Note sur la théorie spectrale des matrices $\max +$ et leurs puissances successives

Pierre Bernhard

13 décembre 2005

Résumé

Ce texte interprète une toute petite partie du livre [2] en n'en retenant que ce qui peut être considéré comme son cœur mathématique, la théorie spectrale des matrices max-plus. (Mais non pas son véritable cœur, qui est une application en vraie grandeur aux chemins de fer néerlandais.)

1 Théorie spectrale

1.1 Le cadre algébrique

1.1.1 L'algèbre $\max +$

On travaille dans $\mathcal{R} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On va travailler fondamentalement avec les opérations $\max$, que l'on notera $\oplus$, et $+$ que l'on notera $\otimes$. On notera $\varepsilon = -\infty$ l'élément neutre de $\oplus$, et $e = 0$ l'élément neutre de $\otimes$. On note alors les propriétés suivantes :

- Les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont toutes les deux associatives et commutatives.
- L'opération $\oplus$ est *idempotente* : $\forall a \in \mathcal{R}$, $a \otimes a = a$.
- L'opération $\otimes$ a un inverse : $\forall a \in \mathcal{R}$, $a^{\otimes -1} = -a$. Alors, $a \otimes a^{\otimes -1} = e$.
- L'opération $\oplus$ est distributive par rapport à $\otimes$: $\forall a, b, c \in \mathcal{R}$, $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$.
- En conséquence, ε est absorbant pour l'opération $\otimes$: $\forall a \in \mathcal{R}$, $a \otimes \varepsilon = \varepsilon$.

On pourra s'exercer à démontrer les propriétés suivantes :

- $a \oplus b = \varepsilon \Rightarrow a = b = \varepsilon$.
- Il découle de l'idempotence qu'il n'y a jamais d'opposé : $\forall a \in \mathbb{R}$, l'équation $a + x = \varepsilon$ n'a pas de solution x.
- L'équation $a \otimes x = b$ a toujours une solution $x = a^{\otimes -1} \otimes b$, mais il n'en va pas de même de l'équation linéaire la plus générale qui est $a \otimes x \oplus b = c \otimes x \oplus d$, qu'on pourra étudier graphiquement.

On utilise les puissances $\overbrace{a \otimes a \otimes \cdots \otimes a}^{n} = a^{\otimes n}$, et la remarque simple que $a^{\otimes n} = na$ permet de l'étendre instantanément à $a^{\otimes p} = pa$ pour tout $p \in \mathbb{R}$. On notera que les exposants se combinent comme dans l'algèbre habituelle, mais avec l'*algèbre ordinaire sur les exposants* : $a \otimes a^{\otimes p} = a^{\otimes p+1}$, $a^{\otimes p} \otimes a^{\otimes -p} = a^{\otimes 0} = e$.

Pour une suite infinie $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, on utilise la notation $\bigoplus_i a_i$ pour désigner son sup. On pourra démontrer formellement que pour toute suite à deux indices, la formule de Fubini $\bigoplus_i \bigoplus_j a_{ij} = \bigoplus_j \bigoplus_i a_{ij}$ est correcte.

1.1.2 Vecteurs et matrices

On manipule les vecteurs de $\mathcal{R}^n$ comme les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, mais avec les opérations $\oplus$ et $\otimes$. Ainsi, si x et y sont des vecteurs de coordonnées respectives x_i, $i = 1, \ldots, n$ et $y_i, i = 1, \ldots, n$ et λ un scalaire, le vecteur $x \oplus y$ a pour coordonnées les $x_i \oplus y_i$, et le vecteur $x \otimes \lambda$ a les $x_i \otimes \lambda$ pour coordonnées.

De même, on définit le produit d'un vecteur x par une matrice A ou de deux matrices A et B par

$$y = A \otimes x \quad \Leftrightarrow \quad y_i = \bigoplus_{j=1}^{n} (a_{ij} \otimes x_j)\,, \qquad C = A \otimes B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{kj}\,.$$

On dit que la matrice A est *non dégénérée*, si elle n'a pas une ligne de ε.

On note aussi $A^{\otimes k}$ la puissance k de A pour le produit $\otimes$. La matrice composée de ε seulement est notée $\mathcal{E}$, c'est l'élément neutre de la somme de matrices et l'élément absorbant du produit. L'élément neutre du produit matriciel, donc la matrice "identité" de cette algèbre, notée E, est composée de e sur la diagonale et de ε hors diagonale. Et on note encore ε le *vecteur* composé de ε seulement.

L'équation linéaire $A \otimes x = b$ n'a en général pas de solution. On pourra montrer le résultat suivant :

Proposition 1.1 *Il existe un unique vecteur x maximum tel que $A \otimes x \leq b$ donné par $\forall j$, $x_j = \min_i \{b_i - a_{ij}\}$. L'équation $A \otimes x = b$ n'a de solution que si ce vecteur la résoud.*

1.1.3 Graphes et matrices

On utilisera le *graphe de A*, noté $\mathcal{G}(A)$, qui est le graphe *orienté valué* à n nœuds qui a un arc de poids a_{ji} du nœud i au nœud j, et pas d'arc si $a_{ji} = \varepsilon$. On note $\pi(i)$ et $\sigma(i)$ respectivements les prédécesseurs immédiats et successeurs immédiats de i. On appellera plus généralement prédécesseurs ou *ascendants* de i, notés $\pi^+(i)$, l'ensemble des nœuds d'où on peut atteindre i par un chemin du graphe, et $\pi^*(i) = \pi^+(i) \cup \{i\}$. De même appelle successeurs ou *descendants* de i l'ensemble, noté $\sigma^+(i)$, des nœuds qui peuvent être atteints depuis le nœud i, et $\sigma^*(i) = \{i\} \cup \sigma^+(i)$.

On dit que deux nœuds i et j *communiquent* si $i \in \pi^*(j)$ et $i \in \sigma^*(j)$. On vérifie immédiatement que c'est une relation d'équivalence. On utilisera les *composantes fortement connexes maximales*, ou cfcm, du graphe, qui sont les classes déquivalence de la relation de communication. On note que les ensembles $\pi^*(i)$ et $\sigma^*(i)$ sont composés de cfcm complètes.

Si le graphe de A est fortement connexe (il est sa seule cfcm), la matrice A est dite *irréductible*. Si-non, la matrice admet une *forme réduite* bloc triangulaire supérieure, avec un bloc diagonal par cfcm. (Exercice)

On utilisera le *graphe réduit*, qui est le quotient de $\mathcal{G}(A)$ par la relation de communication. Ainsi les nœuds du graphe réduit sont des cfcm du graphe d'origine. Le graphe réduit ne peut pas avoir de cycle.

On appelle *longueur* d'un chemin du graphe le nombre des arcs qui le composent. On donne alors la définition suivante :

Définition 1.1 *On appelle* cyclicité *d'un graphe*
- *s'il est connexe, le pgcd des longueurs de ses cycles élémentaires,*
- *s'il est non connexe, le ppcm des cyclicités de ses sous-graphes connexes.*

On appelle *poids* d'un chemin la somme des poids de ses arcs. On rappelle l'importante proposition :

Proposition 1.2 *L'élément ji de $A^{\otimes k}$ est le poids maximum des chemins de i à j de longueur k.*

1.1.4 Un lemme fondamental

On aura besoin de l'important théorème suivant, qui n'appartient pas à la théorie spectrale mais sera invoqué plusieurs fois :

Lemme 1.0 *Si la matrice A a tous les cycles de son graphe de poids négatif ou nul, alors*

1. *il existe des matrices*
$$A^+ = \bigoplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k} \quad \text{et} \quad A^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^{\otimes k} = E \oplus A^+ ,$$
2. *l'équation*
$$A \otimes x \oplus b = x \tag{1}$$
admet la solution
$$x = A^* \otimes b , \tag{2}$$
3. *cette solution est unique si les cycles du graphe de A sont tous de poids strictement négatif (éventuellement égal à ε si le graphe n'a pas de cycle).*
4. *Si le graphe de A a un cycle de poids positif, l'équation (1) n'a pas de solution, quelque soit b.*

Démonstration

1. Le graphe de A n'a que n sommets. Donc les chemins de plus de n arcs comportent nécessairement des cycles. Comme ces cycles ont un poids négatif ou nul, en les supprimant on ne diminue pas le poids du chemin. Donc entre deux sommets quelconques, il existe toujours un chemin de poids maximum de longueur inférieure ou égale à n, donc
$$A^+ = \bigoplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k} = \bigoplus_{k=1}^{n} A^{\otimes k} .$$
2. On a $A \otimes A^* \otimes b = A^+ \otimes b$ et donc $A \otimes A^* \otimes b \oplus b = (A^+ \oplus E) \otimes b = A^* \otimes b$.
3. Par substitutions successives, (1) implique
$$x = A \otimes (A \otimes x \oplus b) \oplus b = A^{\otimes 2} \otimes x \oplus (A \oplus E) \otimes b = A^{\otimes 2} \otimes (A \otimes x \oplus b) \oplus (A \oplus E) \otimes b = \ldots$$
soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$x = A^{\otimes k} \otimes x \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-1} A^{\otimes i} \otimes b . \tag{3}$$
Mais si tous les cycles de A sont de longueur strictement négative, le premier terme tends vers $\varepsilon = -\infty$, de sorte que pour k assez grand il disparait du max, laissant la formule (2).
4. Supposons que le nœud ℓ appartient à un cycle de poids $p > 0$. Soit k la longueur de ce cycle. Alors, $(A^{\otimes k})_{\ell\ell} \geq p$. Prenons la relation (3) ci-dessus, qui est impliquée par (1). Pour la coordonnée ℓ, elle se lit
$$x_\ell = \bigoplus_i (A^{\otimes k})_{\ell i} \otimes x_i \oplus \cdots$$
soit $x_\ell \geq (A^{\otimes k})_{\ell\ell} + x_\ell \geq p + x_\ell$, une contradiction.

∎

La proposition 1.8 ci-dessous est un corollaire de ce lemme qu'elle complète utilement.

1.2 Analyse spectrale classique

1.2.1 Préliminaires

On regroupe ici quelques résultats simples qui ne doivent rien (à une réciproque près) à l'algèbre particulière avec laquelle nous travaillons.

Définition 1.2 *On appelle valeur propre $\lambda \in \mathcal{R}$ et vecteur propre $v \in \mathcal{R}^n$ associés une paire satisfaisant $A \otimes v = v \otimes \lambda$, avec $v \neq \varepsilon$.*

Proposition 1.3 *Si λ est valeur propre et v et w deux vecteurs propres associés, α et β deux scalaires non tous deux égaux à ε, alors $\alpha \otimes v \oplus \beta \otimes w$ est un vecteur propre avec la mêne valeur propre.*

Corollaire 1.3.1 *L'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre, union $\{\varepsilon\}$, forme un sous espace vectoriel appelé sous-espace propre associé à λ.*

Proposition 1.4 *Si λ est valeur propre de A, $\lambda^{\otimes k}$ est valeur propre de $A^{\otimes k}$ avec le même vecteur propre. Réciproquement, si $\mu = \lambda^{\otimes k}$ est valeur propre de $A^{\otimes k}$ avec un vecteur propre w, alors*

$$v = \bigoplus_{i=1}^{k} A^{\otimes k-i} \otimes w \otimes \lambda^{\otimes i}$$

est un vecteur propre de A avec la valeur propre λ.

Démonstration Le théorème direct est évident. Considérons la récirpoque. Regardons d'abord le cas $\mu = \varepsilon$ Alors, il existe $w \neq \varepsilon$ tel que $A^{\otimes k} \otimes w = \varepsilon$. Soit ℓ le plus grand entier tel que $A^{\otimes \ell} \otimes w \neq \varepsilon$. Nous savons donc que $\ell < k$. Nous avons donc $u = A^{\otimes \ell} \otimes w \neq \varepsilon$ et $A \otimes u = A^{\otimes \ell+1} \otimes w = \varepsilon$. Donc u est un vecteur propre avec ε pour valeur propre.

Si $\mu \neq \varepsilon$, et donc $\lambda \neq \varepsilon$, une conséquence de la formule ci-dessus est que $v \geq w \otimes \lambda^{\otimes k} > \varepsilon$ donc $v \neq \varepsilon$. (Cet argument est propre à l'algèbre $(\oplus, \otimes)$.) Calculons directement

$$A \otimes v = \bigoplus_{i=1}^{k} A^{\otimes k-i+1} \otimes w \otimes \lambda^{\otimes i} = \left(\bigoplus_{i=1}^{k} A^{\otimes k-i+1} \otimes w \otimes \lambda^{\otimes i-1} \right) \otimes \lambda \,.$$

Posons $i - 1 = j$ dans l'indice de sommation, séparons le terme $j = 0$, et remplaçons $A^{\otimes k} \otimes w$ par $w \otimes \lambda^{\otimes k}$. Il vient

$$A \otimes v = \left(\bigoplus_{j=0}^{k-1} A^{\otimes k-i+1} \otimes w \otimes \lambda^{\otimes j} \right) \otimes \lambda = \left(w \otimes \lambda^{\otimes k} \oplus \bigoplus_{j=1}^{k-1} A^{\otimes k-i+1} \otimes w \otimes \lambda^{\otimes j} \right) \otimes \lambda$$

et le premier terme dans le membre de droite est exactement le terme $j = k$ de la somme qui suit, ce qui donne bien $A \otimes v = v \otimes \lambda$.

∎

Corollaire 1.4.1 *Si A est nilpotente (i.e. $A^{\otimes n} = \mathcal{E}$), sa seule valeur propre possible est ε.*

1.2.2 Structure des vecteurs propres

Définition 1.3 *On appelle* support *d'un vecteur (fût-il propre) la liste des numéros de ses coordonnées diférentes de ε (ou la liste de nœuds de $\mathcal{G}(A)$ correspondant à une coordonnée différente de ε.)*

Lemme 1.1 *Le support d'un vecteur propre contient tous les successeurs de chacun de ses nœuds.*

Démonstration Supposons que v est un vecteur propre, de valeur propre λ, et que $v_i = \varepsilon$. Soit $j_p = i, j_{p-1}, j_{p-2}, \ldots j_1 = j$ un chemin amont de j vers i. Donc chacun des $a_{j_{k+1}j_k}$ est différent de ε. L'équation $A \otimes v = v \otimes \lambda$ implique

$$a_{ij_{p-1}} \otimes v_{j_{p-1}} \leq v_i \otimes \lambda = \varepsilon$$

donc $v_{j_{p-1}} = \varepsilon$. De même, on en déduit que $v_{j_{p-2}} = \varepsilon$, et ainsi de suite jusqu'à $v_j = \varepsilon$. Donc tous les nœuds amont de i ont une coordonnée de v égale à ε. Donc si une coordonnée v_k est différente de ε, il n'y a pas de coordonnée ε en aval. (On pourra démontrer que si $\lambda = \varepsilon$, alors seuls les nœuds terminaux peuvent être dans le support d'un vecteur propre associé.) ∎

Corollaire 1.1.1 *Les vecteurs propres d'une matrice irréductible ont toutes leurs coordonnées pour support. (N'ont pas de coordonnée égale à ε.)*

Lemme 1.2 *S'il n'y a pas de cycle dans $\pi^*(i)$, alors pour tout vecteur propre v associé à une valeur propre différente de ε, $v_i = \varepsilon$.*

Démonstration On a

$$\bigoplus_j a_{ij} \otimes v_j = \lambda \otimes v_i \,.$$

Donc, pour une valeur de j, notée j_1, on a

$$a_{ij_1} \otimes v_{j_1} = \lambda \otimes v_i \,.$$

De même, il existe un j_2 tel que

$$a_{j_1 j_2} \otimes v_{j_2} = \lambda \otimes v_{j_1}$$

et ainsi de suite. On construit ainsi, en le remontant, un chemin $j_0 = i$, j_1, j_2,..., potentiellement infini. On l'appelle *chemin de saturation du produit $A \otimes v$*. Aussi longtemps que tous les $a_{j_k j_{k+1}}$ sont différents de ε, il est contenu dans $\pi^*(i)$.

Si aucun cycle n'existe dans $\pi^*(i)$, ce chemin ne peut être de longueur supérieure à $|\pi^*(i)| \leq n$. Donc pour un certain k, on a $a_{j_k j_{k+1}} = \varepsilon$. En conséquence, $\lambda \otimes v_{j_k} = \varepsilon$, mais comme $\lambda \neq \varepsilon$, $v_{j_k} = \varepsilon$. En reportant dans $a_{j_{k-1}j_k} \otimes v_{j_k} = \lambda \otimes v_{j_{k-1}}$, on en déduit $v_{j_{k-1}} = \varepsilon$ et ainsi de suite en descendant le chemin, $v_i = \varepsilon$. (L'égalité $v_j = \varepsilon$ "descend les chemins de saturation" des valeurs propres non ε.) ∎

Corollaire 1.2.1 *Si $\mathcal{G}(A)$ n'a pas de cycle, la seule valeur propre de A possible est ε.*

Ce corollaire est aussi une conséquence du corollaire 1.4.1, parce qu'une matrice dont le graphe n'a pas de cycle est nilpotente.

Lemme 1.3 *Soit A une matrice. Soit $\lambda \neq \varepsilon$ une valeur propre de A. Alors λ est le* poids moyen *d'un cycle de $\mathcal{G}(A)$.*

Démonstration Remarquons d'abord qu'en vertu du corollaire 1.2.1, $\mathcal{G}(A)$ contient des cycles. Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre λ, et $v_i \neq \varepsilon$ une composante non ε de v (qui existe par définition d'un vecteur propre). On sait que $\pi^*(i)$ contient au moins un cycle. On construit un chemin de saturation i, i_1,... en amont de i. Comme $\lambda \neq \varepsilon$, on vient de voir que $v_{i_k} \neq \varepsilon$ tout du long de ce chemin. On peut cette fois en déduire que tous les $a_{i_k i_{k-1}}$ sont non ε. Le chemin doit donc contenir un cycle j_1, j_2,..., j_p. On a ainsi mis en évidence un *cycle de saturation* du produit $A \otimes v$.

Prenant la somme (ordinaire, ou le produit $\otimes$) de tous les membres de gauche et de tous les membres de droite des égalités de ce cycle, il vient

$$\left(\bigotimes_{k=1}^{p} a_{j_{k+1}j_k}\right) \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^{p} v_{j_k}\right) = \lambda^{\otimes p} \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^{p} v_{j_{k+1}}\right) .$$

En utilisant le fait que $j_{p+1} = j_1$, les deux produits des coordonnées de v sont égaux. Et comme on sait qu'aucun des v_{j_k} n'est égal à ε, on peut simplifier et conclure

$$\lambda^{\otimes p} = \left(\bigotimes_{k=1}^{p} a_{j_{k+1}j_k}\right) ,$$

soit, en notations ordinaires,

$$\lambda = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} a_{j_{k+1}j_k} , \tag{4}$$

ce qui démontre le lemme. ∎

Lemme 1.4 *Si v et w sont deux vecteurs propres avec λ et μ pour valeurs propres respectives, et si le support de v est contenu dans celui de w, alors $\lambda \leq \mu$.*

Démonstration Soient λ, v, μ, w, satisfaisant $A \otimes v = v \otimes \lambda$ et $A \otimes w = w \otimes \mu$, et supposons que le support de w contient celui de v. Construisons un cycle de saturation de $A \otimes v$ comme ci-dessus. Rappelons que les v_{j_k} de ce cycle sont tous différents de ε, et donc aussi les w_{j_k} par l'hypothèse sur les supports. Avec *le même cycle*, notons que l'équation $A \otimes w = w \otimes \mu$ donne, pour $k = 1, \ldots, p$

$$a_{j_k j_{k-1}} \otimes w_{j_{k-1}} \leq \mu \otimes w_{j_k} .$$

À nouveau, sommant (au sens ordinaire) toutes ces égalités, en utilisant (4) et le fait que tous les w_{j_k} sont différents de ε, il vient facilement $\lambda \leq \mu$. ∎

Corollaire 1.4.1 *Si deux vecteurs propres ont le même support, ils correspondent à la même valeur propre.*

Corollaire 1.4.2 *Une matrice irréductible a une seule valeur propre au plus.*

1.2.3 Théorème d'existence

Cette section vise à démontrer le résultat fondamental suivant :

Théorème 1.1 *Toute matrice carrée admet le poids moyen maximum des cycles de son graphe comme valeur propre maximum.*

La démonstration comporte quelques intermédiaires, dont voici le premier :

Proposition 1.5 *Si $\mathcal{G}(A)$ a des nœuds terminaux, A admet ε pour valeur propre.*

Démonstration Un nœud terminal est un nœud d'où ne part aucun arc. À un tel nœud correspond une colonne de A faite de ε seulement. Prenons donc pour v le "vecteur de base" de même rang que ce nœud, composé de ε partout sauf dans la coordonnée correspondant au nœud terminal où il y a un e. Ce vecteur est différent de ε. On voit immédiatement que son produit $\otimes$ par A est le vecteur ε. ∎

Or un graphe sans cycle a des nœuds terminaux. (Il n'est qu'à suivre un chemin dans le graphe, lequel est forcément fini puisque le graphe n'a que n nœuds et pas de cycle.) Donc si $\mathcal{G}(A)$ n'a pas de cycle, on sait déjà (corollaire 1.2.1) que la seule valeur propre possible est ε. On vient de voir que ε est en fait valeur propre. C'est bien "la plus grande", et égale au poids moyen maximum d'un cycle de $\mathcal{G}(A)$.

Considérons donc dorénavant des matrices dont le graphe a au moins un cycle. Soit λ le poids moyen maximum d'un cycle de $\mathcal{G}(A)$. Soit

$$A_\lambda = (e \phi \lambda) \otimes A = \lambda^{\otimes -1} \otimes A$$

la matrice déduite de A en soustrayant λ à chacune de ses composantes. Son graphe est le même que celui de A, mais on a soustrait λ à tous les poids des arcs. On a donc aussi soustrait λ au poids moyen de tous les chemins. Et donc le cycle de poids moyen maximal a un poids moyen égal à $0 = e$. Donc il existe des matrices A_λ^+ et A_λ^*. Et les éléments diagonaux de A_λ^+ sont donc les poids maximum des cycles du graphe.

Considérons un cycle de $\mathcal{G}(A)$ de poids moyen maximum. Ce cycle a un poids total nul dans $\mathcal{G}(A_\lambda)$. Soit ℓ le numéro d'un nœud de ce cycle. On a donc

$$[A_\lambda^+]_{\ell\ell} = e \,. \tag{5}$$

Il en découle, si on remarque que $A_\lambda^* = A_\lambda^+ \oplus E$, que la colonne de rang ℓ dans cette équation satisfait

$$[A_\lambda^*]_{\bullet\ell} = [A_\lambda^+]_{\bullet\ell} \oplus e_\ell = [A_\lambda^+]_{\bullet\ell} =: v \,. \tag{6}$$

En effet, e_ℓ ne comporte qu'une seule coordonnée différente de ε, c'est sa coordonnée ℓ qui vaut e, et donc, compte tenu de (5), ne change donc pas la somme $\oplus$.

Proposition 1.6 *Le vecteur v défini par (6) est un vecteur propre de A avec la valeur propreλ.*

Démonstration On a $A_\lambda \otimes A_\lambda^* = A_\lambda^+$. Donc, en colonne ℓ, en tenant compte de (6),

$$A_\lambda \otimes v = [A_\lambda^+]_{\bullet\ell} = v. \tag{7}$$

Et en faisant le produit $\otimes$ par λ, (soit en ajoutant λ)

$$A \otimes v = v \otimes \lambda \,.$$

∎

Remarquons enfin qu'une conséquence du lemme 1.3 est

Proposition 1.7 *La valeur propre λ de la proposition ci-dessus est une valeur propre maximum.*

Les trois propositions ci-dessus démontrent le théorème.

On note l'importante proposition suivante :

Proposition 1.8 *Soit A une matrice carrée et λ sa valeur propre maximum. Quelque soit $\mu \geq \lambda$, l'équation $A \otimes x \oplus v = x \otimes \mu$ admet une solution, unique si $\mu > \lambda$, donnée par*

$$x = R_A(\mu) \otimes v \, ,$$

où la fonction

$$R_A(\mu) = \mu^{\otimes -1} \otimes [\mu^{\otimes -1} \otimes A]^*$$

est appelée résolvante *de A.*

Démonstration L'équation $A \otimes x \oplus v = x \otimes \mu$ est équivalente à $\mu^{\otimes -1} \otimes A \otimes x \oplus \mu^{\otimes -1} \otimes v = x$, et l'hypothèse $\mu \geq \lambda$ implique que $\mu^{\otimes -1} \otimes A$ a tous ses cycles de poids négatif ou nul, négatif si $\mu < \lambda$. La proposition est alors un corollaire du lemme 1.0. ∎

On note aussi l'étonnante propriété :

Proposition 1.9

$$\lambda = \limsup_{k \to \infty} \left(\mathrm{tr}_{\oplus} A^{\otimes k} \right)^{\otimes \frac{1}{k}} \tag{8}$$

formule qui coincide avec celle du théorème de Perron Froebenius en algèbre ordinaire.

Rassemblons les résultats concernant les matrices irréductibles :

Théorème 1.2 *Une matrice irréductible A a une unique valeur propre λ qui est le poids moyen maximum d'un cycle de son graphe. Elle satisfait notamment la formule (8). Les vecteurs propres n'ont pas de coordonnée égale à ε. Toute colonne de A_λ^* dont le numero correspond à un nœud situé sur un cycle de poids moyen maximum est un vecteur propre de A.*

(On démontre que pour une matrice irréductible, il n'y a pas d'autre vecteur propre que ceux-là, qu'on examine un peu plus en détail dans le corollaire 1.11.1 ci-dessous, qui borne la dimension du sous-espace propre).

1.2.4 Sous-graphe critique et sous-espace propre

Le théorème ci-dessus justifie qu'on s'intéresse au sous-graphe suivant.

Définition 1.4 *On appelle sous-graphe critique d'un graphe orienté valué le graphe obtenu en ne conservant que les nœuds et les arcs appartenant à un cycle de poids moyen maximum.*

On notera $\mathcal{G}^c$ le sous-graphe critique de $\mathcal{G}$.

On va utiliser les propriétés suivantes du sous-graphe critique :

Proposition 1.10

1. *Les composantes connexes du sous-graphe critique sont fortement connexes,*
2. *Tous les cycles du sous-graphe critique ont le même poids moyen, qui est le poids moyen maximum du graphe d'origine.*

Démonstration Le sous-graphe critique est construit en sélectionnant des cycles du graphe. Ainsi, à tout arc de ce sous-graphe, on peut faire correspondre le reste du cycle au titre duquel cet arc a été retenu, qui est un chemin du sous-graphe. Nous appellerons ce reste le *chemin complémentaire* de l'arc. Il va du nœud extremité au nœud origine de l'arc considéré. (Il "remonte" l'arc.)

1. Si deux nœuds appartiennent à une même composante connexe du sous-graphe, c'est qu'il qu'il y a dans ce sous-graphe un chemin qui va de l'un à l'autre. Le chemin obtenu en concaténant les compléments de chacun des arcs de ce chemin "remonte" du nœud extrémité au nœud origine, assurant la forte connexité.
2. Raisonnons sur le cas où $\lambda = e$. On sait qu'on peut toujours s'y ramener en soustrayant λ au poids de tous les arcs. Alors, le chemin complémentaire d'un arc du sous-graphe critique a un poids *opposé* au poids de l'arc, puisque le poids total de tous les cycles du sous-graphe critique est zéro. Prenons un cycle du sous-graphe critique. Comme cycle du graphe d'origine, son poids ne peut être que négatif ou nul. Supposons qu'il soit négatif. Considérons le chemin obtenu en concaténant les chemins complémentaires de tous les arcs de notre cycle. C'est un cycle dont le poids est l'opposé du poids du cycle considéré. Si donc celui-ci avait un poids strictement négatif, on aurait construit un cycle complémentaire de poids positif, ce qui, par hypothèse, n'existe pas dans le graphe.

∎

Pour les matrices qui, comme A_λ, ont zéro pour poids moyen maximum d'un cycle, —et donc aussi pour poids maximum d'un cyce—, on a en outre

Proposition 1.11 *Pour un graphe dont le poids maximum des cycles est 0,*

1. *Tous les chemins entre deux nœuds du sous-graphe critique qui restent dans ce sous-graphe ont le même poids,*
2. *les chemins entre ces même nœuds qui sortent du sous-graphe ont un poids inférieur.*

Démonstration Ces deux propositions se demontrent en formant des cycles avec les divers chemins directs évoqués et un unique chemin de retour dans le sous-graphe, qui existe d'après la proposition ci-dessus. ∎

De ces propriétés on déduit la suivante :

Corollaire 1.11.1 *Si deux nœuds i et j appartiennent à la même composante connexe de $\mathcal{G}^c(A)$, la construction (6) ci-dessus leur fait correspondre des vecteurs propres colinéaires.*

Démonstration Soient i et j appartenant à la même composante connexe de $\mathcal{G}^c(A)$. Soit c le poids d'un chemin de j à i dans $\mathcal{G}^c(A_\lambda)$, et donc $-c$ le poids du chemin de i à j. Par l'existence du cycle entre i et j, et pour tout k, $(A^*_\lambda)_{ki}$ et $(A^*_\lambda)_{kj}$ sont simultanément égaux à, ou différents de, ε. De plus (disons s'ils sont finis)

$$(A^*_\lambda)_{kj} \geq c + (A^*_\lambda)_{ki}\,,$$

car un chemin possible de j à k est d'aller de j à i puis de i à k. Mais de façon symétrique

$$(A^*_\lambda)_{ki} \geq (-c) + (A^*_\lambda)_{kj}\,.$$

En additionnant ces deux inégalités membre à membre, on voit que ce sont nécéssairement des égalités, ce qui démontre le corollaire. ∎

Concernant le sous-espace propre d'une matrice irréductible, on a la caractérisation suivante :

Théorème 1.3 *Soit A une matrice irréductible, λ sa valeur propre, $\mathcal{N}^c$ l'ensemble des nœuds de son sous-graphe critique. Le sous-espace propre de A est l'ensemble des vecteurs de la forme*

$$v = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{N}^c} [A^*]_{\bullet \ell} \otimes a_\ell \tag{9}$$

pour un ensemble de nombres $a_\ell \in \mathbb{R}$ quelconques. En outre, on peut se contenter de ne prendre, dans la somme $\oplus$ ci-dessus, qu'un nœud par composante connexe du sous-graphe critique.

Démonstration Que ces vecteurs soient des vecteurs propres découle simplememnt des propositions 1.3 et 1.6. Il reste à démontrer qu'il n'y en a pas d'autres. En effet, la dernière affirmation du théorème sera alors une conséquence immédiate du corollaire 1.11.1.

Soit v un vecteur propre. On travaille dans le reste de cette preuve avec la matrice A_λ et l'égalité $v = A_\lambda \otimes v$ dont on sait qu'elle est équivalente à $v \otimes \lambda = A \otimes v$. De ce fait, on notera a_{ij} les éléments de la matrice A_λ et a^*_{ij} ceux de la matrice A^*_λ. Suivant un chemin de saturation du produit $A_\lambda \otimes v$, on sait qu'on aura pour tout i une suite d'égalités

$$\begin{aligned} v_i &= a_{ii_1} \otimes v_{i_1} , \\ v_{i_1} &= a_{i_1 i_2} \otimes v_{i_2} , \\ &\vdots \\ v_{i_p} &= a_{i_p \ell} \otimes v_\ell , \end{aligned}$$

On utilise successivement les relations $a_{ij} \leq a^*_{ij}$ et $a^*_{ik} \leq a^*_{ij} \otimes a^*_{jk}$ (le deuxième déduite de $(A^*_\lambda)^{\otimes 2} = A^*_\lambda$, ou directement de l'interprétation de a^*_{ik} comme le poids du chemin le plus lourd de k à i dans le graphe de A_λ) pour en conclure que

$$v_i \leq a^*_{i\ell} \otimes v_\ell ,$$

avec $\ell \in \mathcal{N}^c$. Donc a fortiori

$$v_i \leq \bigoplus_{\ell \in \mathcal{N}^c} a^*_{i\ell} \otimes v_\ell .$$

Maintenant si $v = A_\lambda \otimes v$, il en découle aussi $v = A^*_\lambda \otimes v$. Donc

$$v_i = \bigoplus_k a^*_{ik} \otimes v_k \geq \bigoplus_{\ell \in \mathcal{N}^c} a^*_{i\ell} \otimes v_\ell .$$

Des deux dernières inégalités démontrées découle l'égalité, et comme ceci peut être fait pour tout i, l'équation (9). ∎

Une conséquence évidente, mais utile, du théorème ci-dessus est la suivante :

Corollaire 1.3.1 *Si une matrice irréductible a son sous-graphe critique connexe, alors elle admet une seule valeur propre et un seul vecteur propre.*

On aura enfin besoin de la définition suivante, concernant le sous-graphe critique :

Définition 1.5 *On appelle* cyclicité d'une matrice A *la cyclicité du sous graphe critique* $\mathcal{G}^c(A)$.

1.3 Mode propre généralisé d'une matrice réductible

1.3.1 Modes propres

Nous considérons maintenant une matrice réductible, c'est à dire dont le graphe a plusieurs cfcm. Nous supposons que, par une numérotation adéquate des nœuds, la matrice a été mise sous sa forme "normale", bloc diagonale supérieure, chaque bloc correspondant a une cfcm. Nous notons A_{ij} les sous-matrices ou blocs de A, et tout vecteur x pourra s'écrire comme

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

où les x_i, $i = 1, \dots, m$ sont des sous-vecteurs correspondant aux m cfcm de $\mathcal{G}(A)$, que nous appellerons *composantes* de x.

Il résulte de l'analyse précédente que chaque A_{ii} a une unique valeur propre λ_i.

Si v_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre de A_{11}, λ_1, le vecteur V dont la seule composante non ε est $V_1 = v_1$ est un vecteur propre avec la valeur propre λ_1.

Si deux $\lambda_1 = \lambda_2$, on peut exhiber un autre vecteur propre. Prenons l'exemple $m = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. On cherche un vecteur v qui vérifie

$$\begin{aligned} A_{11} \otimes v_1 \oplus A_{12} \otimes v_2 &= v_1 \otimes \lambda \,, \\ A_{22} \otimes v_2 &= v_2 \otimes \lambda \,. \end{aligned}$$

La deuxième équation montre que v_2 doit être un vecteur propre de A_{22}. Supposons le fixé. Soit v'_1 un vecteur propre de A_{11}. Alors, quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $v_1 := v'_1 \otimes \alpha$ est un vecteur propre de A_{11}, et

$$A_{11} \otimes v_1 = A_{11} \otimes v'_1 \otimes \alpha \,.$$

On peut toujours choisir α de façon que, coordonnée par coordonnée, $A_{11} \otimes v'_1 \otimes \alpha \geq A_{12} \otimes v_2$. Avec un tel choix,

$$A_{11} \otimes v_1 \oplus A_{12} \otimes v_2 = A_{11} \otimes v_1 = v_1 \otimes \lambda \,,$$

et la paire (v_1, v_2) définit bien un vecteur propre de A, v_1 et v_2 étant des vecteurs propres de A_{11} et A_{22} respectivement, donc avec aucune coordonnée égale à ε.

D'une manière plus générale, $\lambda_2 \geq \lambda_1$, les deux équations

$$\begin{aligned} A_{11} \otimes v_1 \oplus A_{12} \otimes v_2 &= v_1 \otimes \lambda_2 \,, \\ A_{22} \otimes v_2 &= v_2 \otimes \lambda_2 \,, \end{aligned}$$

ont une solution. En effet, on prend pour v_2 un vecteur propre de A_{22}, et la première équation a une solution, parce que $\lambda_2 \geq \lambda_1$ et grâce à la proposition 1.8 donnant la solution

$$v_1 = R_1(\lambda_2) \otimes A_{12} \otimes v_2 \,.$$

(On a noté R_1 pour la résolvante de A_{11}). À nouveau, en prolongeant le vecteur par des ε vers le bas, on a un vecteur propre de A.

Si $\lambda_2 < \lambda_1$, si un vecteur propre V existe avec $V_2 \neq \varepsilon$, la valeur propre est encore λ_2 et V_2 un vecteur propre de A_{22}. Et on peut montrer que V_1 a nécessairement des coordonnées égales à ε. (Dans tous les sommets du sous-graphe critique de $\mathcal{G}(A_{11})$ et en amont.) Donc aucun vecteur propre n'a tout $\mathcal{G}(A)$ pour support.

Mais on a une autre théorie plus utile.

1.3.2 Modes propres généralisés

On va généraliser la construction ci dessus. Considérons le graphe réduit des cfcm de $\mathcal{G}(A)$. Ses nœuds sont les cfcm, numérotées de 1 à m. Notons que $\Pi(i) = \{j \mid A_{ij} \neq \mathcal{E}\}$, et $\Pi(m) = \emptyset$. Soit comme ci-dessus λ_i la valeur propre associée au bloc A_{ii}, et notons que les deux définitions ci-dessous de la suite des μ_i sont équivalentes :

$$\mu_i = \lambda_i \oplus \bigoplus_{j \in \Pi(i)} \mu_j \,, \quad \text{ou} \quad \mu_i = \bigoplus_{j \in \Pi^*(i)} \lambda_j \,. \tag{10}$$

Donc, μ_i est la plus grande valeur propre d'un bloc “en amont” de i ou i lui-même, donc d'un bloc “influançant” le bloc i.

Étant donné un vecteur v de $\mathcal{R}^n$, de composantes v_i, on note Λ l'opérateur défini par

$$[\Lambda \otimes v]_i = v_i \otimes \mu_i\,, \qquad [\Lambda^{\otimes k} \otimes v]_i = v_i \otimes \mu_i^{\otimes k}\,.$$

identifié à sa matrice

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\mu_i \otimes E_i\}\,. \tag{11}$$

Théorème 1.4 *Si A est non dégénérée, il existe (au moins) un vecteur v dont aucune coordonnée n'est égale à ε tel que, pour tout k, $A^{\otimes k} \otimes v = \Lambda^{\otimes k} \otimes v$.*

Démonstration On va montrer la propriété équivalente,

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \quad A \otimes \Lambda^{\otimes k} \otimes v = \Lambda^{\otimes k+1} \otimes v\,. \tag{12}$$

Considérant d'abord le bloc m et dernier, on a $\mu_m = \lambda_m$, et il vient juste

$$A_{mm} \otimes v_m \otimes \lambda_m^{\otimes k} = v_m \otimes \lambda_m^{\otimes k+1}\,,$$

ce qui est satisfait pour tout vecteur propre v_m de A_{mm}, lesquels n'ont pas de coordonnée égale à ε.

L'équation à satisfaire pour le bloc i est :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \qquad A_{ii} \otimes v_i \otimes \mu_i^{\otimes k} \oplus \bigoplus_{j=i+1}^{m} A_{ij} \otimes v_j \otimes \mu_j^{\otimes k} = v_i \otimes \mu_i^{\otimes k+1}\,.$$

ou, de façon équivalente

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \qquad A_{ii} \otimes v_i \otimes \mu_i^{\otimes k} \oplus \bigoplus_{j \in \Pi(i)} A_{ij} \otimes v_j \otimes \mu_j^{\otimes k} = v_i \otimes \mu_i^{\otimes k+1}\,. \tag{13}$$

Si $\mu_i = \lambda_i$, c'est à dire $i = m$ ou $\lambda_i \geq \mu_j$, $j = i+1, \ldots, m$, mais donc aussi $\mu_i \geq \mu_j$ $\forall j \in \Pi(i)$, choisissons v_i comme un vecteur propre de A_{ii} suffisamment grand pour que, coordonnée par coordonnée,

$$A_{ii} \otimes v_i = v_i \otimes \lambda_i \geq \bigoplus_{j \in \Pi(i)} A_{ij} \otimes v_j\,,$$

ce qu'on peut toujours faire en remplaçant v_i par $v_i \otimes a$ pour a assez, grand, car A_{ii} étant irréductible, v_i n'a pas de coordonnée égale à ε. (Et si $\lambda_i = \varepsilon$, nécessairement $\Pi(i) = \emptyset$, de sorte que l'inégalité est satisfaite.) Alors dans le membre de gauche de (13) le premier terme domine a fortiori les autres pour toutes les puissances positives de k. Ainsi le membre de gauche de (13) est égal à son premier terme pour tout k, et v_i étant un vecteur propre de A_{ii} avec la valeur propre μ_i, la relation est vérifiée. Et on l'a dit, comme vecteur propre d'une matrice irréductible, v_i n'a pas de coordonnée égale à ε.

Prenons le cas où $\mu_i > \lambda_i$. Soit $\Pi_1(i) \subset \Pi(i)$ le sous-ensemble de $\Pi(i)$ des indices ℓ tels que $\mu_\ell = \mu_i$, et $\Pi_0(i)$ son complémentaire dans $\Pi(i)$. On a déjà construit un ensemble de v_j, $j > i$ satisfaisant les équations équivalentes à (13) pour les indices supérieurs à i, tous n'ayant aucune coordonnée égale à ε. On peut les *remplacer* par l'ensemble des $v_j \otimes \mu_j^{\otimes p}$ pour un p entier arbitraire tout en préservant leurs relations de la forme (13). Faisant cela, les termes d'indice $\ell \in \Pi_1(i)$ croissent plus vite avec p que l'un quelconque des termes d'indice dans $\Pi_0(i)$. Donc pour p assez grand, ces termes dominent les autres dans la somme ci-dessous, de sorte que, avec ces nouveaux v_j

$$\bigoplus_{j\in\Pi(i)} A_{ij}\otimes v_j = \bigoplus_{\ell\in\Pi_1(i)} A_{i\ell}\otimes v_\ell\,.$$

Faisons le choix de ce p et des nouveaux v_j qu'il engendre. À nouveau parce que μ_i domine tous les μ_j, et en se souvenant que pour $\ell\in\Pi_1(i)$, $\mu_\ell=\mu_i$, ce terme domine a fortiori la somme du membre de gauche de (13) pour tout k. Il suffit donc satisfaire l'équation

$$A_{ii}\otimes v_i\otimes\mu_i^{\otimes k}\oplus\bigoplus_{\ell\in\Pi_1(i)} A_{i\ell}\otimes v_\ell\otimes\mu_i^{\otimes k} = v_i\otimes\mu_i^{\otimes(k+1)}\,,$$

qui est équivalente à

$$A_{ii}\otimes v_i\oplus\bigoplus_{\ell\in\Pi_1(i)} A_{i\ell}\otimes v_\ell = v_i\otimes\mu_i\,.$$

Mais $\mu_i>\lambda_i$. Donc par la proposition 1.8, cette équation a une (unique) solution

$$v_i = R_i(\mu_i)\otimes\bigoplus_{\ell\in\Pi_1(i)} A_{i\ell}\otimes v_\ell\,.$$

On a donc trouvé des vecteurs v_i, v_{i+1},. . .,v_m satisfaisant (13), et en itérant, une solution de (12).

Finalement, pour qu'une coordonnée de v_i soit égale à ε, et comme les v_j, $j>i$, ont toutes leurs coordonnées différentes de ε, il faut que la ligne correspondante dans tous les A_{ij}, soit faite de ε. Si le bloc (ii) est de dimension 1, ce sont tous les A_{ij}, $j>i$, qui sont égaus à ε. Si non, considérons le nœud correspondant à cette coordonnée. Tous ses prédécesseurs dans le graphe de A_{ii} correspondent à des éléments de sa ligne dans A_{ii} différents de ε. Donc, les coordonnées correspondantes de v_i doivent à leur tour être égales à ε. Et on peut répéter pour ces coordonnées le même argument : tous les éléments des lignes correspondantes dans les A_{ij}, $j\neq i$ doivent être égaux à ε. Et tous les termes de leur ligne dans A_{ii} différents de ε imposent que d'autres coordonnées soient égales à ε. Et ainsi de proche en proche pour tous les nœuds de $\pi^*(i)$ dans sa cfcm. Mais ces prédecesseurs sont tous les nœuds de la cfcm i. Ainsi v_i serait égal à ε, et il faudrait, comme dans le cas scalaire, que les A_{ij} $j>i$ soient tous égaux à $\mathcal{E}$. Alors $\Pi(i)=\emptyset$, ce qui impliquerait, d'après (10) $\mu_i=\lambda_i$ contrairement à l'hypothèse. ∎

2 Puissances successives d'une matrice

On s'intéresse en fait aux matrices A non dégénérées, et aux suites de vecteurs de la forme

$$x(k+1) = A\otimes x(k)\,,\quad x_i(0)\neq\varepsilon\;\forall i\in\{1,\dots,n\}\,,\tag{14}$$

qui implique bien sûr $x(k)=A^{\otimes k}\otimes x(0)$, et aussi $x_i(k)\neq\varepsilon$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$ et tout $k\geq 0$.

2.1 Cas général

2.1.1 Taux de croissance et vecteur des temps de cycle asymptotiques

Pour une suite de la forme (14), on s'intéresse au taux de croissance asymptotique de ses coordonnées quand $k\to\infty$. On voit bien que si $x(0)$ est un vecteur propre de valeur propre λ, alors

$x(k+1) = x(k) \otimes \lambda$, c'est à dire que les n événements considérés se reproduisent tous à des écarts de temps constants et égaux à λ. Le système est synchrone. L'objectif est de comprendre ce qui se passe si $x(0)$ n'est pas vecteur propre, ce qui est d'autant plus nécessaire que dans le cas général, les vecteurs propres ont des coordonnées infinies. Pour cette raison, on pose

Définition 2.1 *On appelle* vecteur des temps de cycle asymptotiques *ou* vtca *d'une suite, s'il existe, le vecteur ν de coordonnées*

$$\nu_i = \lim_{k\to\infty} \frac{x_i(k)}{k} = \lim_{k\to\infty} (x_i(k))^{\otimes(1/k)} .$$

2.1.2 Existence et unicité

Théorème 2.1 *Pour toute matrice non dégénérée A, les suites (14) admettent un même vtca indépendemment de leur condition initiale, qui sera appelé* vtca de la matrice A.

Démonstration La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.1 *L'opérateur de matrice $A\otimes$ est non expansif sur $\mathbb{R}^n$ en norme ℓ_∞, c'est à dire que dans cette norme où $\|x\| = \max_i |x_i|$,*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|A\otimes x - A\otimes y\| \le \|x - y\| .$$

Démonstration En effet, on a quelque soit $i \in \{1,\dots,n\}$

$$\begin{aligned} |[A\otimes x]_i - [A\otimes y]_i| &= |\max_j(a_{ij}+x_j) - \max_\ell(a_{i\ell}+y_\ell)| \\ &\le \max_j |(a_{ij}+x_j) - (a_{ij}+y_j)| = \|x-y\| . \end{aligned}$$

L'inégalité $|\max_j b_j - \max_\ell c_\ell| \le \max_j |b_j - c_j|$ est elle même un petit lemme facile laissé au lecteur. ∎

Il découle du lemme que si pour une condition initiale particulière, la suite (14) admet un vtca, alors il en va de même avec toutes les conditions initiales et pour les mêmes temps de cycle asymptotiques. En effet, pour deux telles suites $\{x(k)\}$ et $\{y(k)\}$, et pour toute coordonnée i, on aura $|x_i(k) - y_i(k)| \le \|x(0) - y(0)\|$ qui est une constante, et la conclusion suit immédiatement. Or on sait par le théorème 1.4 que toute matrice non dégénérée admet un mode propre généralisé, dont le vecteur des μ_j est uniquement défini. Ceci prouve le théorème. ∎

Une conséquence du théorème ci-dessus est qu'on peut donner la définition suivante :

Définition 2.2 *On appelle* opérateur asymptotique *l'opérateur dont la matrice est la* matrice asymptotique *de la matrice A, définie par*

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\nu_i\} . \tag{15}$$

On fait remarquer que cette matrice Λ coincide avec celle définie en (11), et que pour toutes les coordonnées $i = 1,\dots,n$, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n , \quad \lim_{k\to\infty} \left[(A^{\otimes k} - \Lambda^{\otimes k})\otimes \xi\right]_i^{\otimes \frac{1}{k}} = 0 ,$$

ce qui exprime que $A^{\otimes k}$ et $\Lambda^{\otimes k}$ se comportent asymptotiquement de la même façon.

2.2 Matrices irréductibles

Dans le cas des matrices irréductibles, on a un théorème beaucoup plus précis :

Théorème 2.2 *Pour toute matrice non dégénérée irréductible A, de valeur propre λ, il existe un entier T, appelé temps de transitoire, et un entier σ tels que pour toute suite de la forme (14), pour tout $k \geq T$, $x(k+\sigma) = x(k) \otimes \lambda^{\otimes\sigma}$.*

La suite entre donc dans un régime périodique au bout d'un temps fini, temps, période et taux de croissance ne dépendant pas de l'etat initial. L'entier σ est la cyclicité du sous-graphe critique de $\mathcal{G}(A)$, appelée *cyclicité de A*, et parfois notée $\sigma(A)$. Au contraire, la cyclicité de $\mathcal{G}(A)$ lui même, qui est un sous-multiple de $\sigma(A)$, sera notée $\sigma_{\mathcal{G}(A)}$ ou simplement $\sigma_{\mathcal{G}}$. On posera $\sigma(A) = \kappa\sigma_{\mathcal{G}}$.
Démonstration La démonsration s'appuie sur deux lemmes :

Lemme 2.2 *Pour toute matrice non dégénérée irréductible de cyclicité 1, de valeur propre $\lambda = e$, Il existe un nombre K tel que pour tout $k \geq K$, $A^{\otimes(k+1)} = A^{\otimes k}$.*

Lemme 2.3 *Pour toute matrice non dégénérée irréductible de valeur propre $\lambda = e$, la matrice $A^{\otimes\sigma(A)}$ est, à une renumérotation des coordonnées près, bloc diagonale, les blocs diagonaux étant des matrices irréductibles de cyclicité 1 et de valeur propre $\lambda = e$.*

Corollaire 2.3.1 *Pour toute matrice non dégénérée irréductible, il existe un entier T tel que,*

$$\forall k \geq T\,, \quad A^{\otimes(k+\sigma)} = \lambda^{\otimes\sigma} \otimes A^{\otimes k}\,. \tag{16}$$

Manifestement le corollaire implique bien le théorème à prouver. Or il découle facilement des deux lemmes. En effet la matrice A_λ a le même graphe que A, aux poids près, donc la même cyclicité, mais sa valeur propre est e. Par le lemme 2.3, la matrice $B = A_\lambda^{\otimes\sigma}$ est bloc diagonale, avec ses blocs de cyclicité 1, et aussi leur valeur propre égale à e, car c'est $e^{\otimes\sigma} = e$. Donc en appliquant le lemme 2.2 à chacun de ses blocs, et en prenant pour K le maximum des K de chaque bloc, on obtient

$$\forall \ell \geq K\,, \quad \left(A_\lambda^{\otimes\sigma}\right)^{\otimes(\ell+1)} = \left(A_\lambda^{\otimes\sigma}\right)^{\otimes\ell}\,.$$

Soit en prenant le produit $\otimes$ par $\lambda^{\otimes\sigma(\ell+1)}$,

$$\forall \ell \geq K\,, \quad A^{\otimes\sigma\ell+\sigma} = \lambda^{\otimes\sigma} \otimes A^{\otimes\sigma\ell}\,,$$

puis en multipliant par $A^{\otimes p}$, l'affirmation (16) pour n'importe quel $k = \sigma\ell + p \geq \sigma K = T$. ∎

La démonstration des deux lemmes est un peu longue et va occuper la fin du chapitre.

2.2.1 Démonstration du lemme 2.2

La démonstration s'appuie sur le théorème d'arithmétique suivant, qui se déduit facilement du théorème de Bezout. (Cf. l'annexe.)

Théorème 2.3 *Étant donné p entiers ℓ_i, $i = 1, \ldots, p$, premiers entre eux (i.e. de pgcd égal à 1), il existe un entier K tel que, pour tout entier $k \geq K$, il existe p entiers positifs a_i, $i = 1, \ldots, p$ vérifiant $\sum_{i=1}^{p} a_i\ell_i = k$.*

On va se servir de ce théorème pour trouver des chemins de toute longueur suffisamment grande dans le sous-graphe critique de A. On fait ceci suivant la proposition suivante, dont le lemme est un corollaire évident.

Proposition 2.1 *Soit A une matrice non dégénérée irréductible de cyclicité 1, de valeur propre $\lambda = e$. Alors,*

1. *si le nœud i appartient au sous graphe critique, il existe K tel que $\forall k \geq K$, $\left[A^{\otimes k}\right]_{ii} = e$,*
2. *si le nœud i ou le nœud j appartient au sous-graphe critique, il existe K tel que $\forall k \geq K$, $\left[A^{\otimes k}\right]_{ij} = [A^{+}]_{ij}$,*
3. *quels que soient i et j, il existe K tel que $\forall k \geq K$,*

$$\left[A^{\otimes k}\right]_{ij} = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{G}^c} ([A^{+}]_{i\ell} \otimes [A^{+}]_{\ell j}) \,. \tag{17}$$

Comme les formules à droite des égalités sont indépendantes de k, cela prouve bien le lemme.
Démonstration

1. Le sous-graphe critique de A est par hypothèse de cyclicité 1, ce qui implique que toutes ses cfcm sont de cyclicité 1, donc notamment celle dans laquelle se trouve le nœud i. Il existe donc dans cette cfcm des cycles de longueur ℓ_1, $\ell_2 \ldots$premières entre elles. Il existe aussi un cycle dans ce même sous-graphe critique qui passe par tous les points de cette cfcm. Soit L sa longueur. Tous ces cycles ont un poids nul. Prenons alors pour K le K du théorème 2.3 appliqué à ces ℓ_i, et considérons $k \geq K + L$. On peut faire un cycle de longueur k dans la cfcm du sous-graphe critique, en parcourant le cycle de longueur L, qui coupe tous les cycles de longueur ℓ_i évoqués auparavant, et en ajoutant a_i “tours” du cycle de longueur ℓ_i, les a_i choisis de façon que $\sum_i a_i \ell_i = k - L \geq K$.
2. Soit maintenant $j \in \mathcal{G}^c$. Il existe m tel que $[A^{+}]_{ij} = [A^{\otimes m}]_{ij}$. Avec les mêmes K et L que ci-dessus, pour tout $k \geq K + L + m$, on peut faire un cycle de j à j de longueur $k - m$ dans le sous-graphe critique suivi du chemin de poids $[A^{+}]_{ij}$, et on trouve ainsi un chemin de longueur k ayant ce poids entre j et i, et donc $[A^{\otimes k}]_{ij} \geq [A^{+}]_{ij}$. Mais comme par définition, l'inégalité opposée est vraie, la proposition est démontrée pour ce cas. On ferait de même, mutatis mutandis, si c'était i qui appartenait au sous-graphe critique.
3. Prenons maintenant i et j hors du sous-graphe critique. On veut considérer des chemins “très longs”, donc avec de plus en plus de cycles. Si ces cycles sont pris en nombre croissant hors du sous-graphe critique, ils ajoutent des poids négatifs au poids du chemin total, et finiront par être de poids moindre qu'un chemin de référence faisant tous ses cycles dans le sous-graphe critique. Or, pour k assez grand, on trouvera toujours un cycle de longueur adéquate dans ce sous-graphe, dont, rappelons-le, le poids est alors nul. La formule 17 revient simplement à rechercher le chemin le plus lourd de j à i via un nœud de ce sous-graphe.

∎

2.2.2 Démonstration du lemme 2.3

Étant donné un graphe orienté (valué) $\mathcal{H} = \mathcal{G}(B)$ et sa matrice B, notons $\mathcal{H}^{\otimes k} = \mathcal{G}(B^{\otimes k})$ le graphe qui a les mêmes nœuds que $\mathcal{H}$ et pour arcs les chemins de $\mathcal{H}$ de longueur k de poids maximum pour chaque paire ordonnée de nœuds. Notons qu'on a bien $(\mathcal{H}^{\otimes k})^{\otimes \ell} = \mathcal{H}^{\otimes k\ell}$. Soit ς la cyclicité de $\mathcal{H}$. Nous démontrons d'abord la propriété suivante :

Proposition 2.2 *images À tout cycle de $\mathcal{H}^{\otimes k}$ correspond un cycle (peut-être pas élémentaire) de longueur k-uple dans $\mathcal{H}$. Réciproquement, tout cycle de $\mathcal{H}$ a une image dans $\mathcal{H}^{\otimes k}$. Si la longueur d'un cycle élémentaire de $\mathcal{H}$ est ℓ, il lui correspond un cycle élémentaire de $\mathcal{H}^{\otimes k}$, appelé son* image, *de longueur μ/k où μ est le ppcm de ℓ et k. De plus, le sous-graphe critique de $\mathcal{H}^{\otimes k}$ est l'image du sous-graphe critique de $\mathcal{H}$.*

Démonstration La première affirmation est évidente. Quant à la deuxième, il suffit de parcourir μ/ℓ fois le cycle de longueur ℓ. Cela crée un cycle de longueur $\mu = (\mu/k)k$, dont l'image est manifestement un cycle de longueur (μ/k) dans $\mathcal{H}^{\otimes k}$. Et aucun cycle plus court parcourant les mêmes nœuds ne peut être de longueur multiple de k et donc apparaître comme cycle de $\mathcal{H}^{\otimes k}$. Enfin, pour examiner le sous-graphe critique, il suffit de considérer le graphe $\mathcal{H}_\lambda$ où on a diminué tous les poids des arcs de $\mathcal{H}$ de la valeur critique λ. Tous ses cycles sont de poids négatif ou nul, et ses cycles critiques sont ses cycles de poids nul, et on voit immédiatement que l'image dans $\mathcal{H}_\lambda^{\otimes k}$ d'un cycle de poids négatif a un poids négatif, et l'image d'un cycle de poids nul un poids nul, en faisant donc un cycle critique de $\mathcal{H}_\lambda^{\otimes k}$. ∎

Nous montrons ensuite le lemme suivant, qui présente un intérêt en soi :

Lemme 2.4 *Soit $\mathcal{H}$ un graphe de cyclicité 1. Alors*

1. *toutes ses puissances $\mathcal{H}^{\otimes k}$ sont de cyclicité 1,*
2. *si $\mathcal{H}$ est fortement connexe, toutes ses puissances $\mathcal{H}^{\otimes k}$ sont fortement connexes.*

Démonstration

1. Si $\mathcal{H}$ est de cyclicité 1, c'est dire qu'il a des cycles de longueurs premières entre elles, disons $\ell_1, \dots, \ell_p$. Soit k un entier, et $\mu_i = \lambda_i k$, $i = 1, \dots, p$ les ppcm de k et des ℓ_i. D'après le point précédent de la proposition, les λ_i sont les longueurs des cycles image dans $\mathcal{H}^{\otimes k}$ des cycles correspondants de $\mathcal{H}$. Ils sont constitués de facteurs premiers des ℓ_i. Ils n'ont donc pas de facteur commun.
2. On utilise le théorème 2.3 comme dans la preuve du lemme 2.2 pour montrer qu'il existe dans $\mathcal{H}$, entre deux nœuds quelconques, des chemins de toutes les longueurs entières supérieures à un certain entier K. Donc, pour tout k, il existe un chemin de longueur multiple de k, qui apparaît donc comme un chemin de $\mathcal{H}^{\otimes k}$ entre ces nœuds.

∎

On montre enfin le lemme central de cette preuve :

Lemme 2.5 *Si $\mathcal{H}$ est fortement connexe, $\mathcal{H}^{\otimes \varsigma}$ est constitué de ς composantes fortement connexes disjointes, chacune de cyclicité 1. Tout cycle de $\mathcal{H}$ a une image dans chacune de ces composantes.*

Démonstration Nous affirmons d'abord la propriété suivante :

Proposition 2.3 *Tous les chemins de $\mathcal{H}$ joignant deux nœuds donnés j et i ont la même longueur modulo ς.*

Démonstration Soient i et j deux nœuds de $\mathcal{H}$, et ℓ la longueur d'un chemin de j à i. Le graphe étant fortement connexe, il existe un chemin de retour de i à j. Soit ℓ' sa longueur. La concaténation de ces deux chemins crée un cycle. Sa longueur totale $\ell + \ell'$ est donc un multiple de ς, i.e. nulle modulo ς. Donc $\ell' = -\ell \bmod \varsigma$. Prenons alors un autre chemin de j à i. En considérant le cycle formé avec le même chemin de retour, de longueur $-\ell$ modulo ς, on voit que sa longueur doit être égale à $\ell \bmod \varsigma$. ∎

Nous appelons "distance de j à i" ce nombre. On voit facilement que la relation "distance nulle" est une relation d'équivalence. Elle partitionne donc les nœuds en classes d'équivalence. Considérons un nœud arbitraire fixé que nous appelons 0. Tous les nœuds i ayant une même distance de 0 à i

appartiennent à la même classe d'équivalence. En effet, soient i et j deux nœuds à distance d de 0. Il existe un chemin de j à 0 de longueur $-d$ modulo ς. La concaténation de ce chemin et d'un chemin de longueur modulo ς d de 0 à i crée un chemin de longueur 0 modulo ς de j à i. Les classes d'équivalence peuvent donc être numérotées par la distance de 0 à cette classe. Il y en a donc ς.

Les arcs de $\mathcal{H}^{\otimes\varsigma}$ ont les mêmes extrémités que des chemins de longueur ς de $\mathcal{H}$. Mais ces chemins se terminent nécessairement dans la classe d'équivalence d'où ils sont partis. (Il suffit de regarder la distance de 0 à leur extrémité, qui est la même que pour leur origine.) Donc ces arcs de $\mathcal{H}^{\otimes\varsigma}$ ne sortent jamais d'une même classe d'équivalence, les quelles sont donc disjointes dans $\mathcal{H}^{\otimes\varsigma}$. Mais elles sont aussi fortement connexe, car $\mathcal{H}$ l'étant, il y a des chemins entre deux nœuds d'une même classe d'équivalence, dont la longueur est un multiple de ς, de sorte qu'ils donnent un chemin de $\mathcal{H}^{\otimes\varsigma}$.

Considérons un cycle de $\mathcal{H}$. Sa longueur est un multiple de ς. Il passe donc nécessairement par des nœuds de distance depuis 0 de 1 à $\varsigma - 1$, donc dans toutes les classes d'équivalence. En outre, le même cycle parcouru depuis un nœud de la classe d'équivalence p engendre un cycle de cette classe d'équivalence dans $\mathcal{H}^{\otimes\varsigma}$.

Supposons que la cyclicité d'une composante connexe de $\mathcal{H}^{\otimes\varsigma}$ soit $s > 1$. Tous les cycles engendrés dans $\mathcal{H}$ par les cycles de cette classe seraient de longueur multiple de $s\varsigma$. Mais comme tous les cycles de $\mathcal{H}$ ont une image dans cette composante connexe de $\mathcal{H}^{\otimes\varsigma}$, ce seraient tous les cycles de $\mathcal{H}$ qui auraient une logueur multiple de $\sigma\varsigma$, qui serait donc la cyclicité de $\mathcal{H}$ ou un de ses sous-multiples, contrairement à l'hypothèse. Ceci achève de démontrer le lemme 2.5 ∎

Nous reprenons alors la démonstration du lemme 2.3. Soit donc A une matrice irréductible, de valeur propre e. Soit $\sigma_{\mathcal{G}}$ la cyclicité de son graphe $\mathcal{G}(A)$ et σ celle de son sous-graphe critique. Notons que σ est un multiple de $\sigma_{\mathcal{G}}$, que nous notons $\sigma = \nu\sigma_{\mathcal{G}}$.

Considérons d'abord la matrice $\widetilde{A} = A^{\otimes\sigma_{\mathcal{G}}}$. En numérotant les coordonnées de façon que les nœuds d'une même classe d'équivalence dans la distance modulo $\sigma_{\mathcal{G}}$ aient des numéros contigus, la structure en composantes disjointes de $\mathcal{G}^{\otimes\sigma_{\mathcal{G}}}$ affirmée par le lemme 2.5 ci-dessus se traduit par une structure bloc diagonale de $\widetilde{A}$, avec des blocs irréductibles dont le graphe est de cyclicité 1.

Passons à $\widehat{A} = A^{\otimes\sigma} = \widetilde{A}^{\otimes\nu}$. Elle sera encore bloc diagonale. Et d'après la propriété 2 du lemme 2.4, ses blocs seront irréductibles.

Intéressons-nous enfin au sous-graphe critique de $\mathcal{G}(A)$, c'est à dire aux cycles de poids nul, et plus spécifiquement à une de ses composantes connexes, que nous savons être fortement connexe (proposition 1.10). σ est un multiple de sa cyclicité, disons s. La puissance s de cette composante connexe est elle même composée de composantes fortement connexes disjointes de cyclicité 1 par application du lemme 2.5. Chacune d'entre elles, élevée à la puissance σ/s, est une composante fortement connexe d'après la propriété 2 du lemme 2.4, et reste de cyclicité 1 d'après la propriété 1. Comme elles constituent le sous-graphe critique de $\mathcal{G}^{\otimes\sigma}$ d'après la proposition 2.3, on voit que les composantes connexes du graphe de $\widehat{A}$, qui sont les mêmes ensembles de nœuds que celles du graphe de $\widetilde{A}$, ont leur sous-graphe critique de cyclicité 1. Ce qui achève de démontrer le lemme 2.3.

Références

[1] Baccelli F., G. Cohen, G-J. Olsder, and J-P. Quadrat : *Synchronization and Linearity*, John Wiley and sons, new York, 1992. Ou
`www-rocq.inria.fr/metalau/cohen/SED/book-online.html`

[2] Heidergott B., J.G. Olsder, and J. van der Woude : *Max Plus at Works*, Princeton University Press, à paraître.

A Théorèmes à la Bezout

A.1 Théorème de Bezout

Soit A un anneau, commutatif[1] dont les opérations sont classiquement notées $+$ et $\times$, et leurs éléments neutres respectifs 0 et 1. Pour $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ et de même $b \in A^n$, on notera $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \times b_i$.

Définition A.1

1. *On appelle* idéal *un sous-ensemble $\mathcal{I}$ de A clos pour l'addition et stable pour la multiplication : $\forall a, b \in \mathcal{I}, \forall c \in A, a + b \times c \in \mathcal{I}$. (En particulier, $0 = a + (-1) \times a \in \mathcal{I}$.)*
2. *Un idéal est dit* premier *s'il est composé de tous les multiples d'un même élément, qui est alors appelé un* générateur *de l'idéal.*

Définition A.2 *L'anneau A sera dit* euclidien *si il est doté*

1. *d'un* module *$|\cdot| : A \to \mathbb{N}$, avec $|0| = 0$,*
2. *et d'une* division euclidienne*, c'est à dire que $\forall a \in A$, $\forall b \neq 0 \in A$ avec $|b| \leq |a|$, $\exists q, r \in A$, $|r| < |b|$ ou $r = 0$ si $|b| = 0$, tels que $a = b \times q + r$.*

Remarque L'existence de la division euclidienne ainsi définie implique que tout élément z de module nul est inversible, parce que $|1| \geq |z|$, et le reste de la division de 1 par z doit être nul.

Lemme A.1 *Dans un anneau euclidien, tous les idéaux sont premiers.*

Démonstration Soit $\mathcal{I} \subset A$ un idéal. Soit a_0 un élément de module minimum dans $\mathcal{I}\backslash\{0\}$. Soit $a \in \mathcal{I}$, non nul. Par définition de a_0, $|a_0| \leq |a|$. Donc il existe $q, r \in A$, $|r| < |a_0|$ (ou $r = 0$ si $|a_0| = 0$) tels que $a = a_0 \times q + r$. Mais alors $r = a + (-q) \times a_0 \in \mathcal{I}$. Ainsi, $|r| < |a_0|$ implique que $r = 0$. Donc a_0 est un diviseur de tous les éléments de $\mathcal{I}$ qui est donc premier. ∎

Remarquons que les éléments inversibles de A divisent tous les éléments de A.

Définition A.3 *Des éléments $a_1, a_2, \dots a_n$ de A sont dits* premiers entre eux *si leurs seuls diviseurs communs sont les éléments inversibles.*

Théorème A.1 (Bezout) *Soit A un anneau euclidien. Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont premiers entre eux, il existe des éléments $b_1, b_2, \dots, b_n$ de A, appelés "multiplicateurs de Bezout" tels que $\langle b, a\rangle = 1$.*

Démonstration L'ensemble $\mathcal{I} = \{\langle c, a\rangle, c \in A^n\}$ forme un idéal. Donc il est premier. Soit a_0 un de ses générateurs. a_0 divise tous les éléments de $\mathcal{I}$, donc notamment tous les a_i. Par hypothèse, a_0 est donc un élément inversible. En outre, $\exists c \in A^n$ tel que $\langle c, a\rangle = a_0$, puisque $a_0 \in \mathcal{I}$. Soit $b = a_0^{-1} \times c$. Il vient bien $\langle b, a\rangle = 1$. ∎

Les principaux exemples d'application de ce théorème sont les entiers relatifs, munis de leur valeur absolue pour module, pour lesquels le seul élément inversible est 1, et les polynômes munis du degré comme module, pour lesquels les éléments inversibles sont les constantes, soient les polynômes de degré zéro. Pour l'appliquer aux matrices, voire aux matrices de nombres entiers ou de polynômes (ce dernier cas est utilisé en automatique), il faut étendre la théorie au cas non commutatif.

1. c'est à dire que la multiplication y est, comme l'adition, commutative. Pour un anneau non commutatif, il faut distinguer les notions de premiers à gauche et premiers à droite, ce que nous évitons ici pour simplifier l'exposé.

A.2 Theoreme de Bezout positif

Théorème A.2 *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n entiers positifs premiers entre eux. Il existe un nombre entier positif K tel que $\forall k \geq K$, il existe n entiers positifs $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tels que $\langle c, a\rangle = k$.*

Démonstration Soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des multiplicateurs de bezout, i.e. des entiers relatifs tels que $\langle b, a\rangle = 1$. Soit a_m un minimum (ce choix est avantageux mais pas nécessaire pour cette preuve) parmi les a_i. Posons $z_i = 0$ si $b_i \geq 0$, et $z_i = -(a_m - 1)b_i$ si $b_i < 0$, de sorte que $z_i + \kappa b_i \geq 0$ dès que $\kappa \in [0, a_m - 1]$. Soit $K = \langle z, a\rangle$. Soit $k \geq K$. Formons la division euclidienne $k - K = a_m\nu + \kappa$, $\nu \geq 0$ et $0 \leq \kappa < a_m$. Posons enfin

$$c_m = z_m + \nu + \kappa b_m, \quad \forall i \neq m,\ c_i = z_i + \kappa b_i\,.$$

Comme $\kappa \leq a_m - 1$, on a bien $c_i \geq 0$ pour tout i. En faisant la multiplication, il vient

$$\langle c, a\rangle = \langle z, a\rangle + \nu a_m + \kappa\langle b, a\rangle = K + \nu a_m + \kappa = k\,.$$

∎