

Des planimètres

Pierre Bernhard

20 mai 2012

Résumé On donne une explication du fonctionnement des planimètres polaire et linéaire plus simple que ce qu'on trouve d'habitude dans les livres ou sur le web.

1 Introduction

Un planimètre est un dispositif permettant de mesurer l'aire encrêlée par un contour donné sur un plan, appelé "carte". Il y a plusieurs types de planimètres, notamment le planimètre polaire et le planimètre linéaire. Nous examinerons successivement l'un puis l'autre, et donnerons une théorie unifiée des deux issue d'un aide mémoire "Sciences de l'Ingénieur" de 1913 [1], qui renvoie au livre "Théorie géométrique des planimètres" du colonel de la Noë, et m'a été signalé par mon frère Jean-Daniel Bernhard.

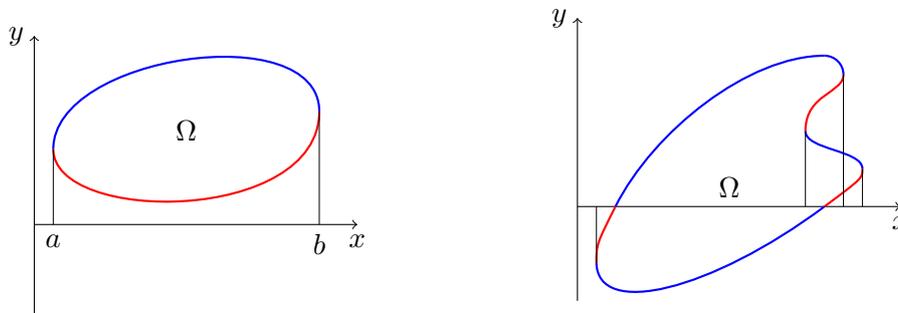
2 Une formule d'aire

Nous rappelons d'abord une formule classique concernant l'aire d'un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ "suffisamment régulière", disons C^1 par morceaux. Nous en donnons ici une preuve élémentaire, mais qui manque de rigueur. La preuve rigoureuse, plus courte mais moins élémentaire, est donnée en annexe.

Proposition 1 *L'aire A d'un domaine Ω de \mathbb{R}^2 de frontière C^1 par morceaux est donnée par l'une ou l'autre des deux intégrales curvilignes prises en parcourant $\partial\Omega$ dans le sens direct :*

$$A = \int_{\partial\Omega} -y \, dx = \int_{\partial\Omega} x \, dy. \quad (1)$$

Preuve Nous établissons la première formule. Considérons la figure de gauche ci-dessous. Nous utilisons l'interprétation classique de l'intégrale $\int_a^b y(x) \, dx$ comme



l'aire contenue entre la courbe $y(\cdot)$ et l'axe des x . L'intégrale curviligne s'interprète

comme l'intégrale de b à a de la courbe bleue, et de a à b de la courbe rouge. Mais le signe moins fait qu'il faut prendre positivement la première ($-dx$ y est positif) et négativement la deuxième. Et cette somme algébrique, différence de l'aire contenue sous la courbe bleue moins celle contenue sous la courbe rouge, est bien l'aire A du domaine Ω compris entre ces deux courbes.

L'examen de la figure de droite permet de se convaincre que ce résultat reste vrai pour une forme plus compliquée. Les courbes bleues sont celles pour lesquelles, $-dx$ et y sont de même signe, la surface contenue entre elles et l'axe des x sera comptée positivement, et les courbes rouges ont au contraire $-dx$ et y de signes opposés, de sorte que l'aire comprise entre elles et l'axe des x sera comptée négativement. Et cette somme algébrique représente bien l'aire du domaine Ω .

La deuxième expression peut être obtenue par un raisonnement symétrique, ou par la remarque suivante. On rappelle d'abord un fait, qui resservira :

Théorème 1 Soit f une fonction dérivable de n variables, notées ici x_1, x_2, \dots , et C un parcours fermé du domaine de ces variables. Soit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Alors

$$\int_C df = 0.$$

Démonstration D'après le théorème fondamental de l'analyse, cette intégrale est la différence des valeurs de f entre le point de départ et le point d'arrivée de l'intégrale curviligne, mais ce sont un seul et même point puisque le parcours est fermé.

On note alors que

$$\int_{\partial\Omega} x dy + y dx = \int_{\partial\Omega} d(xy) = 0.$$

Donc les deux intégrales des formules 1 sont égales.

On utilisera alors la formule plus symétrique classique :

Théorème 2

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x dy - y dx. \quad (2)$$

3 Les principaux planimètres

3.1 Planimètre polaire

Le planimètre polaire est constitué de deux barres rigides, que nous appellerons "bras" et "avant-bras" reliées par une articulation ou "coude". Le bras est, à l'autre

extrémité, articulé à une “épaule”, généralement un disque assez lourd, et l’avant-bras porte à son extrémité libre, appelée sa “main”, un stylet, ou une loupe munie d’un réticule.

L’avant-bras, ou un équipage rigidement fixé à celui-ci, porte une roue, dont l’axe est l’avant-bras, ou une parallèle, qui peut rouler sur la carte. Un dispositif mécanique permet de lire le nombre (fractionnaire) de tours effectués par la roue, ou, de manière équivalente, l’angle θ , supérieur à 2π si la roue à fait plus d’un tour, entre sa position d’arrivée et sa position de départ.

La figure ci-dessous résume cette description.

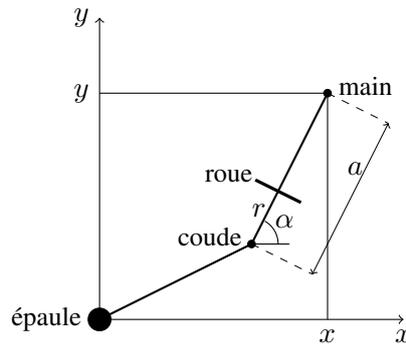


FIGURE 1 – Schéma du planimètre polaire

3.2 Planimètre linéaire

Dans le planimètre linéaire, le “coude” du planimètre glisse librement le long d’un axe, que nous prendrons pour axe des x . Donc, au lieu de décrire un cercle il décrit une droite. Comme précédemment, l’avant-bras, porte une roue qui roule sur la carte, dont l’axe est cet avant-bras, ou une parallèle, et dont la position est repérée par l’angle θ dont elle a tourné depuis sa position initiale, angle qu’un dispositif de roues codeuses permet de lire.

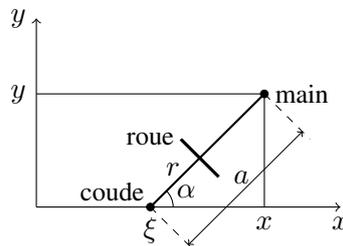


FIGURE 2 – Schéma du planimètre linéaire

3.3 Mode d'emploi

Dans le planimètre polaire, on pose l'épaule sur la carte, à l'extérieur de la surface à mesurer. Dans l'instrument linéaire, l'axe portant le coude ne doit pas couper la surface à mesurer. L'angle indiqué par la roue est mis à zéro. Avec le stylet, on suit le pourtour de la surface à mesurer. Le coude de l'instrument polaire ne doit jamais s'ouvrir complètement, de sorte que dans les deux instruments, après avoir fait le tour complet du contour, le dispositif est revenu dans la même position qu'au départ, sauf la roue qui a tourné sur son axe. L'angle θ indiqué par la roue est alors proportionnel à l'aire de la figure entourée.

4 Explication

4.1 Une description unique

Imaginons un appareil dont le "coude" est astreint à suivre une courbe donnée, arbitraire. Il s'agit donc d'un cercle dont le centre est à l'épaule dans le planimètre polaire, d'une droite dans le planimètre linéaire. Mais nous verrons qu'elle peut être quelconque.

Les paramètres fixes de l'appareil sont : la courbe décrite par le coude, la longueur a de l'avant-bras¹, la distance r du coude au centre de la roue, —ou plutôt à la projection orthogonale de ce centre sur l'avant-bras—, et le rayon R de la roue.

Notons (u, v) les coordonnées du coude, variables au cours du mouvement, mais astreintes mécaniquement à rester sur une courbe fixe, (x, y) celles de la "main", (X, Y) les coordonnées de la projection orthogonale du centre de la roue sur l'avant-bras, θ l'angle dont la roue a tourné depuis le départ.

4.2 Aire à mesurer

Nous avons donc

$$\begin{aligned}x &= u + a \cos \alpha, & dx &= du - a \sin \alpha d\alpha, \\y &= v + a \sin \alpha, & dy &= dv + a \cos \alpha d\alpha.\end{aligned}$$

Soit, pour l'aire à mesurer, en utilisant la formule (2)

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u dv - v du + a^2 d\alpha + \\&\quad \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} a(\cos \alpha dv - \sin \alpha du) + a(u \cos \alpha d\alpha + v \sin \alpha d\alpha).\end{aligned}$$

Nous utilisons alors le théorème 1. Le terme $\int a^2 d\alpha$ disparaît de l'intégrale. De plus, on a

1. On peut généralement la faire varier pour adapter l'appareil à la mesure à effectuer, mais elle doit rester fixe au cours de la mesure.

Proposition 2

$$\int_{\partial\Omega} \cos \alpha \, dv - \sin \alpha \, du = \int_{\partial\Omega} u \cos \alpha \, d\alpha + v \sin \alpha \, d\alpha .$$

Démonstration La différence entre les deux membres de l'égalité ci-dessus est

$$\int_{\partial\Omega} \cos \alpha \, dv - \sin \alpha \, du - u \cos \alpha \, d\alpha - v \sin \alpha \, d\alpha = \int_{\partial\Omega} d(v \cos \alpha - u \sin \alpha) = 0 ,$$

qui est nul par application du même théorème 1.

On a aussi

Proposition 3

$$\int_{\partial\Omega} u \, dv - v \, du = 0 .$$

Démonstration On reconnaît la formule (2) de l'aire entourée par le "coude" de coordonnées (u, v) . Mais par construction, le coude va et vient sur la même courbe, sans jamais faire le tour de l'épaule pour le planimètre polaire. Donc il entoure une aire nulle.

Il reste donc, après utilisation de ces deux propositions :

$$A = a \int_{\partial\Omega} \cos \alpha \, dv - \sin \alpha \, du . \quad (3)$$

4.2.1 Indication du planimètre

La roue portée par l'avant-bras enregistre les déplacements orthogonaux à son axe, c'est à dire à l'avant bras. La composante du déplacement parallèle à cet axe provoque un glissement sans roulement.

Soient (X, Y) les coordonnées du centre de la roue, R son rayon et θ l'angle dont elle a roulé depuis sa position initiale. On a

$$\begin{aligned} X &= u + r \cos \alpha , & dX &= du - r \sin \alpha \, d\alpha , \\ Y &= v + r \sin \alpha , & dY &= dv + r \cos \alpha \, d\alpha . \end{aligned}$$

Une normale unitaire à l'avant-bras est $N = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$. En conséquence, le mouvement enregistré par la roue est

$$R \, d\theta = \left\langle N, \begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} \right\rangle = r \, d\alpha - \sin \alpha \, du + \cos \alpha \, dv .$$

soit, en intégrant le long du contour, et en tenant compte du théorème 1 pour éliminer $\int d\alpha$ et de la formule (3), l'égalité qui justifie l'instrument :

$$aR\theta = a \int_{\partial\Omega} \cos \alpha \, dv - \sin \alpha \, du = A .$$

Références

- [1] J. Claudel et G. Dariès Aide-mémoire des ingénieurs, architectes, entrepreneurs, conducteurs de travaux, agents voyers, dessinateurs, etc. Partie théorique : introduction à la science de l'ingénieur. Tome second. H. Dunod et E Pinat, éditeurs. Paris, 1913. pp 1304–1316.

A Une preuve rigoureuse de la formule de l'aire

La preuve donnée ici de la formule (2) est plus rigoureuse, en ce qu'elle ne s'appuie pas sur l'analyse de figures, dont on risque toujours d'oublier un cas.

Théorème de Green On se place provisoirement dans \mathbb{R}^d , et on note x un point de l'espace (soit d coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_d)). Le théorème de Green est une extension à \mathbb{R}^d du théorème fondamental de l'analyse qui dit que la variation d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} absolument continue est l'intégrale de sa dérivée. Pour un champ de vecteurs de dimension $d > 1$, il relie son flux sortant² d'un domaine Ω à l'intégrale de son divergent³ dans Ω .

Théorème 3 (Green) Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d situé localement d'un seul côté de sa frontière $\partial\Omega$ elle-même C^1 par morceaux, soit ds la mesure superficielle induite sur $\partial\Omega$ par la mesure de Lebesgue dx de \mathbb{R}^d . Pour presque tout $x \in \partial\Omega$, il existe une normale extérieure unitaire $n(x)$. Soit $v(\cdot)$ un champ de vecteurs C^1 dans Ω , on a

$$\int_{\partial\Omega} \langle v(x), n(x) \rangle ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} v(x) dx.$$

Mesure d'un domaine Ω Il reste à choisir comme champ de vecteur $v(x) = x$ dont le divergent est constant et égal à d pour obtenir la mesure A de Ω comme

$$A = \frac{1}{d} \int_{\partial\Omega} \langle x, n(x) \rangle ds.$$

Dans \mathbb{R}^2 Revenons aux notations (x, y) pour un point du plan. Soit (dx, dy) un élément du contour $\partial\Omega$ parcouru dans le sens direct. On a $n(x) ds = (dy, -dx)$. D'où la formule (2) :

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} xdy - ydx,$$

et en utilisant le théorème 1 comme ci-dessus, les formules (1).

2. Si le champ de vecteurs représente un transport de matière, le flux sortant mesure la vitesse à laquelle de la matière sort du domaine, c'est à dire l'intégrale sur toute la frontière du domaine de la composante normale du champ de vecteurs, comptée positivement vers l'extérieur.

3. C'est à dire, pour un champ de vecteurs $v = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_d(x))$ la somme des dérivées partielles $\operatorname{div} v = \partial v_1 / \partial x_1 + \partial v_2 / \partial x_2 + \dots + \partial v_d / \partial x_d$.

B Photos

Les photographies ci-dessous montrent un planimètre polaire de la marque Karl Murbach de Zürich appartenant à Monsieur Jean-Daniel Bernhard. Un appareil du même modèle a servi dans un centre de recherches industriel à mesurer l'aire de pics de chromatographie.

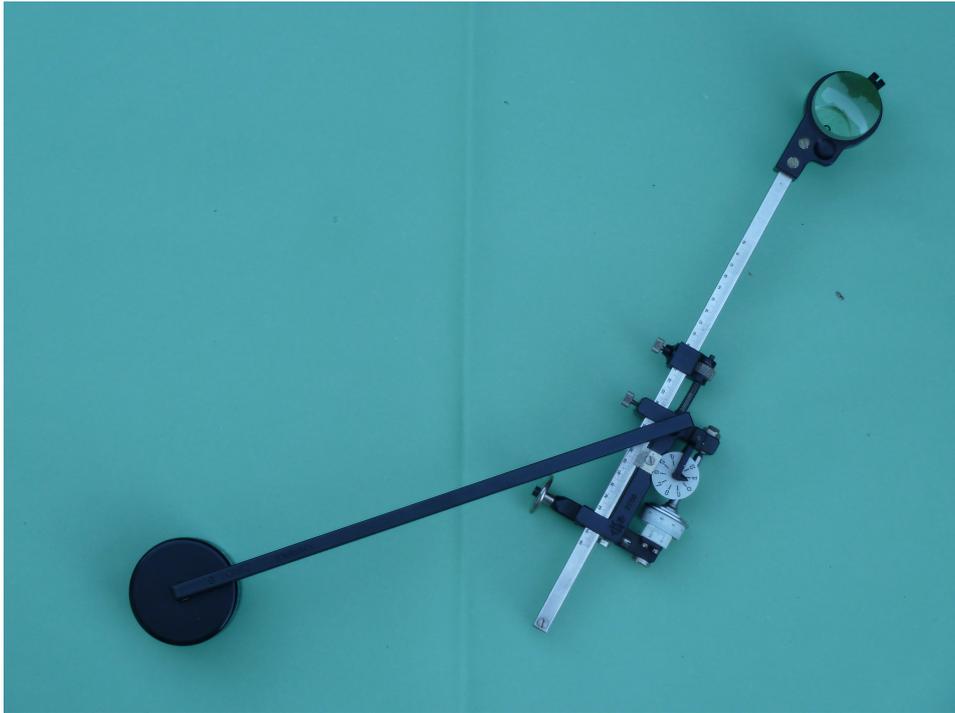


FIGURE 3 – Vue globale du planimètre. La main porte une loupe munie d'un réticule. Sur ce modèle, Le paramètre r est négatif. La roue est peu visible, solidaire du tambour de mesure d'angle. Le disque situé à angle droit de l'autre côté de l'avant bras est un patin d'équilibrage. Un dispositif de vis et vernier de lecture permet un réglage fin de la longueur a de l'avant-bras. L'articulation du coude est formée d'un doigt à extrémité sphérique se logeant dans une cavité légèrement conique, qui permet à la fois un démontage immédiat et un fonctionnement sans jeu.

Les photographies suivantes donnent deux vues de l'équipage portant la roue. Solidaire de la roue, un tambour gradué dont la graduation défile devant un vernier. Son axe porte une vis sans fin qui entraîne la roue codeuse horizontale qui enregistre le nombre de tours effectués par la roue.

Sur la deuxième photographie ci-dessous, on distingue le dispositif permettant de faire varier la longueur a de l'avant-bras, et le vernier servant à la mesurer avec précision.

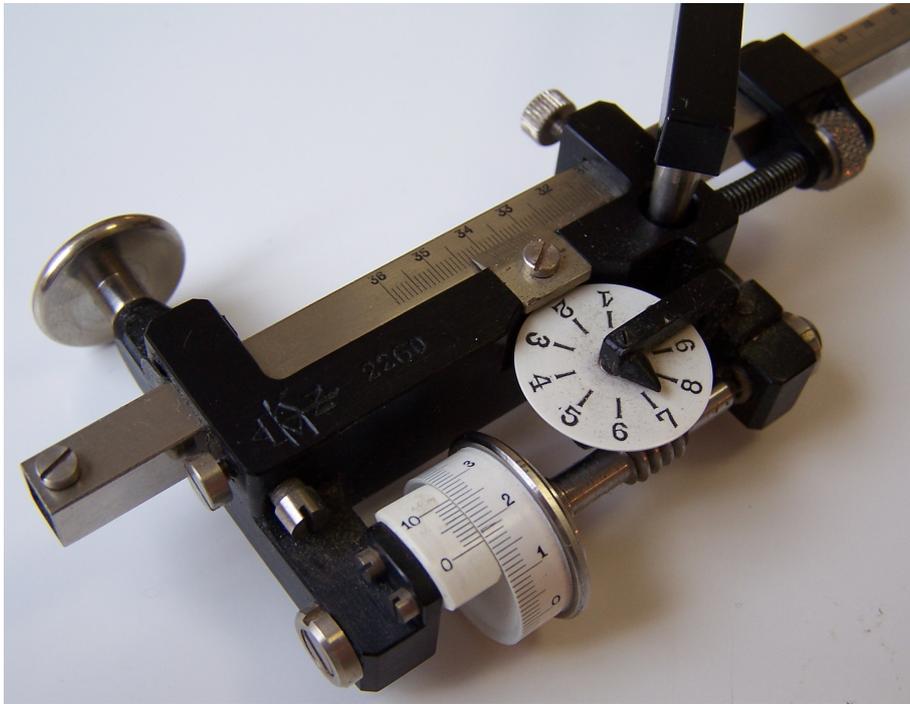


FIGURE 4 – Vue de l'équipage portant la roue

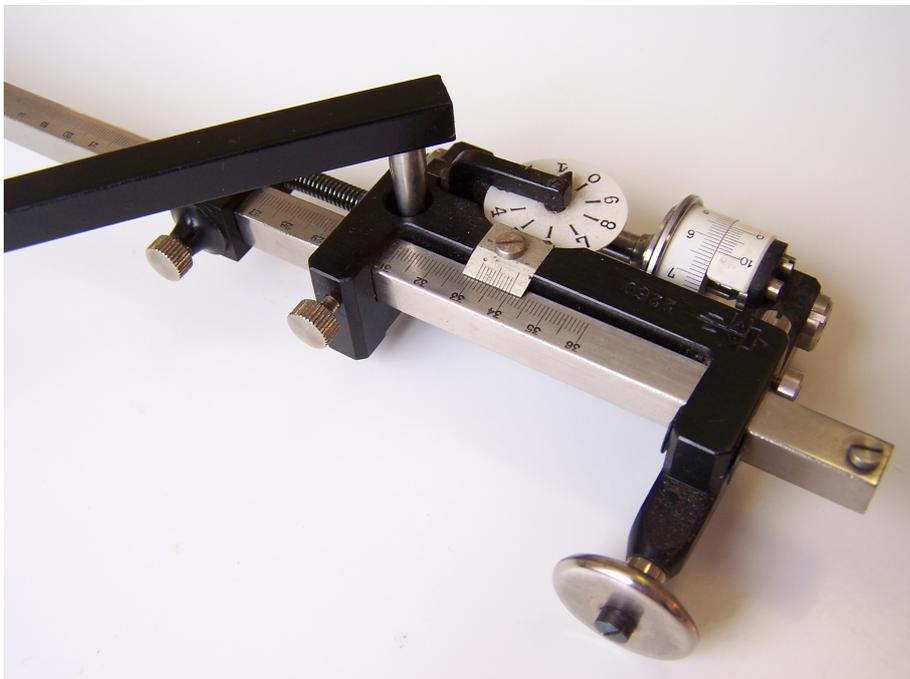


FIGURE 5 – Équipage portant la roue et vernier de réglage du paramètre a .