text{Ker } J.$$

la démonstration est élémentaire.

REMARQUE 7. La récurence (38) est identique à la récurence (12), si l'on y remplace H par J et G par E, à ceci près qu'elle est initialisée par $\mathbb{R}^n$ au lieu de $\{0\}$. Elle converge vers le plus grand espace $\mathcal{W}^*$ satisfaisant.

(40) $\qquad \mathcal{W}^* = F(\mathcal{W}^* \cap \text{Ker } J) + \mathcal{E}$

La même similitude pourrait être établie entre la récurence définissant $\mathcal{V}^*$, et celle définissant le sous espace d'erreur dans la détermination de x(o) au temps i, ces similitudes ayant une interprétation précise en termes de dualité, que nous omettons ici.

REMARQUE 8. Si au lieu de supposer x(o) inconnu, on le suppose connu, alors la récurence (38) doit être initialisée avec $\mathcal{W}_o = \{0\}$, et elle converge vers l'espace $\mathcal{W}_*$ correspondant exactement à $\mathcal{V}_*$ si on remplace H par J et G par E.

La question de l'observabilité du système continu (**) est plus délicate, et dépend de savoir dans quelle mesure on est autorisé à utiliser les dérivées de z. Une formulation naturelle, qui interdit ces dérivations, mène au même résultat qu'ici. C'est cet espace $\mathcal{W}_*$ que nous allons utiliser ci-dessous. On voit facilement qu'il satisfait les propriétés ci-dessous :

$\mathcal{W}_*$ est le <u>plus petit</u> sous espace tel que

(41) $\quad F(\mathcal{W}_* \cap \text{Ker } J) \subset \mathcal{W}_*$

(42) $\qquad \mathcal{E} \subset \mathcal{W}_*$

Ayant clarifié la question de l'observation en présence des perturbations v, on peut aborder le problème ci-dessous :

PROBLEME 3. Existe-t-il une stratégie fondée sur la seule connaissance des mesures z passées, qui découple la perturbation v de la sortie y ?

THEOREME 4. Une condition nécessaire (à condition, pour le système continu, de faire les restrictions évoquées ci-dessus, sur la dérivation de la mesure) et suffisante pour que le problème 3 ait une solution est que

(43) $\mathcal{W}_* \subset \mathcal{V}^*$

DEMONSTRATION. La condition nécessaire est, à ce jour, délicate à montrer, et nous l'omettons ici. Nous donnons une preuve très simple (et apparemment nouvelle) de la condition suffisante. Comme dans la première section, nous introduisons une matrice W qui engendre $\mathcal{W}_*$. Comme en (8a) on vérifie que (41) implique qu'il existe des matrices K et M telles que

(44) $(F-K\,H)\,W = WM,$

et (42) implique qu'il existe une matrice N telle que

(45) $E = WN.$

(43) implique qu'il existe une matrice L telle que

(46) $W = VL.$

En outre, rappelons (8a) :

(8a) $(F-GC_1)V = VA$

et considérons un état $\bar{x}$ appartenant à $\mathcal{W}_* \cap$ Ker J. Du fait de (41), $F\bar{x}$ appartient à $\mathcal{W}_*$ donc à $\mathcal{V}^*$ par (43). On peut donc, dans (8a), chosir C_1 tel que

$$\mathcal{W}_* \cap \operatorname{Ker} J \subset \operatorname{Ker} C_1$$

soit

(47) $\qquad C_1 = C_0 + DJ$

avec

(48) $\qquad C_0 W = 0.$

Considérons maintenant la loi de commande

(49) $\qquad u(t) = -C_0 \hat{x}(t) - Dz(t),$

où $\hat{x}$ est donné par l'observateur

(50) $\qquad \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + G u(t) - K(z(t) - J\hat{x}(t))$

ou son équivalent continu.

Désignons dorénavant par s la variable de Laplace (pour éviter les confusions). On voit facilement que l'erreur $\tilde{x}=x-\hat{x}$ est donnée dans le domaine fréquentiel, par

(51) $\qquad \tilde{x} = (sI-F+KJ)^{-1} E v$

et en remplaçant $\hat{x}$ par $x-\tilde{x}$ dans (49), et en reportant dans (*) ou (**),

$$y = H(sI-F-GC_1)^{-1} (-GC_0 \tilde{x}+Ev)$$

ou

(52) $\qquad y = H(sI-F-GC_1)^{-1} (-GC_0(sI-F+KJ)^{-1}+I) E v.$

Il nous reste à étudier la fonction de transfert (52). Remplaçons E à l'aide de (45), puis utilisons le fait que (44) donne

$$(sI-F+KJ)^{-1} W = W (sI-M)^{-1}$$

et (48), pour obtenir

$$y = H(sI-F-GC_1)^{-1} \; W \; N \; v.$$

On utilise alors (46), puis comme à la section 1

$$H(sI-F-GC_1)^{-1} \; V = HV(sI-A)^{-1} = 0$$

pour conclure à la nullité de la fonction de transfert de v à y. ∎

3.2. Observations bruitées.

La théorie ci-dessus ne correspond pas exactement à la dualisation recherchée. En effet, c'est toujours un problème de commande, et surtout la perturbation est restée dans la dynamique, non dans l'observation.

Il y a eu quelques tentatives pour traiter des problèmes d'optimisation avec observation bruitée, par des méthodes de type jeux, similaires quant au fonds à la construction (38), mais pour des commandes bornées. [18] [19]

Nous proposons ici une approche différente, qui ressemble suffisamment à la théorie de Hamilton-Jacobi-Bellman pour qu'on puisse espérer qu'une particularisation à une forme de problème linéaire donne, comme dans la théorie classique, des résultats de type théorie des systèmes. Elle consiste à chercher un feedback "instantané" de la mesure garantissant une performance minimale. Ceci n'est raisonnable que si cette mesure est suffisamment lisse, et a été préalablement débarassé de ses composantes haute fréquence.

On considère le système ci-dessous, où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^m$

$$\dot{x} = f(x,u,v), \qquad u \in \mathcal{U}, \qquad v \in \mathcal{V},$$

$$y = h(x,w), \qquad w \in \mathfrak{W}, \qquad \dot{w} \in \mathfrak{R},$$

où on prend pour les erreurs de mesure un modèle à dérivée bornée. (Ceci peut être réaliste si la mesure est préfiltrée). On lui associe le critère

$$J = K(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x(t),u(t),t)dt.$$

Introduisons l'ensemble ci-dessous

$$\Delta(y,u) = \bigcup_{\substack{(x,w) \in h^{-1}(y) \\ v \in \mathcal{V},\ r \in \mathcal{R}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} f(x,u,v) + \frac{\partial h}{\partial w}(x,w) r \\ L(x,u) \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

THEOREME 5. S'il existe une fonction V de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continument différentiable, et une fonction φ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$, telles que

i) l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, \varphi(h(x,w),t),v)$$

a une solution quelques soient les perturbations admissibles v et w,

ii) $\forall \binom{\gamma}{\ell} \in \Delta(y,\varphi(y,t))$, $\quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y}\gamma + \ell \leq 0$,

iii) $\forall w \in \mathcal{W}$, $\quad V(h(x,w),t_1) \geq K(x)$

alors la commande $u(t) = \varphi(y(t),t)$ assure contre toute perturbation

$$J(\varphi) \leq V(y_0,t_0)$$

DEMONSTRATION. On dérive l'équation de mesure pour calculer

$$\frac{d}{dt} V(y(t),t) = \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} f(x,u,v) + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial w} \dot{w} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

de sorte que ii) ci-dessus équivalent à

$$\frac{d}{dt}\,(V(y(t),t)) + L\,(x(t)\,\varphi\,(h(x(t),w(t)),t),t) \leq 0$$

pourvu que $u = \varphi\,(y,t)$. Il ne reste plus qu'à intégrer cette inégalité de t_0 à t_1 et à utiliser iii) pour obtenir le résultat annoncé. ∎

Le théorème ci-dessous mène donc à la résolution d'une équation de type Hamilton Jacobi-Isaacs (ou Lyapunov-Isaacs) :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{\substack{v \in \mathcal{V} \\ (x,w) \in h^{-1}(y) \\ r \in \mathcal{R}}} \left[\frac{\partial V}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial w} r\right) + L \right] \leq 0.$$

Cette équation se simplifie si

$$h(x,w) = g(x)+w.$$

On pose alors

$$X(y) = \bigcup_{w \in \mathcal{W}} g^{-1}(y-w),$$

et

$$\sigma_{\mathcal{R}}(p) = \max_{r \in \mathcal{R}} p'r$$

et l'équation à résoudre devient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sigma_{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{\substack{x \in X(y) \\ v \in \mathcal{V}}} H\left(x, \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v}, u, v\right) \leq 0,$$

ou H désigne l'hamiltonien du problème de départ.

REMARQUE 8. Cette méthode ne prétend à aucune optimalité d'aucune sorte. Il n'y a donc pas grand chose à gagner à chercher à remplacer l'inéquation ci-dessus par l'équation correspondante (avec égalité au lieu de $\leq$).

En conclusion, on espère que cette présentation a montré que si la théorie des systèmes à deux joueurs a fait quelques progrès notables ces dernières années, elle reste néanmoins relativement peu développée, surtout quant au traitement des problèmes d'estimation, quand il y a des erreurs de mesure.

On peut remarquer aussi que la notion duale de la capturabilité n'est pas connue, bien que certains résultats commencent à apparaître faisant intervenir deux "observateurs".

Enfin, l'Economiste ne manquera pas de remarquer qu'on n'a, jusqu'ici, parlé que de systèmes à deux joueurs. Chaque chose en son temps!

[1] RE.KALMAN, P.F. FALB et M. ARBIB Topics Mathematical Systems Theory, M.C. Grau Hill.

[2] W.M VONHAM Linear multivariable linear control, a geometric approach, Springer lecture notes in Mathematical Systems, n° 101.

[3] C. LOBRY "Action of control semigroups on manifold and application to realization theory". Group theoretical methods in physics. Actes d'un congrès tenu à Tubingen, 1977. Springer lecture notes in Physics.

[4] L.S. PONTRJARGIN et al. Mathematical Theory of Optimal Control Processes, Willey interescience, 1962

[5] J.L. LIONS Contrôle des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris, 1968.

[6] J.C. WILLEMS "Stationary least squares optimal control and the algebraic Riccati équation" IEEE Transactions ou Automatic Control, vol AC 16, pp 621-634. 1971

[7] P. BERNHARD et G. COHEN "Etude d'une fonction fréquentielle intervenant dans un problème de commande optimale..." RAIRO J2, PP63-85, 1973

[8] P. FAURRE, M. CLERGET, F. GERMAIN. Opérateurs rationnels de type positif. Dunod PARIS, 1979.

[9] A. BENSOUSSAN. Filtrage des systèmes linéaires, Dunod, PARIS, 1970.

[10] W. FLEMING & RISCHEL - Deterministic and stochastic optimal control- Springer 1975.

[11] R. ISSACS. Differential Games, J. Wiley Interscience, 1965.

[12] P. BERNHARD. "Contribution à l'étude des jeux différentiels à deux joueurs somme nulle et information parfaite". Thèse d'Etat. Université PARIS VI, 1979

[13] G. SONNEVEND "Output regulation in partially observable linear distributed systems" Lecture Notes in Control & Information Sciences Vol.6, Springer 1978.

[14] EMRE et M.HAUTUS "A polynomial characterization of (A,B) invariant and reachability subspaces "Memorandum COSOR 78-19, Eindhoven - University of Technology, 1978.

[15] P.BERNHARD "Sur la commandabilité des systèmes linéaires dynamiques discrets à deux joueurs" RAIRO J 3, pp 53-68, 1972.

[16] P.BERNHARD "Exact controllability of linear, perturbed, continuous time systems", IEEE Transactions on Automatic Control, AC.25 n° 1,1980.

[17] BASILE and MARRO. "A new characterization of some structural properties of linear systems". International J[al] of Control, 17, pp 931-943. 1973

[18] GLOVER et SCHWEPPE "Control of linear dynamical systems with set-constrained disturbances" IEEE Transactions on Automatic Control, AC 16, n° 5, pp 411-423, 1971.

[19] BERTSEKAS et RHODES "On the min-max controllability of target sets and target tubes" Automatica, vol.7, pp 233-244, 1971.