Principe des petits nombres

ou

Premier théorème de Lapalice

Pierre Bernhard

17 juillet 2015

1 Théorème fondamental

Théorème 1 (ou Principe des petits nombres, Lapalice) *La loi des grands nombres ne s'applique pas aux petits nombres*

2 Exemple d'application

2.1 La situation

Dans cette école d'ingénieurs, il y a 60 élèves par promotion. Chaque année, après les cours de "tronc commun", il est demandé aux élèves de choisir une option. En général, environ 6 d'entre-eux choisissent l'option **A**. Une année, pourtant, seulement 3 la choisissent. Le directeur des études, un métalurgiste, convoque alors le jeune professeur de **A**, un mathématicien, et lui demande l'explication, et notamment ce qui s'est passé au cours de **A**. Le jeune professeur répond qu'il n'y a rien à expliquer, et qu'il n'a donc pas d'explication à fournir.

2.2 Le modèle mathématique

Supposons qu'après les cours de tronc commun, les élèves ont tous une probabilité p de choisir l'option **A**. Manifestement, $p = 6/60 = .1$. La probabilité que n élèves choisissent l'option **A** est alors

$$P_n = \begin{pmatrix} 60 \\ n \end{pmatrix} (.1)^n (.9)^{60-n} = \frac{(60)!}{n!(60-n)!} (.1)^n (.9)^{60-n} .$$

Ainsi, la probabilité que trois élèves ou moins choisissent l'option **A** est

$$(.9)^{60} + 60 \times (.1)(.9)^{59} + 60 \times 59 \times (.1)^2 \times (.9)^{58} + 60 \times 59 \times 58 \times (.1)^3 \times (.9)^{57} > 0,598.$$

Qu'un événement ayant 60% de chances de se réaliser se réalise est un non-événement, qui ne demande pas d'explication. On devrait l'observer plus souvent.

2.3 Le lien avec le théorème fondamental

Le directeur des études attendait inconsciemment une certaine régularité statistique. Mais 6 est un petit nombre. Or la régularité statistique vient de la loi des grands nombres. Le directeur des études a rétorqué qu'il y a 60 élèves, et que ça devrait suffire à assurer une régularité statistique. Mais ce sont les nombres 3 et 6 qu'il faut considérer ici. (On observe une grande "dispersion statistique" des petits échantillons.)

3 Les autres théorèmes de Lapalice

Théorème 2 (Euler-Lapalice) *Quand on est au point le plus bas, si on s'écarte, ça ne descend pas.*

Plus connu sous le nom d'"inégalité d'Euler" en optimisation.

Théorème 3 *Une fois qu'on a tout linéarisé, ce qu'on obtient est linéaire.*

Ainsi, un modèle du monde fondé sur des "ratios", c'est à dire linéarisé, doit nécessairement prédire la fin du monde à plus ou moins brève échéance. (Référence au rapport Forester au Club de Rome.) En effet, la probabilité pour que le système linéaire soit cyclique (toutes les valeurs propres de module 1 si le système est en temps discret, ou imagnaires pures si le système est en temps continu) est exactement zéro. Donc soit le système est stable, et toutes les variables : population, ressources disponibles, ...tendent vers zéro : la fin du monde, soit il est instable et toutes ces variables tendent vers l'infini : la fin du monde. (Cette remarque est due à R. E. Kalman.)