Revue R.A.I.R.O. n° Août 1972 - J-3, Pages 53-68

SUR LA COMMANDABILITE DES SYSTEMES LINEAIRES DISCRETS A DEUX JOUEURS

P. Bernhard (1)

Résumé. — *Etant donné un système dynamique sur lequel deux joueurs agissent, on étudie dans quelles conditions un état initial peut être transféré par le premier joueur, dans un sous-espace de capture donné, ce contre le gré du deuxième joueur. On distingue trois structures d'information possibles, représentant les cas physiquement les plus intéressants. L'optimalité des temps de capture ainsi obtenus est établie. On étudie d'abord le cas stationnaire puis on généralise au cas non stationnaire.*

INTRODUCTION

La notion de système à deux joueurs est rattachée à la théorie des jeux dynamiques, qui apparut en 1954 avec les premiers Rand Reports d'Isaacs, puis en 1965 avec son livre Differential Games [5]. Depuis lors, de nombreux auteurs ont étudié la théorie sous ses différents aspects, tant pour les jeux à deux joueurs que pour ceux à plusieurs joueurs, et pour les jeux à somme nulle ou non nulle.

Dans la définition d'un jeu dynamique, à deux personnes et à somme nulle, on donne un système dynamique contrôlé par deux antagonistes, un but, ou ensemble de capture, et un critère de performance qu'un des joueurs veut minimiser tandis que l'autre veut le maximiser. En plus du problème quantitatif ainsi défini, se pose le problème qualitatif de la possibilité qu'a un joueur de forcer l'état à atteindre le but, ou forcer la « capture », en un temps fini.

C'est dans ce type de préoccupation que nous nous plaçons en étudiant la possibilité qu'a un joueur de forcer l'état d'un système linéaire à atteindre sous un espace donné, et ce quel que soit l'action d'une autre commande, et suivant l'information disponible sur cette autre commande. Dans ce problème, la notion d'indice de performance a disparu. Nous étudierons cependant l'optimalité en termes de temps de « capture ».

(1) Centre d'automatique de l'E.N.S.M.P. - Fontainebleau.

Il faut remarquer que la deuxième commande peut, bien sûr, représenter un joueur hostile, mais aussi une perturbation inconnue de quelque nature que ce soit agissant sur le système. On se rapproche alors de l'optique « conception dans le cas le plus défavorable », ou « politique du pire » dont les possibilités n'ont encore été explorées que très partiellement. Bien que la considération de systèmes linéaires perturbés soit ancienne, il est remarquable qu'aucune étude de leur commandabilité malgré ces perturbations n'ait été effectuée jusqu'à présent. C'est ce que cet article se propose de faire.

Nous n'étudierons ici que les systèmes discrets. La théorie classique de la commandabilité (Kalman [6]) nous a habitués à considérer les systèmes discrets et continus comme parallèles. Cependant, l'élément déterminant ici est la *structure d'information*. Dans le cas discret, il n'y a pas d'intermédiaire entre la situation où le joueur 1 connaît la commande du joueur 2 pour le prochain pas (une situation de maximin) et celle où ne la connaissant pas, il doit pouvoir commander le système quoi que fasse le joueur 2, donc même si celui-ci se comporte comme s'il connaissait la commande du joueur 1 (une situation de minimax). La très grande complexité du cas continu par rapport à celui-ci apparaît dans notre référence [1], comme dans les travaux antérieurs de Flemming [2, 3], de Friedmand [4], de Pschenichnyi [11] et d'autres.

Nous dégagerons les idées et méthodes essentielles sur le problème stationnaire, puis nous vérifierons ensuite que les résultats fondamentaux sur la structure des propriétés étudiées et leurs relations s'étendent aux systèmes non stationnaires, au prix de calculs légèrement plus compliqués qui interdisent pratiquement l'extension à ces systèmes des tests de commandabilité que nous aurons établis pour le premier cas.

I - SYSTEMES STATIONNAIRES

1. Le problème

Nous voulons étudier la possibilité qu'a un joueur agissant sur un système discret de forcer l'état à atteindre un sous-espace donné contre le gré d'un adversaire, suivant les informations dont dispose chacun des joueurs.

Nous décrivons le système :

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) + Jv(k).$$

$k \in N$ est le temps. L'instant initial sera toujours $k = 0$.
$x \in R^n$ est l'état.
$u \in R^m$ est la commande du joueur 1, qui veut contrôler le système.
$v \in R^{m'}$ est la commande de l'adversaire, le joueur 2.
F est une matrice constante de dimension $n \times n$.
G et J sont des matrices constantes de dimension $n \times m$ et $n \times m'$ respectivement.

Un sous-espace M de R^n est donné. Il peut être constitué de l'origine seulement, la « *capture* » est définie par $x \in M$, et est l'objectif du joueur manipulant u. Nous introduisons alors un sous-espace L appelé « espace géométrique », complément (orthogonal par exemple) de M.

$$R^n = M \oplus L,$$

et l'opérateur π projection de R^n sur L parallèlement à M :

$$\pi x \in L, \quad x - \pi x \in M, \quad \forall x \in R^n$$

de sorte que la capture peut être caractérisée par

$$\pi x = 0.$$

Définitions. Un état est dit *u-commandable modulo M* (resp. v-commandable) en k pas s'il existe une suite u(.) (resp. v(.)) qui le transfère en k pas en M, l'autre commande restant toujours nulle (c'est-à-dire que si on prend cet état pour état initial, l'état au temps k : $x(k)$, appartient à M).

Un état est dit *commandable modulo M*, s'il existe un instant k tel qu'il soit commandable en k pas. (On sait qu'on pourra toujours considérer $k \leqslant n$).

Un état de l'espace géométrique est dit *u-accessible modulo M* (resp. v-accessible) s'il existe une suite u(.) (resp. v(.)) transférant l'origine en un état dont la projection sur l'espace géométrique soit l'état considéré, l'autre commande restant toujours nulle.

Les critères de commandabilité et d'accessibilité modulo M, dans l'esprit des critères traditionnels, ressortiront des calculs que nous allons faire sans qu'il soit besoin d'y insister.

2. Méthode générale

Nous appliquons à ce problème une méthode développée par Pontryaguine [9, 10] pour des problèmes continus avec ensembles de commandes compacts convexes. Pour ce faire, nous introduisons les notations suivantes :

$$P_k = \pi \text{ image } \{ F^k G \} = \text{image } \{ \pi F^k G \},$$
$$Q_k = \pi \text{ image } \{ F^k J \} = \text{image } \{ \pi F^k J \},$$

où π est considéré comme un opérateur dans la première expression et comme la matrice exprimant cette opération dans la seconde. Remarquons qu'on a la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{q} P_k \subset \sum_{k=0}^{n-1} P_k, \forall q$$

avec l'égalité pour $q \geqslant n - 1$.

Ceci est une conséquence immédiate du fait suivant :

$$\sum_{k=1}^{q} P_k = \text{image } \{ \pi G\, \pi FG, \ldots, \pi F^q G \} = \pi \text{ image } \{ G\, FG, \ldots, F^q G \},$$

et du théorème de Caley Hamilton.

Il est utile de remarquer aussi que la condition image $A \supset$ image B peut tester sur des rangs de matrices : rang A = rang (A, B).

Nous introduisons ensuite, en suivant Pontryaguine [8], la *différence géométrique* de deux ensembles, notée $A \overset{*}{-} B$.

Définitions. La différence géométrique D de deux sous-ensembles A et B d'un espace vectoriel est le plus grand ensemble tel que

$$B + D \subset A.$$

C'est-à-dire qu'on a

$$A \overset{*}{-} B = D = \{ x \mid x + b \in A, \forall b \in B \}.$$

Cette différence est dite être à *balayage complet* si $B + D = A$. L'ensemble D peut être vide ou non. Les propriétés de cette opération ont été décrites ailleurs (*cf.* [1] et [10]), il nous suffit ici de remarquer la forme simple qu'elle prend pour des sous-espaces vectoriels. On constate en effet immédiatement la propriété suivante.

Proposition 1. Etant donnés deux sous-espaces A et B d'un espace vectoriel X, on a

$$A \overset{*}{-} B = \begin{cases} \varnothing \text{ si } A \not\supset B, \\ A \text{ avec balayage complet, si } A \supset B. \end{cases}$$

La méthode utilisée va alors consister à utiliser les outils définis ici pour construire l'ensemble V_k des états initiaux que le premier joueur peut transférer en M en k pas exactement. On définit V_k par l'intermédiaire d'ensembles W_k de la façon suivante :

$$x \in V_k \Leftrightarrow \pi F^k x \in W_k. \tag{2}$$

Ce sont les propriétés de ces ensembles W_k que nous allons étudier maintenant, afin de les construire, suivant l'information disponible au premier joueur.

3. Commandabilité forte

Définitions. Un état est dit « fortement commandable modulo M » (*cf.* Kalman [7]) si pour toute suite $v(.)$, il existe une suite $u(.)$ transférant cet état en M.

L'état sera dit fortement commandable en k pas s'il existe une suite $u(.)$ le transférant en M à l'instant k.

Le système (F, G, J) est dit complètement fortement commandable modulo M si tout état est fortement commandable modulo M.

La formulation ci-dessus correspond donc au cas où le premier joueur connaît a priori toute la commande du second. C'est le cas, par exemple, de perturbations arrivant par une ligne à retard, et qui seraient observables suffisamment longtemps à l'avance.

Exprimons donc que x_o est fortement commandable modulo M en k pas.

$$\pi x(k) = \pi F^k x_o + \sum_{j=0}^{k-1} \pi F^j [Gu(k-j-1) + Jv(k-j-1)] = 0,$$

$$-\sum_{j=0}^{k-1} \pi F^j Gu(k-j-1) = \pi F^k x_o + \sum_{0}^{k-1} \pi F^j Jv(k-j-1).$$

L'existence d'une suite $u(.)$ réalisant cette égalité est équivalente à

$$\pi F^k x_o + \sum_{j=0}^{k-1} \pi F^j Jv(k-j-1) \in \sum_{j=0}^{k-1} P_j.$$

Le fait que ceci soit vrai pour toute suite $v(.)$ est équivalent à

$$\pi F^k x_o + \sum_{j=0}^{k-1} Q_j \subset \sum_{j=0}^{k-1} P_j.$$

C'est-à-dire que l'ensemble V_k des états fortement commandables modulo M en k pas est caractérisé par

$$\pi F^k x_o \in W_k^\infty = \sum_{j=0}^{k-1} P_j \overset{*}{-} \sum_{j=0}^{k-1} Q_j. \tag{3}$$

Deux cas se présentent donc :

$$\sum_{j=0}^{k-1} P_j \supset \sum_{j=0}^{k-1} Q_j, \quad W_k^\infty = \sum_{j=0}^{k-1} P_j, \tag{4.a}$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} P_j \not\supset \sum_{j=0}^{k-1} Q_j, \quad W_k^\infty = \varnothing, \tag{4.b}$$

d'où le théorème suivant :

Théorème 1. A nombre de pas fixé, pour les propriétés modulo M, ou bien tous les états de l'espace géométrique v-accessibles sont u-accessibles, et tous les états u-commandables sont fortement commandables, ou bien aucun état n'est fortement commandable.

D'où le résultat suivant, conséquence immédiate du Théorème ci-dessus.

Corollaire. Si le système (F, G) est complètement accessible, modulo M, le système (F,G,J) est complètement fortement commandable modulo M.

On remarquera toute fois qu'un état peut être fortement commandable modulo M en k pas, et ne pas l'être en k' pas, $k' > k$. C'est cette possibilité qui oblige à la restriction « à nombre de pas fixé ». Elle sera levée, sous les hypothèses convenables, dans le prochain paragraphe.

4. Cas invariant

Le problème sera dit invariant si M est invariant par F. Un cas particulier important est celui où M se réduit à l'origine. Dans ce cas, le théorème ci-dessus s'énonce sans la restriction du nombre de pas fixé :

Théorème 2. Si le sous-espace de capture M est invariant par F, alors pour les propriétés modulo M, ou bien tous les états v-accessibles sont u-accessibles, et alors tous les états u-commandables sont fortement commandables, ou bien aucun état n'est fortement commandable.

Démonstration. La démonstration se fait à l'aide des deux lemmes suivants, extrêmement simples, avec lesquels nous prouvons que si un état est commandable ou fortement commandable, il l'est en n pas. Ceci prouvera le théorème 2, en appliquant le théorème 1 avec $k = n$.

Lemme 1. Si un état est commandable en k pas, il l'est en n pas. En effet, il suffit d'appliquer la commande 0 de l'instant k à l'instant n.

Lemme 2. S'il y a des états fortement commandables en k pas, il y en a de fortement commandables en n pas.

En effet, supposons W_k^∞ non vide :

$$\sum_{j=0}^{k-1} P_j \supset \sum_{j=0}^{k-1} Q_j$$

c'est-à-dire que pour toute séquence $v_0, v_1, \ldots v_{k-1}$, il y a une séquence $u_0, u_1, \ldots u_{k-1}$ telle que

$$\sum_{j=0}^{k-1} \pi F^j G u_j = \sum_{j=0}^{k-1} \pi F^j J v_j,$$

soit encore

$$\sum_{j=0}^{k-1} F^j G u_j - \sum_{j=0}^{k-1} F^j J v_j \in M,$$

et en multipliant à gauche par F^p, et utilisant l'invariance de M :

$$\sum_{j=0}^{k-1} F^{j+p} G u_j - \sum_{j=k}^{k-1} F^{j+p} J v_j \in M,$$

et que ceci soit possible pour toute suite v_j est équivalent à :

$$\sum_{i=p}^{k+p-1} P_i \supset \sum_{i=p}^{k+p-1} Q_i,$$

ceci pour tout p positif. Ceci joint à la relation d'où nous sommes partis permet de déduire, en prenant $p < k$, et en répétant l'opération plusieurs fois si nécessaire (on remarquera que ce point de la démonstration utilise de manière cruciale la stationnarité)

$$\sum_{j=0}^{n-1} P_j \supset \sum_{j=0}^{n-1} Q_j.$$

Alors, si un état est fortement commandable en k pas, et donc u-commandable en k pas, il y a des états fortement commandables en n pas, et ce sont tous les états u-commandables en n pas, dont ceux u-commandables en k pas.

Le théorème est démontré (ce théorème a été démontré par Kalman [7] dans le cas scalaire, et figure dans notre référence [1] sous une forme voisine de celle-ci).

5. Capturabilité

Définitions. Un état est dit capturable modulo M s'il existe une application u^1 de $R^n \times R^{m'} \times N$ dans R^m telle que pour toute suite $v(i)$, les suites $u(i) = u^1(x(i), v(i), i)$ et $v(i)$ ensemble transfèrent cet état en M.

L'état est dit capturable modulo M en k pas s'il existe une application de ce type qui le transfère en M à l'instant k. Le système (F,G,J) est dit complètement capturable modulo M si tous les états sont capturables modulo M.

Ce problème correspond donc au cas où le premier joueur n'a accès à la commande de son adversaire que pour le prochain pas. La solution est obtenue à l'aide de la proposition simple suivante :

Proposition 2. Pour qu'un état x_0 soit capturable en k pas, il faut et il suffit que quel que soit $v(0)$, qu'il existe $u(0)$ le transférant en un état $x(1)$ capturable en $k - 1$ pas.

Ceci s'exploite en disant que l'on doit pouvoir trouver $u(0)$ tel que

$$\pi F^{k-1}\, x(1) \in W^1_{k-1}.$$

W^1_k définissant l'ensemble V^1_k des états capturables en k pas.

Cette relation s'écrit :

$$\pi F^{k-1}\, x(1) = \pi F^k x_o + \pi F^{k-1}\, Gu(0) + \pi F^{k-1}\, Jv(0) \in W^1_{k-1}. \tag{5}$$

Qu'il existe un $u(0)$ réalisant ceci est équivalent à

$$\pi F^k x_o + \pi F^{k-1}\, Jv(0) \in W^1_{k-1} + P_{k-1},$$

et que cette relation soit vraie pour tout $v(0)$ équivaut à

$$\pi F^k x_o + Q_{k-1} \subset W^1_{k-1} + P_{k-1},$$

soit

$$\pi F^k x_o \in (W^1_{k-1} + P_{k-1}) \overset{*}{-} Q_{k-1}.$$

Enfin, ceci étant par définition équivalent à

$$\pi F^k x_o \in W^1_k,$$

on arrive à la relation de récurrence suivante :

$$W^1_k = (W^1_{k-1} + P_{k-1}) \overset{*}{-} Q_{k-1} = \begin{cases} W^1_{k-1} + P_{k-1} & \text{si } W^1_{k-1} + P_{k-1} \supset Q_{k-1} \\ \varnothing & \text{si } W^1_k + P_{k-1} \not\supset Q_{k-1} \end{cases} \tag{6}$$

Cette relation, avec la remarque que

$$W^1_0 = \{ 0 \},$$

permet de construire les W^1_k.

On voit que la condition pour que W_k soit non vide est que

$$P_0 \supset Q_0, P_0 + P_1 \supset Q_1, \ldots, \sum_{j=0}^{k-1} P_j \subset Q_{k-1},$$

condition beaucoup plus restrictive que celle d'existence de W_k^∞. Toutefois, quand elle est remplie, on a

$$W_k^1 = W_k^\infty = \sum_{j=0}^{k-1} P_j, \tag{8}$$

c'est-à-dire que s'il y a des états capturables en k pas, ce sont tous ceux qui sont u-commandables en k pas, et ils sont, naturellement, fortement commandables (toujours modulo M). Remarquons que du fait que les P_j sont des espaces vectoriels, la condition (7) est équivalente à

$$\sum_{j=0}^{q-1} P_j \supset \sum_{j=0}^{q-1} Q_j, \forall q \leq k. \tag{7'}$$

D'où, en comparant à (4.a), le résultat suivant :

Théorème 3. Il y a des états capturables modulo M en k pas, et ce sont exactement les états u-commandables modulo M en k pas, si et seulement si il y a des états fortement commandables en q pas pour tout q inférieur ou égal à k.

De ce résultat et de la relation (8), on déduit le fait suivant :

Corollaire. S'il y a des états fortement commandables pour tout k et le système (F,G) est complètement commandable, le système (F,G,J) est complètement capturable.

6. Capturabilité idéale

Définitions. Un état est idéalement capturable modulo M s'il existe une application u^o de $R^n \times N$ dans R^m telle que, quelle que soit la suite $v(i)$, les suites $u(i) = u^o(x(i),i)$ et $v(i)$ transfèrent cet état en M.

Un état est dit idéalement capturable modulo M en k pas s'il existe une application du type ci-dessus qui le transfère en M à l'instant k.

Le système (F,G,J) est dit complètement idéalement capturable modulo M si tous les états sont idéalement capturables modulo M.

Ce problème correspond donc au cas où le premier joueur n'a aucune information sur la commande de son adversaire, mais ne peut observer que l'état du système. Ici encore on a une proposition simple.

Proposition 3. Pour que x_o soit idéalement capturable en k pas, il faut et il suffit qu'il existe $u(0)$ tel que quel que soit $v(0)$, l'état soit transféré en un point $x(1)$ idéalement capturable en k–1 pas. Nous exploitons cette remarque comme précédemment.

Il doit exister un $u(0)$ tel que l'équation (5) soit vérifiée pour tout $v(0)$. C'est-à-dire que

$$\pi F^k x_o + \pi F^{k-1} Gu(0) + Q_{k-1} \subset W^o_{k-1},$$

ce que nous interprétons avec une différence géométrique. Puis l'existence d'un tel $u(0)$ caractérisant W^o_k, on arrive à

$$W^o_k = (W^o_{k-1} \overset{*}{-} Q_{k-1}) + P_{k-1} = \begin{cases} W^o_{k-1} + P_{k-1} \text{ si } W^o_{k-1} \supset Q_{k-1} \\ \varnothing \qquad \text{si } W^o_{k-1} \not\supset Q_{k-1} \end{cases} \tag{8}$$

avec encore $W^o_o = \{ 0 \}$.

Donc la condition pour que W_k soit non vide est que

$$\begin{cases} Q_o = \{ 0 \}, \text{ soit : image } J \subset M, \text{ et} \\ P_o \supset Q_1, (P_0 + P_1) \supset Q_2, \ldots, \sum_{j=0}^{k-2} P_j \supset Q_{k+1}. \end{cases} \tag{9}$$

On voit immédiatement que la condition (9) est plus restrictive que la condition (7) d'existence d'états capturables. Toutefois, quand elle est remplie, on a

$$W^o_k = W^1_k = W^\infty_k = \sum_{j=0}^{k-1} P_j \tag{10}$$

c'est-à-dire :

Théorème 4. Il y a des états idéalement capturables modulo M en k pas si et seulement si la condition (9) est vérifiée, et alors ce sont tous les états u-commandables modulo M en k pas.

Toutefois, la condition citée n'a pas d'interprétation simple. Remarquons le caractère très restrictif de cette condition, puisqu'elle impose, en particulier, $\pi J = 0$.

7. Optimalité

Définissons, pour chacune des trois structures d'information considérées, un temps de capture :

$$K_i(x) = \min_{k \in N} \{ k \mid x \in V^i_k \} \tag{11}$$

où i prend la valeur ∞ (commandabilité forte), 1 (capturabilité) ou 0 (capturabilité idéale).

Il lui correspond une loi de commande u^i, qui provoque la capture en $K^i(x)$ pas. Nous nous proposons d'étudier l'optimalité de cette loi de commande, et du temps de capture associé. Le problème ne se pose que pour $K^i(x_o)$ fini ce que nous supposerons partout dans ce paragraphe. Nous donnons de cette notion la définition suivante, qui correspond à la définition habituelle de la théorie des jeux :

Définition. La loi de commande u^i, et le temps de capture correspondant K^i, seront dits optimaux s'il existe une loi de commande v^i pour laquelle, avec la structure d'information considérée, K^i constitue le temps de capture minimum possible.

i) *Commandabilité forte.*

Par construction, si x_o n'appartient pas à V_k, il y a une suite v_i telle que x_o ne peut être transférée en M au pas k. Donc ici, l'optimalité de K^i est évidente.

ii) *Capturabilité et capturabilité idéale.*

Par construction, si x_o n'appartient pas à V_k^i, il existe $v(0)$ tel que $x(1)$ n'appartienne pas à V_{k-1}^i. ($i = 1$ ou 0). Toutefois, il nous reste à vérifier que le joueur 2 puisse simultanément assurer que $x(1)$ n'appartienne à *aucun* des V_q pour q inférieur à k. (Les propositions 2 et 3 écartent ce problème en figeant le nombre de pas considéré.) Si la réponse est affirmative ici, ce que nous démontrons ci-dessous, on verra dans [1] que cela n'est pas vrai pour des problèmes voisins.

La condition est qu'il existe $v(0)$ tel que

$$x(1) = Fx(0) + Gu(0) + Jv(0) \notin V_q^i \quad \forall q < K(x_o) - 1$$

soit, si image $G = P$

$$Fx(0) = Jv(0) \notin V_q^i + P \quad \forall q < K(x_o) - 1.$$

Du fait que V_q^i et P sont des espaces vectoriels, ceci est équivalent à un système de $K - 1$ équations linéaires, dont aucune ne doit être satisfaite. Remarquons alors que x_o n'appartient à aucun des V_{q+1}^1 considérés (même si on étudie $K^o(x_o)$, puisque quand V_q^o existe, il est égal à V_q^1). De ce fait, aucune de ces équations n'est identiquement vérifiée. L'ensemble sur lequel chacune est vérifiée constitue une variété affine Y_q de $R^{m'}$ (peut être vide). L'union d'un nombre fini de telles variétés ne peut être l'espace $R^{m'}$ tout entier, et il est donc possible de choisir $v(0)$ suivant (12). D'où le résultat recherché :

Théorème 5. Le temps de capture $K^i(x)$ défini en (11) et la loi de commande u^i correspondante sont optimaux.

II - SYSTEMES NON STATIONNAIRES

1. Le problème

Nous considérons maintenant un système

$$x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)u(k) + J(k)v(k). \tag{1}$$

L'instant initial sera en général noté k_o.

Le but est un sous-espace variable $M(k)$ de dimension fixe, et la projection sur l'espace géométrique $L(k)$ est un opérateur $\pi(k)$, grâce auquel la capture est définie par

$$\pi(k)x(k) = 0.$$

Nous allons étendre à ce système les théorèmes antérieurs à l'exception, toutefois, du théorème 2 qui constitue, nous l'avons souligné, un résultat de stationnarité.

Nous constaterons cependant que les critères établis dans la première partie ne gardent pas de forme simple pratiquement utilisable.

2. Commandabilité forte

Définitions. Un état est dit fortement commandable modulo M de k_o à K s'il est fortement commandable modulo $M(K)$ en $K - k_o$ pas, l'instant initial étant k_o.

Un état est dit fortement commandable modulo M à l'instant k_o s'il existe un instant K tel qu'il soit fortement commandable modulo M de k_o à K.

Nous établissons alors le premier théorème :

Théorème 1 (*). modulo M et de k_o à K fixés,

i) Si tous les états de l'espace géométrique v-accessibles sont u-accessibles, tous les états u-commandables sont fortement commandables,

ii) sinon, aucun état n'est fortement commandable.

Démonstration. On introduit les fonctions de transition φ et ψ des systèmes (F,G) et (F,J) telles que la solution du système 1 s'écrive :

$$x(k) = \Phi(k,k_o)x(k_o) + \varphi(k,u(.);k_o) + \psi(k,v(.);k_o) \tag{2}$$

ce qui est possible par linéarité. Les cartes φ et ψ étant linéaires en u et v, on a en particulier :

$$\varphi(k,o;k_o) = \psi(k,o;k_o) = 0. \tag{3}$$

i) La condition exprimée en i) revient à dire que pour tout $v_1(.)$, il existe $u_1(.)$ tel que

$$\pi(K)\varphi(K,u_1(.);k_o) = \pi(K)\psi(K,v_1(.);k_o)$$

et si un état x_o est u-commandable modulo M, il existe $u_o(.)$:

$$- \pi(K)\ \Phi(K,k_o)\ x_o = \pi(K)\ \varphi(K,u_o(.);k_o)$$

et par linéarité de φ, la commande $u_0 - u_1$ transfère l'état en $M(K)$.

(*) Nous adoptons la même numérotation que pour les théorèmes stationnaires correspondants.

ii) Supposons au contraire qu'il existe $v_1(.)$ tel que $\xi_1 = \pi(K)\ \psi(K,v_1(.);k_o)$ ne soit pas u-accessible modulo $M(K)$. Soit un état x_o quelconque. S'il n'est pas u-commandable, la commande $v(.) = 0$ montre qu'il n'est a fortiori pas fortement commandable. S'il est u-commandable et fortement commandable modulo M de k_o à K, alors il existe u_o et u_1 vérifiant

$$\pi(k)\ \varphi(K,u_o(.);k_o) = -\ \pi(K)\ \Phi(K,k_o)\ x_o,$$
$$\pi(K)\ \varphi(K,u_1(.);k_o) = -\ \pi(K)\ \Phi(K,k_o)\ x_o - \xi_1,$$

et par différence, en utilisant la linéarité de φ en u :

$$\pi(K)\ \varphi(K,u_0(.) - u_1(.);k_0) = \xi_1$$

contrairement à l'hypothèse que ξ_1 n'est pas u-accessible modulo M. Ce qui achève de démontrer le théorème.

Remarque. La démonstration ci-dessus n'utilise pas le fait que le système soit discret. En effet, nous avons insisté dans notre introduction sur le fait que cette hypothèse n'est cruciale que pour séparer la structure d'information de la capturabilité de celle de la capturabilité idéale. Elle n'a aucune raison d'intervenir ici.

Le théorème 2 (de la première partie) étant essentiellement un résultat de stationnarité, il ne peut être généralisé dans le cadre présent. Des contre-exemples seraient faciles à construire, avec $J(k)$ nul pour certains k et pas pour d'autres.

3. Capturabilité

L'extension de la définition de la capturabilité modulo M, de k à K, se fait exactement comme celle de la commandabilité forte.

Pour étudier la capturabilité, simple ou idéale, on introduit l'équivalent non stationnaire des espaces P_k introduits dans le cas stationnaire :

$$P(K,k) = \text{image}\ \{\ \pi(K)\ \Phi(K,k+1)\ G(k)\ \},$$
$$Q(K,k) = \text{image}\ \{\ \pi(K)\ \Phi(K,k+1)\ J(k)\ \},$$

où $\Phi(K,k+1) = F(K-1)\ F(K-2), \ldots, F(k+1),\ \Phi\ (K,K) = I.$

Dans le cas stationnaire, $P(K,k) = P_{K-k-1}$, et de même pour Q. Introduisons alors l'ensemble $V^1(K,k)$ des états capturables de k à K, défini à l'aide d'un ensemble $W^1(K,k)$ de l'espace géométrique :

$$V^1(K,k) = \{\ x \mid \pi(K)\ \Phi(K,k)x \in W^1(K,k)\ \},$$

et exprimons que x appartient à $V^1(K,k)$ en écrivant qu'il peut être transféré au premier pas en $V^1(K,k+1)$:

$$\pi(K)\ \Phi(K,k+1)\ x(k+1) \in W^1(K,k+1),$$
$$\pi(K)\ \Phi(K,k+1)\ x(k+1) = \pi(K)\ \Phi(K,k)\ x(k) + \pi(K)\ \Phi(K,k+1)\ [G(k)\ u(k) + J(k)\ v(k)].$$

Quel que soit $v(k)$, on doit donc avoir, pour tout $x(k) \in W^1(K,k)$

$$W^1(K,k+1) + P(K,k) \ni \pi(K)\,\Phi(K,k)\,x(k) + \pi(K)\,\Phi(K,k+1)\,J(k)\,v(k),$$

soit $$W^1(K,k+1) + P(K,k) \supset W^1(K,k) + Q(K,k).$$

Ce qu'on exprime à l'aide de la différence géométrique,

$$\begin{aligned} W^1(K,k) &= [W^1(K,k+1) + P(K,k)] \stackrel{*}{-} Q(K,k), \\ W^1(K,k) &= \{0\}. \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire, W, P et Q étant des sous-espaces vectoriels

$$W^1(K,k) = \sum_{i=q}^{K-1} P(K,i)$$

ou $$W^1(K,k) = \varnothing$$

la condition pour que $W(K,k)$ ne soit pas vide étant

$$\sum_{i=q}^{K-1} P(K,i) \supset Q(K,q), \qquad \forall q \in [k, K-1].$$

On vérifie immédiatement que, les P et Q étant des espaces vectoriels, ceci est équivalent à la condition

$$\sum_{i=q}^{K-1} P(K,i) \supset \sum_{i=q}^{K-1} Q(K,i) \qquad \forall q$$

d'où le théorème :

Théorème 3. Modulo M, et de k_o à K fixés :

i) soit tout état u-commandable de k à K est fortement commandable de k à K, pour tout $k \in [k_o, K-1]$, et alors ces états sont capturables sur le même intervalle, et en particulier les états u-commandables de k_o à K sont capturables (de k_o à K),

ii) soit il n'y a pas d'état capturable.

4. Capturabilité idéale

L'expression

$$\pi(K)\,\Phi(K,k)\,x(k) + \pi(K)\,\Phi(K,k)\,[G(k)\,u(k) + J(k)\,v(k)] \in W^o(K,k+1)$$

pour tout $x(k) \in W^o(K,k)$ doit maintenant être vérifiée avec un même $u(k)$, quel que soit $v(k)$, soit

$$W^o(K,k) + \pi(K)\,\Phi(K,k)\,G(k)\,u(k) + Q(K,k) \subset W^o(K,k+1).$$

Donc, il doit exister $u(k)$ tel que

$$W^o(K,k) \subset [W^o(K,k+1) \stackrel{*}{-} Q(K,k)] + \pi(K)\,\Phi(K,k)\,G(k)\,u(k)$$

d'où :

$$W^o(K,k) = [W(K,k+1) \overset{*}{-} Q(K,k)] + P(K,k).$$

Ce qui permet d'écrire, à nouveau

$$W^o(K,k) = \sum_{i=k}^{K-1} P(K,i)$$

ou

$$W^o(K,k) = \varnothing$$

la condition pour que W^o ne soit pas vide étant maintenant :

$$\sum_{i=q+1}^{K-1} P(K,i) \supset Q(K,q).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème correspondant :

Théorème 4. Modulo M, et de k_o à K fixés :

i) soit tous les états u-commandables de k à K sont idéalement capturables sur le même intervalle, pour tout k sur $[k_o, K-1]$ (et en particulier pour $k = k_o$),

ii) soit aucun état n'est idéalement capturable.

Cependant, de même que dans le cas stationnaire, ce théorème donne une propriété remarquable à la capturabilité idéale et une caractérisation des états idéalement capturables, mais pas un critère de capturabilité idéale. Le seul critère est la relation établie ci-dessus, d'un emploi peu pratique.

5. Optimalité

De même que dans le cas stationnaire, nous définissons, pour chacune des trois structures d'information, un temps de capture à partir d'un instant initial k_o par

$$K^i(x,k_o) = \min_{k \geq k_o} \{ k \mid x \in V^i(k, k_o) \}$$

et le temps de capture sera dit optimal, de même que la loi de commande u^i correspondante, s'il existe une loi de commande v^i telle que K^i soit le temps de capture minimum possible.

Pour une phase initiale (x,k_o) donnée, et une structure d'information donnée, soit

$$k = K^i(x,k_o),$$

K sera optimal si, et seulement si, il existe $v(k_o)$ tel que, quel que soit $u(k_o)$

$$x(k_o+1) \notin V^i(k,k_o+1) \quad \forall\, k \in [k_o+1, K-1].$$

Remarque : si $K \leq k_o + 1$ il est manifestement optimal. La question ne se pose donc que pour $k > k_o + 1$.

Par définition de K, on est sûr que pour tout $k \in [k_o + 1, K - 1]$, il existe un $\nu_k(k_o)$ tel que, quel que soit $u(k_o)$ l'état x_k correspondant verifie

$$x_k(k_o + 1) \notin V^i(k, k_o + 1)$$

cependant, il faut qu'il existe un même $\nu(k_o)$, indépendant de k, ayant cette propriété.

Les V^i étant des espaces vectoriels, chacune des inclusions considérées est une équation algébrique qui, par hypothèse, n'est pas identiquement vérifiée. Donc l'ensemble de ses solutions est affine, et la réunion finie d'ensembles affines ne pouvant constituer l'espace $R^{m'}$ tout entier, il existe un ν pour lequel aucune de ces équations n'est vérifiée.

III - CONCLUSION

On a donc complètement élucidé le problème de la commande pour chacune des trois principales structures d'information. Si, de même que pour la commandabilité ordinaire, les critères simples en termes de rang de combinaisons des matrices intervenant dans les données ne sont disponibles que pour le cas stationnaire, les propriétés structurelles caractérisant les états commandables et reliant les diverses propriétés entre elles subsistent inchangées pour les systèmes non stationnaires.

Le fait saillant est contenu dans la relation (I.10), qui reste valide mutatis mutandis dans le cas non stationnaire, et qui exprime que s'il y a des états idéalement capturables, par exemple, en k pas, alors augmenter l'information disponible ne permet pas d'agrandir l'ensemble des états initiaux capturables dans ce même nombre de pas.

Nous avons par ailleurs démontré l'optimalité des temps de capture obtenus, de sorte que la remarque ci-dessus entraîne aussi qu'augmenter l'information disponible au premier joueur ne permet pas de réduire le temps de capture si celle-ci était possible avec moins d'information.

Un autre fait intéressant est contenu dans le théorème 3 qui relie simplement les propriétés de commandabilité forte et de capturabilité, donnant une réponse quant à la deuxième quand on a systématiquement testé la première pour tout nombre de pas, inférieur ou égal à la dimension du système dans le cas stationnaire, ou inférieur au nombre de pas étudié, dans tous les cas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNHARD, « Linear Pursuit. Evasion Games and the Isotropic Rocket », *Stanford University Department of Aeronautics and Astronautics Report*, n° 413, Stanford University, California, 1970.

[2] FLEMMING, « The Convergence Problem for Differential Games », *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 3, 1961, pp. 102-106.

[3] FLEMMING, « The Convergence Problem for Differential Games II », *Advances in Game Theory, Annal of Mathematical Studies* 52, Princeton, N.J., 1964.

[4] FRIEDMAN, « On the Definition of Differential Games and the Existence of Value and Saddle Points », *Journal of Differential Equations*, Vol. 7, n° 1, 1970, pp. 69-91.

[5] ISAACS, « Differential Games », Willey, 1965.

[6] KALMAN, « On the General Theory of Control Systems », *Proceedings o, the First International Congress of the International Federation of Automatic Control*, Moscou, 1970.

[7] KALMAN, Notes de cours sur la théorie algébrique des systèmes. Stanford, 1970.

[8] NIKOLSKYI, « Direct L.S. Pontryagin methods in the linear non stationary differential game of pursuit », *Proceedings of the first international conference on the theory and applications of differential games*. Amherst, 1969.

[9] PONTRYAGUINE, « Linear Differential Games I », *Soviet Math. Doklady*, Vol. 8, n° 3, pp. 769-771, 1968.

[10] PONTRYAGUINE, « Linear Differential Games II », *Soviet Math. Doklady*, Vol. 8, n° 4, pp. 910-912, 1968.

[11] PSCHENICHNYI, « Leçons sur les Jeux Différentiels », *Cahiers de l'IRIA*, n° 4, I.R.I.A., 1971.

[12] VARAIYA, « Linear Pursuit Games », *Proceedings of the First International Conference on the Theory and Applications of Differential Games*, Amherst, 1969.