UNSA Polytech'Nice-Sophia Antipolis IMAFA

Optimisation de portefeuille
Incidence du risque sur les décisions

Pierre Bernhard

18 janvier 2007

Il n'y a pas de phénomène stochastique,
il n'y a que des modèles stochastiques des phénomènes.
Georges Matheron

1 Introduction

1.1 Cadre général

Dans le cadre de l'optimisation de portefeuille, c'est à dire de la prise de bonnes décisions d'investissement dans des actifs financiers, on veut examiner en particulier l'incidence de la notion de risque, et de l'aversion supposée des acteurs pour le risque, sur les choix "optimaux". Ce dernier adjectif réclame des guillemets, parce que l'optimalité est toujours à comprendre dans le cadre d'un modèle mathématique particulier, qui n'est qu'une image plus ou moins valide de la réalité, tant du marché que des préférences des agents.

Tout le problème réside en effet dans le fait qu'on doit décider combien acheter de chacun des actifs *avant* de savoir comment leur prix évoluera, et on s'intéresse à la valeur de notre avoir *après* cette évolution. Il faut donc, pour pouvoir raisonner, se donner un *modèle* des évolutions possibles. Insistons sur le fait que si le modèle est une *donnée* du problème d'optimisation, au sein duquel il est donc traité comme "connu", les modèles ne sont ni donnés —c'est à nous de les construire— ni des *connaissances*. Ce sont des ensembles d'hypothèses sur les évolutions possibles, qui permettent de rationaliser les prises de décisions au sens ou, *si le modèle est une image fidèle du monde*, il nous conseille de bonnes décisions.

Ne laissons donc pas croire que les modèles que nous allons développer suffisent à investir en bourse en étant assurés de gagner de l'argent, le plus d'argent possible ! Au reste, nous allons développer plusieurs modèles tant pour le marché que pour les préférences des agents, relativisant ainsi chacun d'entre eux. Nous obtiendrons ainsi diverses aides à la décision, qui sont d'autant plus utiles qu'on en comprend mieux la nature et les limites.

1.2 Le marché

Nous sommes en présence d'un marché comportant N actifs risqués, numérotés de 1 à N, et un actif non risqué numéroté 0. Nous introduisons donc des notations qui nous serviront à formuler nos différents modèles.

Soit $u_i(t)$ le prix unitaire de l'actif i à l'instant t. Nous choisissons de représenter les variations, a priori (malheureusement !) inconnues des cours $u_i(t)$ à l'aide des variations relatives $\tau_i(t)$ (éventuellement négatives) de ce prix entre les instants t et $t+1$, soit

$$\tau_i(t) := \frac{u_i(t+1) - u_i(t)}{u_i(t)}\,.$$

On a donc, par définition

$$u_i(t+1) = (1 + \tau_i(t))u_i(t)\,. \tag{1}$$

Remarquons que τ_i est un accroissement relatif *par période de temps*, et qu'il a donc la dimension de l'inverse d'un temps.

Statistiques Pour définir un comportement rationnel concernant le futur, nous aurons besoin d'hypothèses concernant les cours futurs inconnus. Ce seront des hypothèses de nature probabiliste. Insistons sur le fait qu'admettre que les cours sont des variables aléatoires gouvernées par une loi de probabilité intelligible est déjà un choix de modélisation hardi et passablement contestable au plan épistémologique. Mais en l'occurence, on ne sait guère en faire de meilleur pour fonder un comportement rationnel de gestion de portefeuille.

On admettra ici (ce n'est pas le seul fondement possible) que nos informations probabilistes peuvent être déduites d'observations des cours passés, et de l'hypothèse que des propriétés statistiques de ces grandeurs passées peuvent donner des informations de nature probabiliste sur les grandeurs futures. Techniquement, on admet que les grandeurs passées et futures sont des échantillons de variables aléatoires de même loi, ou de lois partageant certains paramètres comme les deux premiers moments.

On peut alors utiliser des estimateurs statistiques pour évaluer les paramètres de la loi de probabilité supposée régir les $\tau_i(t)$. On sait qu'on a facilement accès à un estimateur de l'espérance $\rho_i = \mathbb{E}\tau_i(t)$ par la moyenne des valeurs passées. Nous poserons alors

$$\tau_i(t) = \rho_i + \nu_i(t)\,, \tag{2}$$

où, ρ_i est d'habitude —mais non nécessairement— constant (indépendant du temps), et $\nu_i(t)$ sera une variable aléatoire d'espérance nulle.

On admettra toujours qu'on ne s'intéresse à des placements risqués que pour autant qu'ils ont un rendement espéré supérieur au rendement, certain, de l'actif non risqué, soit que pour tout i, $\rho_i > \rho_0$. On notera $\lambda_i = \rho_i - \rho_0$ l'écart de rendement entre l'actif i et l'actif sans risque. Et on utilisera aussi la notation

$$1 + \rho_i = \mu_i\,, \qquad \text{soit} \qquad 1 + \tau_i = \mu_i + \nu_i\,.$$

Intéressons nous au second moment de la loi des ν_i, qui est aussi accessible à l'expérience via l'estimation statistique. On rappelle que si $\tilde\rho$ désigne la moyenne arithmétique de n échantillons d'une variable aléatoire vectorielle τ, retenue comme estimateur statistique de $\rho = \mathbb{E}(\tau)$, un estimateur de la variance $S = \mathbb{E}(\tau - \rho)(\tau - \rho)^t$ est

$$S \simeq \widetilde{S} := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\tau_k - \tilde\rho)(\tau_k - \tilde\rho)^t\,.$$

Remarquons que $\tilde{S}$, que nous confondrons dorénavant avec S, est par construction une matrice semi-définie positive. En fait, dans toute expérimentation numérique réelle, elle sera même définie positive, mais on préservera ci-dessous la possibilité qu'elle ne soit que semi-définie pour d'éventuelles autres utilisations du modèle.

Soit Σ une matrice de type $N \times \ell$, $\ell \le N$ racine carrée de S, i.e. telle que

$$S = \Sigma\Sigma^t\,.$$

On sait que de telles matrices existent, et si $S > 0$, alors $\ell = N$. On posera $\nu = \Sigma\omega$ où ω est un vecteur aléatoire de dimension ℓ *normalisé* au sens où $\mathbb{E}(\omega) = 0$ et $\mathbb{E}(\omega\omega^t) = I$ la matrice identité. Quelque soit par ailleurs la loi de ω, elle respecte les deux premiers moments de ν, et on a donc une *représentation* de la variable aléatoire ν, ou $\tau = \rho + \nu$. Nous noterons σ_i la ligne de rang i de Σ, de sorte que

$$\nu_i(t) = \sigma_i\omega(t)\,. \tag{3}$$

Dans les modèles que nous utiliserons ci-dessous, nous supposerons toujours en outre que la suite des $\omega(t)$ est *blanche*, c'est à dire que ce sont des variables aléatoires indépendantes entre elles.

Notations Cet excès de notations (u, λ, μ, ν, ρ, σ, τ, ω, Σ, S, plus tard il y aura α, β, γ, δ, v, w, x, φ, χ, ψ) facilitera les calculs, mais pas la lecture ! Voici un résumé:

$$u_i(t+1) = [\underbrace{1 + \overbrace{\rho_i}^{}}_{\mu_i}\overbrace{{}+ \underbrace{\sigma_i\omega(t)}_{\nu_i}}^{\tau_i}]u_i(t)\,. \tag{4}$$

On utilisera les notations vectorielles comme u, ρ, pour désigner les vecteurs de $\mathbb{R}^N$ de coordonnées u_i, ρ_i, $i = 1 \dots N$. Quand on voudra ajouter un élément de coordonné 0, correspondant à l'actif sans risque, on ajoutera explicitement les termes le concernant. On utilisera aussi le vecteur $\mathbb{1}$ de $\mathbb{R}^N$ dont toutes les coordonnées sont égales à un. Ainsi, le produit scalaire $\langle \mathbb{1}, u \rangle$ désigne la somme des u_i, $i = 1 \dots N$. Ainsi, on aura par définition

$$\lambda = \rho - \mathbb{1}\rho_0 \,. \tag{5}$$

1.3 Le portefeuille

1.3.1 Notations

On peut décider d'acheter un nombre x_i de chaque actif i. On fera ici une simplification importante, qui simplifie les mathématiques aux dépens du réalisme du modèle, qui est que x_i peut varier continûment : $x_i \in \mathbb{R}$. Un modèle plus réaliste serait de prendre les x_i entiers. Le prix à payer en difficulté mathématique est trop grand, tant est difficile le problème d'optimisation en nombres entiers. On estime que pour les "gros" investissements, cette approximation n'est pas trop pénalisante.

Dans les problèmes de gestion dynamique du chapitre (3), les x_i dépendront du temps. Nous y reviendrons au début de ce chapitre. On appellera aussi $v_i := x_i u_i$ la quantité d'argent investie dans l'actif i. Remarquons que si les u_i sont positifs par hypothèse, les x_i, et par voie de conséquence les v_i et les φ_i ci-dessous, peuvent parfaitement être négatifs. Cela correspond à un emprunt souscrit dans cet actif, soit à une position à découvert. ("Short position", en Anglais, par opposition à "long position".)

On note w la valeur du portefeuille ainsi constitué. Ainsi, donc,

$$w = \sum_{i=0}^{N} x_i u_i = \sum_{i=0}^{N} v_i = v_0 + \langle \mathbb{1}, v \rangle \,. \tag{6}$$

Il est aussi commode de donner un nom à la fraction de l'investissement placée dans chaque actif:

$$\varphi_i = \frac{v_i}{w} \,, \tag{7}$$

de sorte qu'on a par construction (avec nos vecteurs de dimension N, sans la cordonnée 0)

$$\varphi_0 = 1 - \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle \,. \tag{8}$$

1.3.2 Dynamique (portefeuille statique)

Il est intéressant d'examiner la variation de valeur du portefeuille sur une période de temps dans ce modèle. Imaginons donc qu'à l'instant t on connaisse les x_i (qu'on ne va pas changer dans ce calcul sur un seul pas de temps, on ne les dote donc pas d'un argument de temps. (Ce seront les $x_i(t+1)$ du chapitre (3)). On voit facilement qu'on a

$$w(t+1) = \sum_{i=0}^{N} x_i u_i(t+1) = \sum_{i=0}^{N} x_i u_i(t)[\mu_i + \sigma_i \omega(t)]$$

soit, en utilisant la notation $x_i u_i(t) = \varphi_i(t) w(t)$ (ce w sera le $w(t^+) = w(t) - c(t)$ du chapitre (3)) et en se souvenant des relations (8) et $\mu_i - \mu_o = \lambda_i$, et avec les notations matricielles:

$$w(t+1) = [\mu_0 + \varphi^t(t)(\lambda + \Sigma\omega(t))]w(t) \tag{9}$$

On en déduit facilement des grandeurs comme le rendement par exemple, noté r :

$$r = \frac{w(t+1) - w(t)}{w(t)} = \rho_0 + \varphi^t(t)[\lambda + \Sigma\omega(t)]\,, \tag{10}$$

et son espérance,

$$\mathbb{E}(r) = R = \rho_0 + \varphi^t\lambda\,. \tag{11}$$

1.3.3 Optimisation naive

Nous allons faire ici un petit raisonnement avec un seul investissement. Examinons donc le problème de choisir au mieux les x_i, qu'on contraindra ici à être positifs, pour maximiser le rendement espéré du portefeuille à une échéance fixée. On appelle $t = 0$ l'instant où on investit, et $t = 1$ l'échéance visée. On admet un modèle conforme à (1)(11).

La solution en est aussi évidente qu'insatisfaisante : elle consiste à ne pondérer avec des φ_i non nuls que le ou les ρ_i maximaux, et l'optimum (noté R^*) est $R^* = \max_i \rho_i$. Solution insatisfaisante, parce que, dans le cas générique ou le ρ_i maximum est unique, par exemple, elle consiste à mettre tout son budget dans un seul actif, celui de rendement espéré maximum.

Ce comportement est inacceptable parce qu'il fait encourir un *risque* excessif.

Mais comme la notion de risque n'était pas dans le modèle, les mathématiques n'en ont pas tenu compte. La suite de ce cours vise à introduire la notion de risque et l'aversion au risque dans le modèle.

2 Problèmes statiques

Dans ce chapitre, on reprend le problème d'optimisation esquissé dans le numéro précédent. On appelle donc $t = 0$ l'instant où on constitue le portefeuille, et $t = 1$ le terme prévu de l'investissement, où se jugera son efficacité. Naturellement, cette période prise ici pour unité de temps peut être grande. Les paramètres comme les ρ_i et les σ_i devront être choisis en conséquence pour représenter des espérances sur cette période.

On doit choisir les $N + 1$ quantités x_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, de chaque actif qu'on achètera. Pour normaliser les choses, on s'intéressera plutot aux fractions φ_i, ce qui dispense de nommer le budget alloué à l'opération. (Ou revient à le prendre pour unité.) On admet donc le modèle (10) ou (11) pris entre les instants 0 et 1.

2.1 Analyse multicritères : le modèle de Markowitz

Dans ce numéro, on va faire une analyse prenant en compte rendement espéré et risque, utilisant un concept de l'analyse multicritère.

2.1.1 L'écart type comme mesure du risque

La notion de risque est liée aux écarts des variables aléatoires d'avec leur espérance. La mesure la plus classique de l'importance de ces variations est la variance, ou sa racine carrée l'écart type. La variance est une mesure "symétrique", au sens où une forte variance indique une bonne probabilité d'être "loin" de la moyenne, mais sans distinguer les écarts "vers le haut" des écarts "vers le bas". C'est l'aversion au risque des agents qui en fait une mesure du risque, dans la mesure où les écarts vers le bas sont ressentis comme plus indésirables que ceux vers le haut ne sont désirables.

Pour manipuler facilement la variance, nous choisissons un modèle des aléas où non seulement $\mathbb{E}(\omega) = 0$, mais en outre et $\mathbb{E}(\omega\omega^t) = I$ la matrice identité $\ell \times \ell$. On aura ainsi

$$\mathbb{E}(\nu) = 0\,, \qquad \mathbb{E}(\nu\nu^t) = \Sigma\Sigma^t = S\,.$$

L'écart type relatif (pour normaliser par le montant investi) de la valeur du portefeuille à l'échéance sera alors

$$Q = \frac{1}{w(0)}\left[\mathbb{E}\Big(w(1) - (\mu_0 + \varphi^t\lambda)w(0)\Big)^2\right]^{\frac{1}{2}} = (\mathbb{E}(\varphi^t\Sigma\omega)^2)^{\frac{1}{2}} = (\varphi^t S\varphi)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Il sera donc pris ici comme mesure du risque.

2.1.2 Optimum de Pareto

On a un problème où on souhaite que Q soit petit et R grand, ce qu'on appelle un problème multicritère. On pose alors en définition:

Définition 1 *On appelle point* Pareto optimal *tout point φ tel qu'on ne puisse pas améliorer un des critères sans déteriorer l'autre.*

Naturellement, pour R améliorer veut dire augmenter et déteriorer diminuer, tandis que c'est le contraire pour Q.

Proposition 2.1 *Soit a un nombre positif. Un choix φ^* qui maximise la quantité*

$$J_a(\varphi) = R - \frac{a}{2}Q^2$$

est Pareto optimal.

Démonstration On a en effet

$$\forall\varphi\,, \quad 0 \le J_a(\varphi^*) - J_a(\varphi) = R(\varphi^*) - R(\varphi) - \frac{a}{2}(Q^2(\varphi^*) - Q^2(\varphi))\,,$$

soit

$$R(\varphi^*) - R(\varphi) \ge \frac{a}{2}(Q^2(\varphi^*) - Q^2(\varphi))\,,$$

de sorte que si $R(\varphi) > R(\varphi^*)$, nécessairement $Q^2(\varphi) > Q^2(\varphi^*)$, et comme Q est toujours non négatif, $Q(\varphi) > Q(\varphi^*)$. Réciproquement, si $Q(\varphi) < Q(\varphi^*)$, nécessairement $R(\varphi) < R(\varphi^*)$. ∎

Le paramètre a s'analyse comme une mesure de l'aversion pour le risque : plus a est grand plus on prend en compte le terme en Q dans le critère, donc plus on est averse au risque. Aux extrêmes, pour $1/a$ tendant vers zéro, seul Q est pris en compte, alors que pour a tendant vers zéro, seul le rendement R est pris en compte.

2.1.3 Optimisation sous contrainte

Nous allons commencer par considérer le problème où on ne met pas de contrainte sur les φ_i (on peut être à découvert sur certaines lignes du portefeuille) si ce n'est que, s'agissant de fractions du budget investi, leur somme doit être inférieure ou égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i = \varphi^t\mathbb{1} \le 1\,.$$

(C'est à dire que $\varphi_0 = 1 - \sum_{i=1}^N \varphi_i \geq 0$.)

On introduit donc le lagrangien

$$\mathcal{L} = \rho_0 + \varphi^t \lambda - \frac{a}{2}\varphi^t S \varphi + p\varphi^t \mathbb{1}\,,$$

où p est le multiplicateur de Lagrange (ou Kuhn-Tucker). Le lagrangien est concave en φ. Donc, hors contraintes non dualisées sur φ, il est maximum là où son gradient s'annulle :

$$\nabla\mathcal{L}(\varphi^*) = \lambda - aS\varphi^* + p\mathbb{1} = 0\,.$$

Soit

$$\varphi^* = (aS)^{-1}(\lambda + p\mathbb{1})\,.$$

Pour poursuivre les calculs plus commodément, on introduit (encore !) des notations : posons

$$\alpha = \mathbb{1}^t S^{-1}\mathbb{1}\,, \quad \beta = \mathbb{1}^t S^{-1}\lambda\,, \quad \gamma = \lambda^t S^{-1}\lambda\,, \quad \delta = \alpha\gamma - \beta^2\,,$$

et, correspondant au cas $\rho_0 = 0$,

$$\beta_0 = \mathbb{1}^t S^{-1}\rho\,, \quad \gamma_0 = \rho^t S^{-1}\rho\,.$$

Ces quantités ne dépendent que des données du modèle. Remarquons que α, β_0 et γ_0 sont indépendants de ρ_0 par construction, et (5) montre qu'en outre $\beta + \alpha\rho_0 = \beta_0$ et $\delta = \alpha\gamma_0 - \beta_0^2$ sont également indépendants de ρ_0. Enfin, par Cauchy Shwarz, on voit que $\delta \geq 0$.

On essaye une solution où $\mathbb{1}^t\varphi^* = 1$:

$$\mathbb{1}^t\varphi^* = a^{-1}(\beta + p\alpha) = 1\,,$$

soit

$$p = \frac{1}{\alpha}(a - \beta)\,. \tag{12}$$

Si la contrainte sur les φ est une contrainte *inégalité*, le multiplicateur doit être négatif. Donc,

- si $a \leq \beta$, (on n'est pas trop averse au risque), on a (12), et donc, par un calcul élémentaire

$$\varphi^* = \frac{1}{\alpha}S^{-1}[a^{-1}(\lambda\alpha - \mathbb{1}\beta) + \mathbb{1}] = \frac{1}{\alpha}S^{-1}[a^{-1}(\rho\alpha - \mathbb{1}\beta_0) + \mathbb{1}] = \frac{1}{a\alpha}S^{-1}\Delta(\rho)S^{-1}\mathbb{1} + \frac{1}{\alpha}S^{-1}\mathbb{1} \tag{13}$$

  où $\Delta(\rho)$ est la matrice antisymétrique $\rho\mathbb{1}^t - \mathbb{1}\rho^t$, soit, en reportant,

$$R = \frac{\delta}{\alpha}a^{-1} + \rho_0 + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha}a^{-1} + \frac{\beta_0}{\alpha}\,, \tag{14}$$

$$Q = \left(\frac{\delta a^{-2} + 1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{15}$$

- Si au contraire, $a \geq \beta$, (on est très averse au risque), on a $p = 0$ et

$$\varphi^* = (aS)^{-1}\lambda\,, \tag{16}$$

  et en reportant

$$R = \gamma a^{-1} + \rho_0\,, \tag{17}$$

$$Q = \sqrt{\gamma}a^{-1}\,. \tag{18}$$

2.1.4 Interprétation des résultats

I) Portefeuille de valeurs risquées (seules) Les calculs ci-dessus nous permettent d'examiner dans un premier temps les meilleurs portefeuilles composés de valeurs rsiquées seulement. Il suffit en effet d'imposer $\sum_{i=1}^{N}\varphi_i = 1$ sans considération, donc, pour le signe de p. (Qui devient un multiplicateur de Lagrange plutot que de Kuhn et Tucker.) On obtient donc les formules (13),(14) et (15), dont on remarque qu'elles ne dépendent pas de ρ_0, comme il est normal puisque l'actif non risqué n'y est pas. Quand a varie de zéro à l'infini, elles dessinent dans le plan (Q, R) une courbe concave croissante $\mathcal{E}$, une demi-branche d'hyperbole de sommet $(1/\sqrt{\alpha}, \beta_0/\alpha)$ et d'asymptote $R = \sqrt{\delta/\alpha}Q + \beta_0/\alpha$, représentant les portefeuilles risqués dits "efficients", c'est à dire Pareto optimaux parmi les portefeuilles ne comportant que des actifs risqués.

II) Portefeuille optimal en l'absence d'actif non risqué En l'absence d'actif non risqué, on peut envisager de n'investir qu'une partie du budget disponible, et garder le reste non investi. Ceci correspond au cas ci-dessus avec $\rho_0 = 0$ (pas de revenu des parts non investies). On voit que pour une aversion au risque suffisante, $a > \beta_0$, on n'investit qu'une certaine proportion inférieure à un du budget, la proportion $\varphi_0 = 1 - \beta_0/a$ restant en "liquide". On est alors sur la partie (17)(18) avec $\rho_0 = 0$, ou plus précisément

$$\begin{aligned} R &= \gamma_0 a^{-1}, \\ Q &= \sqrt{\gamma_0}a^{-1} \end{aligned}$$

qui dessine dans le plan (Q, R) une droite passant par l'origine et, c'est facile à vérifier, tangente à la courbe $\mathcal{E}$ au point $R = \gamma_0/\beta_0$, $Q = \sqrt{\gamma_0}/\beta_0$.

III) Portefeuille optimal avec un actif non risqué, sans emprunt En introduisant l'actif non risqué de rendement ρ_0 (au lieu de 0), on remplace dans la plan (Q, R) la droite passant par l'origine par (16)(17)(18), une droite passant par le point $Q = 0$, $R = \rho_0$, et encore tangente à la courbe $\mathcal{E}$, c'est à dire placée "plus haut" que la précédente. Cette droite est parfois apelée "droite de marché".

La composition relative $\hat{\varphi}$ de la part risquée du portefeuille

$$\frac{1}{\langle \mathbb{1}, \varphi^* \rangle}\varphi^* = \frac{1}{\beta}S^{-1}\lambda =: \hat{\varphi} \tag{19}$$

est constante pour tous les portefeuilles situés sur cette tangente, et égale à celle au point de contact. Seule la proportion de l'actif total $\langle \mathbb{1}, \varphi^* \rangle = \beta/a$ investie change avec a.

On voit comment l'introduction d'un actif non risqué, même de mauvais rendement (ρ_0 "petit") peut permettre à l'investisseur averse au risque d'améliorer sa performance.

IV) Portefeuille optimal avec emprunt Si maintenant, on autorise l'investisseur à emprunter sur le marché monétaire, au même taux ρ_0 que les placements sans risque, on a les mêmes calculs, mais sans la contrainte $\varphi_0 \leq 1$, que nous avions exprimée à l'aide des φ_i, $i \geq 1$. Donc on est dans la situation où p ci-dessus est toujours égal à zéro, c'est à dire que les formules (16)(17)(18) s'appliquent toujours. On se situe dans le plan (Q, R) sur cette même "droite de marché", mais d'un côté ou de l'autre du point de contact avec la courbe $\mathcal{E}$, suivant qu'on est peu ou très averse au risque.

On voit donc que dans ce problème, les proportions relatives $\hat{\varphi}$ des différents actifs dans le portefeuille optimal sont toujours données par (19) et donc indépendantes de l'aversion au risque a, seul le montant total investi en actif risqué change, ce montant pouvant, pour un invetsisseur peu averse au risque, être supérieur à son avoir initial, par emprunt.

Taux d'emprunt supérieur à celui des placements sans risque On voit comment traiter le cas où on emprunterait à un taux ρ'_0 supérieur à ρ_0. Les portefeuilles à $\varphi_0 < 0$, c'est à dire avec emprunt, se situeraient sur la droite tangente à la courbe des portefeuilles risqués efficients passant par le point $(0, \rho'_0)$. Entre les deux points de contact il y a une petite région (correspondant donc à un petit domaine d'aversion au risque) où le portefeuille optimal est à $\varphi_0 = 0$.

2.1.5 Interprétation en termes de combinaison de portefeuilles

Combinaison de portefeuilles risqués Un portefeuille est défini par sa valeur totale w et sa *composition* relative φ. Considérons deux portefeuilles, désignés par (w^1, φ^1) et (w^2, φ^2). [1] Le portefeuille union (ou somme) des deux a la valeur $w^1 + w^2$, et la composition

$$\varphi = \frac{w^1}{w^1 + w^2}\varphi^1 + \frac{w^2}{w^1 + w^2}\varphi^2 .$$

C'est à dire que sa composition est la *combinaison convexe* des compositions des deux portefeuilles de départ, avec pour poids la proportion de l'avoir investi dans chacun. Donc pour nous qui nous intéressons aux compositions, et à leur caractère efficient, seules les proportions de l'avoir investi dans chaque portefeuille est pertinente. Soient donc $\pi^1 = \pi$ et $\pi^2 = 1 - \pi$ ces proportions.

Il découle du caractère affine en a^{-1} des formules (13) et (16) des portefeuilles efficients le résultat suivant, souvent élevé au rang de théorème dit "de séparation à deux fonds"

Théorème 2.2 *Pour les problèmes* **I)** *et* **IV)** *ci-dessus*

- *Toute combinaison de portefeuilles efficients est un portefeuille efficient*
- *Toute paire de portefeuilles efficients (différents) permet d'engendrer tous les portefeuilles efficients par simple combinaison. (À condition d'autoriser les proportions plus grandes que 1 et donc aussi les proportions négatives.)*

Le rendement espéré d'un portefeuille $\pi\varphi^1 + (1 - \pi)\varphi^2$ est $\pi R^1 + (1 - \pi)R^2$ (où naturellement R^1 et R^2 sont les rendements espérés des portefeuilles φ^1 et φ^2 respectivement.)

Combinaison avec un actif sans risque On va retrouver la solution du problème **IV)** par un argument de combinaison d'une proportion φ_0 d'un actif sans risque, de rendement ρ_0 et $(1 - \varphi_0)$ d'un portefeuille risqué de composition φ^1, de rendement espéré R^1 et de variance Q^1. Un clacul rapide montre que son rendement espéré est $\varphi_0\rho_0 + (1 - \varphi_0)R^1$, et sa variance $(1 - \varphi_0)Q^1$. Ainsi, son point représentatif dans le plan (Q, R) d'ecrit le segment de droite joignant le point $(0, \rho_0)$ représentatif de l'actif sans risque au point (Q^1, R^1) représentatif du portefeuille φ^1. Et a nouveau, si on admet les proportions supérieures à 1 ou négatives, c'est toute la demi-droite que l'on décrit.

Donc les portefeuilles accessibles en se servant d'un actif non risqué (fût-il de rendement nul) sont décrits dans le plan (Q, R) par le cone de sommet $(0, \rho_0)$ engendré par l'ensemble des portefeuilles risqués accessibles, lui-même délimité par l'hyperbole $\mathcal{E}$ vue ci-dessus. Il est alors immédiat de voir que sa frontière de Pareto ("nord-est") est constituée par la tangente à l'hyperbole passant par le point $(0, \rho_0)$. On en déduit directement le théorème vu ci-dessus, attribué à Tobin :

Théorème 2.3 *En présence d'un actif non risqué, tous les portefeuilles efficients sont obtenus en combinant un investissement dans l'actif non risqué et un investissement dans un portefeuille fixe de composition $\varphi^* = (\beta S)^{-1}\lambda$.*

[1] Il ne s'agit pas ici de carrés mais d'indices supérieurs

2.2 Aversion au risque et critère strictement concave

Une façon de prendre en compte l'aversion au risque dans un critère est d'optimiser l'*espérance* d'une fonction croissante *strictement concave* du rendement. Ainsi, la pente vers les faibles rendements étant plus grande que vers les forts rendements, on pénalise plus les déviations vers le bas qu'on ne récompense, dans le critère, les déviations vers le haut. Cette asymétrie fait que les mathématiques chercheront à proposer un portefeuille à faible variance.

On peut penser que cette nouvelle façon de procéder est plus fidèle à ce qu'on veut faire : pourquoi la variance et seulement la variance comme mesure du risque ? On devrait pouvoir mettre dans une utilité notre critère subjectif (du moins si on en croit les axiomes de rationalité de Von Neumann). On va voir que la limitation sur les critères qu'on saura en pratique utiliser limite ce réalisme supposé.

Nous allons examiner deux façons de faire cela, deux familles de critères concaves. "Famille" parce que dans chacun des deux cas, un paramètre libre nous permettra de régler la concavité du critère, et donc le niveau d'aversion au risque représenté. (On utililsera a pour l'aversion au risque tandis que θ représentera plutôt un niveau d'acceptation du risque.)

2.2.1 Critère exponentiel et marché gaussien

Cette technique est connue sous le nome de "Risk averse control". Le fait (décevant ou encourageant ?) qu'elle mène essentiellement au même résultat que l'analyse précédente est célèbre.

On choisit comme critère

$$J(\varphi) = \mathbb{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-ar}\right) .$$

En fait, maximiser un critère ou minimiser son opposé conduit à la même décision. On prendra donc plutôt comme problème :

$$\min_{\varphi} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-ar}\right) .$$

Ce problème a une solution simple si on prend pour modèle de marché le modèle (1)(2)(3), résumé par (4), avec pour ω une variable gaussienne normalisée, c'est à dire d'espérance nulle (comme toujours) et de covariance identité. Ce modèle n'est pas satisfaisant, en ce qu'il permet aux prix u_i de devenir négatifs. Nous ignorons cette difficulté.

Le critère s'écrit alors

$$J = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-a[\rho_0 + \varphi^t(\lambda + \Sigma\omega)]\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\|\omega\|^2\right) \mathrm{d}\omega \,.$$

Ceci s'écrit aussi, en ajoutant les exposants et en complétant le carré,

$$J = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\omega + a\Sigma^t\varphi\|^2 + \frac{a^2}{2}\varphi^t S\varphi - a(\rho_0 + \varphi^t\lambda)\right) \mathrm{d}\omega \,.$$

En faisant le changement de variable $\omega + a\Sigma^t\varphi = \zeta$, il vient

$$J = \exp\left(-a(\rho_0 + \varphi^t\lambda - \frac{a}{2}\varphi^t S\varphi)\right) \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\zeta\|^2\right) \mathrm{d}\zeta \,.$$

La dernière intégrale, multipliée par le coefficient de normalisation, vaut 1. Il reste donc la première exponentielle à minimiser, ce qui est équivalent au problème de maximiser $\rho_0 + \varphi^t\lambda - \frac{a}{2}\varphi^t S\varphi$. On reconnaît le même problème qu'au chapitre précédent. (Ajoutons que $-a(\rho_0 + \varphi^t\lambda - \frac{a}{2}\varphi^t S\varphi)$ s'écrit aussi comme le max en ω de l'exposant complet, et on obtient la "formule magique" de P. Whittle.)

2.2.2 Critère en puissance fractionnaire et modèle à intervalles

Critère en puissance fractionnaire Nous adoptons maintenant un autre critère concave, de la forme

$$J = \mathbb{E}[(1+r)^\theta]$$

avec θ maintenant compris entre 0 et 1. Ceci suppose que $w(t)$ reste toujours positif. On peut par exemple interdire les positions à découvert et contraindre les φ_i à être non-négatifs et à sommer à pas plus de 1. (On laisse le lecteur utiliser (9) pour poser des contraintes moins strictes).

Le coefficient θ s'interprette ici comme une mesure de *goût du risque*. Pour θ proche de 1, on n'a guère d'effet de non-linéarité, on est proche d'un agent neutre au risque. Pour θ petit au contraire, la courbe est très concave au voisinage de $r = 0$, reflétant un effet de satiété, et induisant une aversion au risque.[2]

Modèle à intervalles uniforme[3] Ce critère sera plus facile à optimiser si on prend pour modèle de marché que les ω_j, $j = 1, \dots, \ell$ sont tous des variables aléatoires (indépendantes les unes des autres) équiréparties sur $[-1, +1]$, ce qu'on appellera un *modèle à intervalles uniforme*.

En fait, pour respecter la normalisation $\mathrm{Var}(\omega) = I$, il faudrait prendre les ω_i équirépatis sur $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Pour éviter de compliquer les calculs avec des $\sqrt{3}$ partout, nous admettrons qu'**on a multiplié Σ par $\sqrt{3}$**, de sorte que $\Sigma\Sigma^t = 3S$, et ainsi on récupère bien que la variance de $\Sigma\omega$ est S.

Dans ce modèle, ω parcourt le cube $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^\ell$ dont les sommets ont pour coordonnées $+1$ ou -1. On utilisera $\widehat{\mathcal{C}}$ l'ensemble des sommets de ce cube. À chaque $\hat{\omega} \in \widehat{\mathcal{C}}$ on associera sa parité $\varepsilon(\hat{\omega}) = \Pi_j \hat{\omega}_j$.

On s'assure que les u_i restent tous positifs si

$$\mu_i \geq \sum_{j=1}^{\ell} |\sigma_{ij}| \, .$$

Calcul du critère On a donc

$$J = \frac{1}{2^\ell} \int_{\mathcal{C}} \left(\mu_0 + \varphi^t(\lambda + \Sigma\omega)\right)^\theta \, \mathrm{d}\omega \, .$$

On pose $\Sigma^t\varphi = \psi$, et une utilisation répetée du théorème de Fubini mène à

$$J = \frac{1}{2^\ell \prod_{j=1}^{\ell}(\theta + j)\psi_j} \sum_{\hat{\omega} \in \widehat{\mathcal{C}}} \varepsilon(\hat{\omega}) \left(\mu_0 + \varphi^t(\lambda + \Sigma\hat{\omega})\right)^{\theta+\ell} =: L_\theta(\varphi) \, . \tag{20}$$

Nous noterons $L_\theta(\varphi)$ cette quantité plus loin. Dans un souci d'optimisation numérique, on calcule son gradient en φ. La seule difficulté est dans le calcul du gradient du terme $\Psi = \prod_{j=1}^{\ell}(\theta + j)\psi_j$. S'agissant d'un produit, sa dérivée par rapport à φ_i est une somme de produits dont chaque terme contient la dérivée d'un des facteurs du produit. On arrive ainsi à la formule

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_i} = \Psi \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\sigma_{ik}}{\psi_k} \, ,$$

[2]On aurait pu prendre $\theta = \frac{1}{1+a}$, ce qui simplifie les résultats du paragraphe(3.2.3). Nous y renonçons pour ne pas alourdir les énoncés.

[3]"uniforme" sans "s" : c'est le modèle à intervalles qui est uniforme.

ou, en introduisant le vecteur noté $\left(\frac{1}{\psi}\right)$ dont les coordonnées sont les $1/\psi_k$, $\nabla_\varphi \Psi = \Psi\Sigma\left(\frac{1}{\psi}\right)$. On arrive ainsi au résultat

$$\nabla_\varphi L_\theta(\varphi) = \frac{1}{2^\ell \prod_{j=1}^{\ell}(\theta+j)\psi_j} \sum_{\hat\omega\in\widehat{\mathcal{C}}} (\lambda+\Sigma\hat\omega)\varepsilon(\hat\omega)\left(\mu_0+\varphi^t(\lambda+\Sigma\hat\omega)\right)^{\theta+\ell-1} - \Sigma\left(\frac{1}{\psi}\right) L_\theta(\varphi)\,.$$

On remarque qu'une fois programmé le calcul de L_θ, le calcul du gradient ne demande guère de travail supplémentaire.

Un seul actif risqué Ce paragraphe est à prendre comme un exercice, destiné à montrer comment la théorie ci-dessus s'applique dans un cas d'école.

On spécialise le calcul précédent au cas où $N = 1$, naturellement $\ell = 1$. φ est alors un scalaire donnant la fraction du portefeuille investie dans l'actif risqué. On a

$$J = L_\theta(\varphi) = \frac{1}{2(\theta+1)\sigma\varphi}\left[(\mu_0+\varphi(\lambda+\sigma))^{\theta+1} - (\mu_0+\varphi(\lambda-\sigma))^{\theta+1}\right].$$

L'utilisation de la formule ci-dessus, ou un calcul direct, montre alors que

$$L'_\theta(\varphi) = \frac{1/2}{(\theta+1)\sigma\varphi^2}\left[(\mu_0+(\lambda-\sigma)\varphi)^\theta(\mu_0-\theta(\lambda-\sigma)\varphi) - (\mu_0+(\lambda+\sigma)\varphi)^\theta(\mu_0-\theta(\lambda+\sigma)\varphi)\right].$$

Une étude de signe détaillée montre que $L'_\theta(0) > 0$, de sorte que la première racine de L' corrrespond à un maximum. Cette racine est obtenue quand

$$(\mu_0+(\lambda-\sigma)\varphi)^\theta(\mu_0-\theta(\lambda-\sigma)\varphi) = (\mu_0+(\lambda+\sigma)\varphi)^\theta(\mu_0-\theta(\lambda+\sigma)\varphi)\,.$$

Examinons le cas où θ est rationnel : $\theta = p/q$, p et q entiers. Prenons la puissance q de chacun des deux membres ci-dessus (ils sont toujours positifs) et multiplions par q^q. Il vient

$$(\mu_0+(\lambda-\sigma)\varphi)^p(q\mu_0-p(\lambda-\sigma)\varphi)^q = (\mu_0+(\lambda+\sigma)\varphi)^p(q\mu_0-p(\lambda+\sigma)\varphi)^q\,.$$

C'est un exercice plus ennuyeux que difficile de voir que le polynôme en φ obtenu en développant est divisible par φ^2. Il reste donc un polynôme de degré $p+q-2$ dont la première racine donne l'investissement optimal. Sa forme ci-dessous n'est donnée ici qu'aux fins de référence. En posant

$$\Gamma^n_{pq} := \sum_{i=n-p}^{q} C_p^{n-i} C_q^i (-p)^i q^{q-i}\,, \quad \Delta_n(\lambda,\sigma) := (\lambda+\sigma)^n - (\lambda-\sigma)^n\,,$$

on trouve

$$\sum_{n=2}^{p+q} \Gamma^n_{pq}\Delta_n(\lambda,\sigma)\mu_0^{p+q-n}\varphi^{n-2} = 0\,.$$

Regardons les deux cas les plus simples, et rappelons nous que $\sigma^2 = 3S$.

- $\theta = \frac{1}{2}$. Ce cas est un peu la référence. On a alors, si $S \geq \lambda(2\mu_0 - \lambda)$,

$$\varphi^* = 2\mu_0\frac{\lambda}{\lambda^2+S},$$

(et $\varphi^* = 1$ si non), et toujours dans ce cas

$$L(\varphi^*) = \begin{cases} \left(\dfrac{\mu_0}{3(\lambda^2+S)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(3\lambda + \dfrac{S}{3\lambda}\right) & \text{si } S \leq 3\lambda^2\,, \\ \mu_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \dfrac{\lambda^2}{S}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{si } S \geq 3\lambda^2\,. \end{cases}$$

En général, λ sera très petit devant σ, de sorte que $\varphi^* \simeq 2\mu_0 S^{-1}\lambda$. On note la similitude avec la formule (16). On voit donc que φ^* croit avec λ et décroit avec S, comme il est logique.

- $\theta = \frac{1}{3}$. L'équation à résoudre est du second degré. On trouve

$$\varphi^* = \mu_0 \frac{\sigma^2 + 3\lambda^2 - \sigma\sqrt{\sigma^2 - 3\lambda^2}}{\lambda(\lambda^2+\sigma^2)} \simeq \frac{3}{2}\mu_0 \frac{\lambda}{S}\,.$$

(On vérifiera que cette valeur est inférieure à la précédente, comme un θ plus petit, donc un investisseur plus averse au risque, le justifie.)

2.2.3 Critère en puissance fractionnaire et modèle empirique non paramétrique

D'une manière plus générale, le modèle d'utilité en puissance θ revient à considérer la quantité

$$K_\theta(\varphi) = \mathbb{E}[\mu_0 + \varphi^t(\lambda + \Sigma\omega)]^\theta = \mathbb{E}[\mu_0 + \varphi^t(\tau - \mathbb{1}\rho_0)]^\theta\,.$$

Supposons que soit disponible une chronique suffisamment longue des $u_i(t)$ passés. Si on veut construire un modèle qui rende compte du passé (dans l'espoir que ses caractéristiques statistiques resteront représentatives de celles du futur), on peut faire cela sans faire de modèle explicite, ou du moins sans chercher à ajuster une loi paramétrique sur les observations passées.

Au contraire, nous notons les $\hat\tau(t)$ empiriques passés, donnés par

$$\hat\tau_i(t) = \frac{u_i(t+1) - u_i(t)}{u_i(t)}\,,$$

nous choisissons un *coefficient d'oubli* $b < 1$, et nous prenons pour loi de probabilité de τ la *loi empirique* au temps t :

$$P_t(\tau) = (b^{-1} - 1)\sum_{k=1}^{\infty} b^k \delta(\tau - \hat\tau(t-k))\,.$$

(On suppose que la longueur de la chronique disponible et le choix de b sont tels que les $\hat\tau(t-k)$ empiriques manquants sont pondérés par un coefficient b^k négligeable : le passé non disponible est suffisamment lointain pour n'être d'aucun enseignement sur la tendance présente.)

Dans ce modèle, on a exactement

$$K_\theta(\varphi) = (b^{-1} - 1)\sum_{k=1}^{\infty} b^k [\mu_0 + \varphi^t(\hat\tau(t-k) - \mathbb{1}\rho_0)]^\theta\,. \tag{21}$$

Le crochet à élever à la puissance θ s'écrit $[1 + \rho_0 + \varphi^t\hat\tau(t-k) - \varphi^t\mathbb{1}\rho_0]$. Si on se restreint aux $\varphi \geq 0$ et tels que $\varphi^t\mathbb{1} \leq 1$, et en se souvenant que $\hat\tau \geq -\mathbb{1}$, on voit que ce crochet est toujours positif.

Le facteur $b^{-1}-1$ peut être ignoré dans l'optimisation de ce critère. On notera que le gradient par rapport à φ est :

$$\nabla_\varphi K_\theta = \theta(b^{-1}-1)\sum_{k=1}^{\infty} b^k[\mu_0 + \varphi^t(\hat{\tau}(t-k) - \mathbb{1}\rho_0)]^{\theta-1}(\hat{\tau}(t-k) - \mathbb{1}\rho_0)\,.$$

L'utilisation dynamique de cette théorie statique consiste à remettre à jour à chaque instant t le φ optimal au vu de ce critère. Une méthode de gradient, voire de Newton, à pénalisation intérieure initialisée à chaque instant avec le φ opimal de l'instant précédent doit être assez rapide.

3 Optimisation dynamique

3.1 Temps discret

3.1.1 Modèles

Marché Notre modèle de marché sera toujours de la forme (4), avec pour $\{\omega(\cdot)\}$ une suite *blanche*, c'est à dire de variables aléatoires indépendantes entre elles, et, comme toujours, d'espérance nulle.

Portefeuille On examine dorénavent un problème de gestion dynamique, c'est à dire sur plusieurs périodes de temps, où l'investisseur peut à chaque période réajuster son portefeuille en fonction des prix observés à cet instant sur le marché. (Il pourrait aussi utiliser les prix passés. En fait, les historiques peuvent servir à construire le modèle. Mais une fois le modèle figé, comme on le prend markovien pour satisfaire à l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, on n'a plus besoin d'utiliser les cours passés.)

On note $x(t)$, $v_i(t) = x_i(t)u_i(t)$, $w(t) = \sum_i v_i(t)$ les quantités juste *avant* les transactions effectuées à l'instant t aux cours $u(t)$. On notera $x(t^+)$, $v(t^+)$ et $w(t^+)$ les quantités correspondantes juste *après* les transactions de l'instant t. On pourra noter déjà que $x(t+1) = x(t^+)$. Les cours $u(t)$ sont continus.

On autorise l'investisseur à revendre à chaque instant pour un peu plus qu'il ne réinvestit, la différence lui permettant une certaine consommation que nous notons $c(t)$, dont nous imposons qu'elle soit toujours non négative et inférieure à $w(t)$. On a donc,

$$w(t^+) = w(t) - c(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i(t^+)u_i(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i(t+1)u_i(t) \geq 0\,,$$

soit aussi

$$\sum_{i=0}^{N}(x_i(t+1) - x_i(t))u_i(t) + c(t) = 0\,. \tag{22}$$

Nous prendrons comme variable de décision

$$\varphi_i(t^+) = \frac{v_i(t^+)}{w(t^+)} = \frac{x_i(t+1)u_i(t)}{\sum_k x_k(t+1)u_k(t)} = \frac{x_i(t+1)u_i(t)}{w(t)-c(t)}$$

la fraction de l'actif i dans le portefeuille *choisie à l'instant* t et concernant le portefeuille juste *après* les transactions de l'instant t. Notons qu'on n'utilisera *jamais* $\varphi(t)$. Donc la notation φ dans des équations dynamiques veut toujours dire $\varphi(t^+)$. En utilisant (4) et, comme précédemment, $\varphi_0 = 1 - \sum_{i=1}^N \varphi_i$ et $\mu_i - \mu_0 = \lambda_i$, il vient

$$w(t+1) = [\mu_0 + \varphi^t(t^+)(\lambda + \Sigma\omega(t))](w(t) - c(t))\,. \tag{23}$$

Critère On admet que l'investisseur a une utilité $U(t,c)$ d'une consommation c à l'instant t. En général, la fonction d'utilité U sera, comme au chapitre précédent, croissante et concave en c, pour traduire l'aversion au risque et/ou l'effet de satiété. La dépendance en t peut être un terme d'actualisation, traduisant une préférence pour une consommation proche à la même consommation différée. On obtiendrait ainsi un critère $J = \mathbb{E}\sum_{t=0}^{T} U(t, c(t))$.

Mais ce critère est encore peu satisfaisant, en ce que l'optimiser conduirait immanquablement à épuiser le portefeuille à l'instant final T. Pour éviter cet effet, on peut soit considérer un horizon infini, en prenant soin d'actualiser les utilités futures, soit ajouter à notre critère un terme, dit d'héritage, valorisant le portefeuille final. C'est ce que nous ferons d'abord à l'aide d'une fonction $H(w)$ sans doute elle aussi croissante concave. (Nous décidons aussi de ne pas consommer à l'instant terminal T, l'utilité d'une éventuelle consommation à cet instant étant incluse dans $H(w(T))$.

On cherchera donc à optimiser le critère

$$J(w(0); \{\varphi(\cdot)\}, \{c(\cdot)\}) = \mathbb{E}\left(H(w(T)) + \sum_{t=0}^{T-1} U(t, c(t))\right) \tag{24}$$

3.1.2 Programmation dynamique

La procédure Pour simplifier les notations, nommons collectivement $(\varphi, c) = \psi$, Nous écrirons $U(t,\psi)$ pour $U(t,c)$, et ré-écrivons (23) sous la forme compacte[4]

$$w(t+1) = f(w(t), \psi(t), \omega(t))\,. \tag{25}$$

Plaçons-nous à l'instant $t = T-1$. Les actions, de gestion et consommation, passées sont ...passées, et l'investisseur n'y peut plus rien. Tout ce qu'il peut faire est de constater l'état du marché et la valeur de son portefeuille et chercher à optimiser les revenus restant à courir, soit en l'occurence $U(T-1, \psi(T-1)) + H(w(T))$. Il doit donc choisir $\psi(T-1)$ selon la prescription

$$\max_{\psi} \mathbb{E}[H(f(w(T-1), \psi, \omega(T-1)) + U(T-1, \psi)]\,.$$

Ce maximum dépend bien-sûr de $w(T-1)$. Donnons un nom à cette dépendance en posant, pour tout w:

$$V(T-1, w) := \max_{\psi} \mathbb{E}\left[H\Big(f(w, \psi, \omega(T-1))\Big) + U(T-1, \psi)\right]\,. \tag{26}$$

Plaçons-nous maintenant à l'instant $T-2$. À nouveau, l'investisseur ne peut plus influencer que le futur, soit les deux dernières consommations et l'héritage. Mais quoi qu'il décide de faire à l'instant présent $T-2$, et quel que soit son avoir à l'instant $T-1$ qui dépendra en outre des aléas de l'instant $T-2$, il sait comment se comporter optimalement à l'instant $T-1$, et surtout *combien lui rapportera* un avoir $w(T-1)$ en termes de consommation future et héritage, ce quel que soit cet avoir, à savoir $V(T-1, w(T-1))$. Il doit donc choisir ses actions selon la prescription

$$\max_{\psi} \mathbb{E}\left[U(T-2, \psi) + V\Big(T-1, f(w(T-2), \psi, \omega(T-2))\Big)\right]\,.$$

À nouveau, paramétrisons cette quantité par $w(T-2)$ en posant pour tout w

$$V(T-2, w) := \max_{\psi} \mathbb{E}\left[V\Big(T-1, f(w, \psi, \omega(T-2))\Big) + U(T-2, \psi)\right]\,.$$

[4]Notons que dans tout ce qui suit, w pourait appartenir à un espace autre que $\mathbb{R}$, et U pourrait dépendre de w.

On voit qu'on peut reproduire le raisonnement en regressant dans le temps. On arrive ainsi à la récurrence suivante :

$$\forall w \geq 0\,, \quad V(t,w) = \max_{\psi} \mathbb{E}_{\omega(t)}\left[V\Big(t+1, f(w,\psi,\omega(t))\Big) + U(t,\psi)\right]\,, \tag{27}$$

initialisée par (26), ou de manière équivalente par

$$\forall w\,, \quad V(T,w) = H(w)\,. \tag{28}$$

Les $\psi = (\varphi, c)$ qui maximisent dans (27) dépendent de w et du temps t. Ceci définit une *stratégie* d'investissement optimale sous la forme $\psi(t) = \Psi^*(t, w(t))$.

Une preuve rigoureuse Nous montrons le théorème suivant :

Théorème 3.1 *S'il existe une fonction $V(\cdot,\cdot)$ satisfaisant la récursion (27)(28), et si $\psi = \Psi^*(t,w)$ désigne un argument du maximum dans (27), cette stratégie est optimale parmi toutes les stratégies causales (c'est à dire ignorant le futur) et la valeur optimale du critère est $V(0,w(0))$.*

Démonstration On donne la démonstration en utilisant librement le formalisme adéquat des probabilités, mais on essayera de donner quelques indications plus intuitives à l'attention des lecteurs peu habitués à ce formalisme.

Rappelons que nous avons fait l'hypothèse que la suite des $\omega(t)$ est *blanche*, c'est à dire que chaque $\omega(t)$ est, comme variable aléatoire, indépendant de tous ceux qui le précèdent.

Soit $\mathcal{F}_t$ la σ-algèbre engendrée par les $\omega(t')$, pour $t' < t$. (La suite de σ-algèbres croissante ainsi engendrée est appelée une *filtration*). Les contrôles admissibles sont ceux qui sont *adaptés* à la suite des $\mathcal{F}_t$, c'est à dire tels que pour tout t, $\psi(t)$ est mesurable sur $\mathcal{F}_t$. (Ne dépend que des événements *antérieurs* à t.) Un feedback d'état $\psi(t) = \Psi(t,w(t))$ est typiquement de cette famille.

Les équations (27) et (28) ensemble constituent l'*équation de Bellman* du problème. Mais l'équation (27) s'écrit aussi

$$\forall (t,w,\psi)\,, \quad 0 \geq \mathbb{E}_{\omega(t)}\left[V\Big(t+1, f(w,\psi,\omega(t))\Big) - V(t,w) + U(t,\psi)\right] \tag{29}$$

avec égalité pour un certain $\psi = \Psi^*(t,w)$.

Précisons que l'espérance dans cette formule est prise à (w,ψ) *fixés*, seul $\omega(t)$ étant pris en tant que variable aléatoire. C'est ce que nous avons rappelé par l'indice $\omega(t)$ au symbole espérance.

Soit donc $\psi(\cdot)$ un processus de contrôle admissible. Il engendre par (25) un processus $w(\cdot)$. Comme (29) est vraie pour tout (t,w,ψ), elle est vraie en particulier à chaque $(w(t),\psi(t))$ de chaque réalisation de ces processus. Or, par définition, pour ces processus, $f(w(t),\psi(t),\omega(t)) = w(t+1)$. On a donc

$$\forall t\,, \forall \omega(\cdot)\,, \quad 0 \geq \mathbb{E}_{\omega(t)}\left[V(t+1, w(t+1)) - V(t,w) + U(t,\psi(t))\right]\,. \tag{30}$$

Maintenant voici le pas important, dont nous allons donner la justification formelle juste après, puis une justification plus simple, mais difficile à étendre au cas continu. C'est ici qu'intervient le fait que les commandes admissibles sont causales. Parce que $\omega(t)$ est indépendant des $\omega(t')$ passés, et qu'au contraire les $(w(t),\psi(t))$ ne dépendent *que* des ω passés, l'espérance *à* (w,ψ) *fixés* (comme dans (29)) évaluée en $(w(t),\psi(t))$, variables aléatoires, est aussi l'espérance conditionnelle conditionnée par le passé. Et donc, son espérance a priori est, comme espérance d'une espérance conditionnelle, l'espérance a priori de la variable aléatoire. Donc, en prenant l'espérance a priori dans (30), et parce que l'espérance d'une variable non négative est non négative,

$$\forall t\,, \quad 0 \geq \mathbb{E}\left[V(t+1, w(t+1)) - V(t,w) + U(t,\psi(t))\right]\,. \tag{31}$$

Voici la formalisation de ce raisonnement. Il repose sur les lemmes suivants.

Lemme 1 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $\mathcal{F}$ une sous-σ-algèbre de $\mathcal{A}$. Soit $Y : \Omega \to \mathcal{Y}$ et $Z : \Omega \to \mathcal{Z}$ deux variables aléatoires, Y mesurable sur $\mathcal{F}$ et Z indépendante de $\mathcal{F}$. Soit $g : \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ une fonction (rélle) mesurable, et, pour tout $y \in \mathcal{Y}$, posons $h(y) := \mathbb{E}g(y, Z)$. Alors, $\mathbb{E}^{\mathcal{F}}(g(Y, Z)) = h(Y)$.*

Lemme 2 *Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{F}} X) = \mathbb{E}X$.*

Il reste juste à appliquer ces lemme avec $\mathcal{F}_t$ pour $\mathcal{F}$, $(w(t), \psi(t))$ pour Y, $\omega(t)$ pour Z, et bien sûr $V(t+1, f(w, \psi, \omega)) + U(t, \psi))$ pour g.

Dans le cas qui nous intéresse, voici une façon de comprendre ce résultat. Nous gardons les notations du lemme (1), mais nous allons préciser les dépendances en ω. Notons ω^- la suite des $\omega(t')$ restreinte aux $t' < t$, P^- sa loi de probabilité, et ω^+ la suite des $\omega(t')$ pour les $t' \geq t$ et P^+ sa loi de probabilité. Le point est que Y ne dépend que de ω^- et Z de ω^+, lesquels sont indépendants. Ainsi, dans le calcul de $\mathbb{E}(g(Y, Z))$, on a, en exploitant l'indépendance de ω^- et ω^+ puis par application du théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(Y, Z)) &= \int g(Y(\omega^-), Z(\omega^+))\,\mathrm{d}P(\omega) = \int g(Y(\omega^-), Z(\omega^+))\,\mathrm{d}P^-(\omega^-)\,\mathrm{d}P^+(\omega^+) \\ &= \int \left[\int g(Y(\omega^-), Z(\omega^+))\,\mathrm{d}P^+(\omega^+) \right] \mathrm{d}P^-(\omega^-) \,. \end{aligned}$$

L'intégrale intérieure de la dernière ligne est $h(Y(\omega^-))$, et l'intégrale extérieure son espérance.

Nous pouvons maintenant finir la démonstration du théorème. Sommons les inégalités (31) de $t = 0$ à $T - 1$. Il vient

$$0 \geq \mathbb{E} \left[V(T, w(T)) - V(0, w(0)) + \sum_{t=0}^{T-1} U(t, c(t)) \right] , \tag{32}$$

soit, en se souvenant de la condition (28) et (24)

$$V(0, w(0)) \geq J(w(0); \{\psi\}) \,.$$

Mais en prenant pour tout t, $\psi(t) = \Psi^*(t, w(t))$, toutes les inégalités deviennent des égalités, y compris, donc, la dernière ci-dessus. Ainsi, pour cette stratégie de commande, J atteint la valeur $V(0, w(0))$ dont nous avons montré juste avant que c'est un majorant des valeurs de J engendrées par des commandes admissibles. Ceci prouve le théorème. ∎

3.1.3 Le cas du critère en puissance fractionnaire

Nous examinons le cas particulier de fonctions d'utilité de forme "Cobb-Douglas":

- $U(t, c) = (p(t))^{1-\theta} c^\theta$,
- $H(w) = \Pi^{1-\theta} w^\theta$,

pour une suite de nombres $p(\cdot)$ et un nombre Π donnés. La puissance $(1 - \theta)$ à ces coefficients (supposés positifs) est là parce qu'elle simplifie les expressions auxquelles nous arriverons, et n'enlève aucune généralité au modèle. (Et comme précédemment, $0 < \theta < 1$.)

Nous appliquons (27) et montrons par récurence qu'il existe une solution de la forme

$$V(t,w) = P(t)^{1-\theta}w^{\theta}\,. \tag{33}$$

Il en est bien ainsi au temps T, avec $P(T) = \Pi$. Supposons donc qu'il en soit ainsi au pas $t+1$. L'application de (27) donne donc

$$V(t,w) = \max_c \max_\varphi \mathbb{E}_\omega \left[P(t+1)^{1-\theta}(\mu_0 + \varphi^t(\lambda+\Sigma\omega))^\theta (w-c)^\theta + p(t)^{1-\theta}c^\theta\right]$$

soit aussi, par linéarité et caractère croissant de l'opérateur $\mathbb{E}$

$$V(t,w) = \max_c \left[P(t+1)^{1-\theta}\left(\max_\varphi \mathbb{E}_\omega[(\mu_0 + \varphi^t(\lambda+\Sigma\omega))^\theta]\right)(w-c)^\theta + p(t)^{1-\theta}c^\theta\right]$$

Posons alors

$$\mathbb{E}_\omega[(\mu_0 + \varphi^t(\lambda+\Sigma\omega))^\theta] =: K_\theta(\varphi) \tag{34}$$

et $\max_\varphi K_\theta(\varphi) = M^{1-\theta}$. (Remarquons que K_θ seul dépend du modèle de marché. Il est donné par L_θ (20) dans le cas d'un modèle à intervalles uniforme, et par (21) dans le cas du modèle empirique. (De $K_\theta(0) = \mu_0^\theta$ on déduit que $M^{1-\theta} \geq \mu_0^\theta$.) Avec ces notations on a donc

$$V(t,w) = \max_c [P(t+1)^{1-\theta}M^{1-\theta}(w-c)^\theta + p(t)^{1-\theta}c^\theta]\,.$$

On note alors le résultat suivant :

Petit lemme *Quelques soient les réels non négatifs p, q, et w, on a*

$$\max_{c\in[0,w]}[p^{1-\theta}c^\theta + q^{1-\theta}(w-c)^\theta] = (p+q)^{1-\theta}w^\theta\,,$$

et le maximum est atteint en

$$c = \frac{p}{p+q}w\,, \quad \text{soit} \quad w-c = \frac{q}{p+q}w\,.$$

En conséquence, on arrive à

$$V(t,w) = (p(t) + P(t+1)M)^{1-\theta}w^\theta\,,$$

soit comme annoncé la forme (33) avec

$$P(t) = P(t+1)M + p(t)\,, \qquad P(T) = \Pi\,. \tag{35}$$

Soit, en posant $p(T) = \Pi$,

$$P(t) = \sum_{k=t}^{T} M^{k-t}p(k)\,. \tag{36}$$

Ainsi donc, on obtient la solution du problème de gestion dynamique de portefeuille en utilités en puissance fractionnaire de la façon suivante :

- Utiliser le modèle de marché pour calculer $K(\varphi)$ donné par (34). (Voir (20) dans le cas d'un modèle de marché à intervalles uniforme, et (21) pour un modèle empirique)

- Rechercher le φ^* qui maximise K. La composition optimale du portefeuille, $\varphi(t^+) = \varphi^*$, est donc constante et indépendante de l'état du marché.[5]

- Évaluer $M = K(\varphi^*)^{1/1-\theta}$

- Utiliser la récurrence linéaire (35) (ou (36)) pour calculer la suite $P(t)$, de $t = T$ à $t = 0$.

- Utiliser la loi de consommation $c^*(t) = (p(t)/P(t))w(t)$.

- Éventuellement, évaluer la valeur optimale du critère : $J(w(0); \varphi^*, c^*) = P(0)^{1-\theta} w(0)^\theta$.

3.1.4 Horizon infini

Programmation dynamique en horizon infini Une autre approche possible de la question de l'héritage est d'optimiser un critère en horizon infini, en valeur actualisée. Considérons donc un critère de la forme

$$J = \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \mu_c^{-t} U(c(t)) , \tag{37}$$

où $\mu_c > 1$ est un facteur d'actualisation. (Qui devra être supérieur à μ_0^θ.) On cherche alors une solution de l'équation de Bellman (privée de sa condition terminale) sous la forme $V(t, w) = \mu_c^{-t} W(w)$. Il vient, après multiplication par μ_c^t

$$W(w) = \max_{c,\varphi} \left[\mu_c^{-1} \mathbb{E}_\omega W \left((\mu_0 + \varphi^t(\lambda + \Sigma\omega))(w - c) \right) + U(c) \right] . \tag{38}$$

On fait en outre l'hypothèse de croissance suivante (qui jouera le rôle d'une condition terminale $V(\infty, w) = 0$):

$$\forall (\varphi(\cdot), c(\cdot)) \text{ admissibles} , \quad \mu_c^{-t} \mathbb{E} W(w(t)) \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to \infty . \tag{39}$$

(Une condition souvent utilisée est que W soit bornée. Mais elle ne convient pas pour l'utilisation que nous voulons faire de cette théorie.)

On procède comme précédemment pour démontrer le théorème :

Théorème 3.2 *S'il existe une fonction $W(.)$ satisfaisant (39), solution de (38) avec $(\varphi, c) = \Psi^*(w)$ comme argument du maximum, alors cette stratégie est optimale parmi toutes les stratégies causales, et la valeur optimale du critère est $W(w(0))$.*

Démonstration La démonstration se fait comme pour le théorème précédent, puis en faisant tendre T vers l'infini dans (32), et en utilisant (39). ▮

Critère en puissance fractionnaire Pour utiliser cette théorie dans le cadre du critère en puissance fractionnaire, nous posons $\mu_c = m^{1-\theta}$, et donc

$$J = \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m^{1-\theta}} \right)^t c^\theta(t) .$$

La condition de croissance (39) sera satisfaite si $m > M$. (Ce qui impose notamment $\mu_c > \mu_0^\theta$.)

[5] ceci ne devrait pas surprendre outre mesure : dans un modèle markovien comme le-nôtre, l'état du marché ne dit rien sur ses *évolutions* ultérieures, lesquelles sont ce qui fait le rendement.

En reportant cette expression dans (38), nous constatons l'existence d'une solution

$$W(w) = \left(\frac{1}{m-M}\right)^{1-\theta} w^{\theta}\,,$$

qui est bien définie et positive sous l'hypothèse $m > M$. La consommation optimale dans ce cas est

$$c^*(t) = \frac{m-M}{m+M} w\,.$$

Donc, comme il est logique, le taux de consommation optimal croit avec le facteur d'actualisation, pour tendre vers 1 quand ce facteur tend vers l'infini : on tend alors à consommer toute la ressource au premier pas de temps.

On remarque que si on pose $P(t) = \mu_c^{-t} Q(t)$ et $\Pi = m^{-T} H$ dans la théorie en horizon fini, on a $Q(0) = (M/m)^T H + (1 - (M/m)^T)/(m-M) \to 1/(m-M)$ quand $T \to -\infty$. C'est à dire que la solution trouvée ci-dessus est bien la limite de la solution non stationnaire quand l'horizon tend vers l'infini.

3.2 Temps continu et modèle de Samuelson : le problème de Merton

3.2.1 Le problème

Le problème de gestion dynamique de portefeuille classique est le "problème de Merton" que nous abordons maintenant. Les notations sont celles du cas discret ci-dessus auquel on renvoie en tant que de besoin.

Le problème de Merton est l'équivalent du problème examiné au paragraphe antérieur, mais en temps continu, dans la fiction donc du "continuous trading", et avec, pour modèle de marché, le modèle de Samuelson en diffusion géométrique, à savoir

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{u_i(t)} = \rho_i \,\mathrm{d}t + \sigma_i \,\mathrm{d}b(t) \tag{40}$$

où, comme auparavant σ_i est une ligne qui encode la volatilité des actifs et leurs corrélations, mais maintenant $b(t)$ est un brownien standard. On devra donc faire attention que pour dériver des quantités où les u_i interviennent de façon non linéaire, il faudra utiliser la formule de Itô. On réservera encore l'indice 0 pour un actif sans risque, qui satisfait donc

$$\mathrm{d}u_0(t) = \rho_0 u_0(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On pose encore $\lambda_i = \rho_i - \rho_0$.

Un portefeuille dynamique est donc donné par la famille des variables $x_i(t)$ représentant le nombre de parts de chaque actif dans le portefeuille. A priori, rien n'oblige ces variables à être continues : l'investisseur pourrait vendre ou acheter un paquet de parts à un instant donné. Ceci étant, on verra que l'optimisation ne nous conduit pas à un comportement de cette nature, mais à une variation continue des $x_i(t)$. Le calcul différentiel qui suit est à comprendre au sens de Itô (ou au sens de Stieltjes quand les variables sont à variations bornées), ce qui n'exclue pas des sauts des $x_i(\cdot)$.

La valeur du portefeuille est comme précédemment $w(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i(t) u_i(t)$. On se permet à chaque instant de faire des transactions $\mathrm{d}x_i$ qui peuvent dégager un excédent $c\,\mathrm{d}t$. On a donc

$$\sum_{i=0}^{N} u_i(t)\,\mathrm{d}x_i(t) + c(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

soit aussi

$$\mathrm{d}w(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i(t)\,\mathrm{d}u_i(t) - c(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

soit en utilisant (40)

$$\mathrm{d}w(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i(t) u_i(t)(\rho_i\,\mathrm{d}t + \sigma_i\,\mathrm{d}b(t)) - c(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

En introduisant la notation $c = \chi w$, les fractions

$$\varphi_i(t) = \frac{x_i(t) u_i(t)}{w(t)}\,,$$

et comme auparavant $\varphi_0 = 1 - \sum_{i=1}^{N} \varphi_i$, et par un calcul analogue à celui du cas discret,

$$\mathrm{d}w(t) = w(t)[(\rho_o + \varphi^t\lambda - \chi)\,\mathrm{d}t + \varphi^t\Sigma\,\mathrm{d}b(t)]\,. \tag{41}$$

Nous considérons encore un critère de la forme

$$J(w(0);\varphi(\cdot),c(\cdot)) = \mathbb{E}\left[H(w(T)) + \int_0^T U(t,c(t))\,\mathrm{d}t\right]\,.$$

3.2.2 Programmation Dynamique

Nous développons une théorie de la programmation dynamique en temps continu extrêment semblable au cas discret, dont nous réutilisons les notations, notamment $\psi := (\varphi, c)$. Soit

$$\mathrm{d}w = f(w,\psi)\,\mathrm{d}t + g(w,\psi)\,\mathrm{d}b(t) \tag{42}$$

une équation dynamique stochastique, et soit à maximiser[6]

$$J(w(0),\psi) = \mathbb{E}\left[H(w(T) + \int_0^T U(t,\psi(t))\,\mathrm{d}t\right]\,.$$

On donne en outre deux définitions:

Définition 2 *Un processus stochastique $\psi(\cdot)$ est dit* causal *s'il est adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ engendrée par le brownien $b(\cdot)$.*

Définition 3 *Une fonction $\Psi(\cdot,\cdot)$ est appelée* feedback admissible *si l'équation différentielle stochastique*

$$\mathrm{d}w = f(w,\Psi(t,w))\,\mathrm{d}t + g(w,\Psi(t,w))\,\mathrm{d}b(t)$$

a une solution au sens de Itô. (Et alors, $\psi(t) = \Psi(t,w(t))$ est causal.)

On introduit l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (ou HJB):

$$\begin{aligned}
&\forall (t,w) \in [0,T]\times\mathbb{R}\,,\\
&\frac{\partial V}{\partial t}(t,w) + \max_{\psi}\left[\frac{\partial V}{\partial w}(t,w) f(w,\psi) + \frac{1}{2}\|g(w,\psi)\|^2 \frac{\partial^2 V}{\partial w^2}(t,w) + U(t,\psi)\right] = 0\,,\\
&\forall w\,,\quad V(T,w) = H(w)\,.
\end{aligned} \tag{43}$$

[6] Rien ci-dessous n'interdirait que U dépendît aussi de w.

Théorème 3.3 *S'il existe une solution $V(\cdot,\cdot)$ de (43) avec un feedback admissible $\psi = \Psi^*(t,w)$ comme argument du maximum en ψ, alors cette stratégie de commande est optimale parmi toutes les stratégies causales, et la valeur optimale du critère est $V(0,w(0))$.*

Démonstration La démonstration est analogue à celle du cas à temps discret. Soit $\psi(\cdot)$ un processus causal, et $w(\cdot)$ le processus engendré depuis $w(0)$ par (42). Il est aussi adapté à la filtration. En mettant ces $w(t)$ et $\psi(t)$ dans (43), il vient pour tout t et tout ω :

$$F(t) := \\ \frac{\partial V}{\partial t}(t,w(t)) + \frac{\partial V}{\partial w}(t,w(t))f(w(t),\psi(t)) + \frac{1}{2}\|g(w(t),\psi(t))\|^2\frac{\partial^2 V}{\partial w^2}(t,w(t)) + U(t,\psi(t)) \le 0.$$

Posons $W(t) = V(t,w(t)) + \int_0^t U(t',\psi(t'))\,\mathrm{d}t'$. Par application de la formule de Itô, il vient

$$\mathrm{d}W(t) = F(t)\,\mathrm{d}t + G(t)\,\mathrm{d}b(t)\,,$$

où

$$G(t) := \frac{\partial W}{\partial w}(t,w(t))g(t,w(t),\psi(t))$$

est adapté à la filtration. De cette dernière remarque découle que l'intégrale stochastique

$$\int_0^t G(t')\,\mathrm{d}b(t')$$

définit une martingale, et en particulier est d'espérance nulle pour tout t. (Cette affirmation est l'équivalent en temps continu des deux lemmes utilisés en temps discret.) En conséquence, il vient

$$\mathbb{E}[W(T) - W(0)] = \mathbb{E}\left[V(T,w(T)) - V(0,w(0)) + \int_0^T U(w(t),\psi(t))\,\mathrm{d}t\right] = \mathbb{E}\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t \le 0\,, \tag{44}$$

d'où, en utilisant la condition terminale de (43) sur V,

$$J(w(0);\psi(\cdot)) \le V(0,w(0))\,.$$

À nouveau, si la commande ψ est choisie comme coincidant à chaque instant avec $\Psi^*(t,w(t))$, choix adapté à $\mathcal{F}_t$ et admissible par hypothèse, les inégalités sont remplacées par des égalités, de sorte qu'alors la valeur du critère atteint son majorant $V(0,w(0))$. ∎

3.2.3 Application au problème de Merton avec utilités en puissance fractionnaire

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman devient ici (en réutilisant la notation $S := \Sigma\Sigma^t$)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{\varphi,\chi}\left[\frac{\partial V}{\partial w}(\rho_0 + \varphi^t\lambda - \chi)w + \frac{w^2}{2}\varphi^t S\varphi\frac{\partial^2 V}{\partial w^2} + U(t,\chi w)\right] = 0\,.$$

Reprenons des modèles d'utilité à la Cobb-Douglas : $H(w) = \Pi^{1-\theta}w^\theta$ et $U(t,c) = p(t)^{1-\theta}c^\theta$. (En prenant $p(t)$ de la dimension de l'inverse d'un temps, Π et P seront sans dimension.) Nous allons montrer qu'il existe une solution de cette EDP de la forme

$$V(t,w) = P(t)^{1-\theta}w^\theta\,. \tag{45}$$

Il en est bien ainsi au temps T avec $P(T) = \Pi$. Reportons (45) dans l'EDP. Il apparaît un terme w^θ en facteur, et après multiplication par $P^\theta w^{-\theta}$, il reste (les termes en φ et χ se séparent) :

$$(1-\theta)\dot{P} + \theta P \max_{\varphi}\left[\rho_0 + \varphi^t\lambda - \frac{1-\theta}{2}\varphi^t S\varphi\right] + \theta P \max_{\chi}\left[-\chi + \left(\frac{p}{P}\right)^{1-\theta}\frac{\chi^\theta}{\theta}\right] = 0\,.$$

On voit alors que le maximum en est atteint en

$$\varphi^* = \frac{1}{1-\theta}S^{-1}\lambda\,, \qquad \chi^* = \frac{p}{P}\,,$$

c'est à dire que comme dans le cas discret on trouve un φ^* constant et indépendant du marché, et la même formule pour $c^*(t) = \frac{p(t)}{P(t)}w(t)$. En reportant et en ré-utilisant la notation $\gamma = \lambda^t S^{-1}\lambda$, il vient finalement

$$\dot{P} + \frac{\theta}{1-\theta}\left(\rho_0 + \frac{\gamma}{2(1-\theta)}\right)P + p = 0\,, \quad P(T) = \Pi\,, \tag{46}$$

qui s'intègre, en posant $\hat{\rho} = \theta((1-\theta)\rho_0 + \gamma/2)/(1-\theta)^2$, en

$$P(t) = \exp(\hat{\rho}(T-t))\Pi + \int_t^T \exp(\hat{\rho}(s-t)p(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{47}$$

soit, par exemple, si $p(t)^{1-\theta} = \rho_0^{1-\theta}\exp[\rho_0(T-t)]$, et en posant $\zeta := \gamma\theta/2(1-\theta)^2$,

$$P(t) = \mathrm{e}^{\hat{\rho}(T-t)}\left[\Pi + \frac{\rho_0}{\rho_0+\zeta}\left(\mathrm{e}^{(\rho_0+\zeta)(T-t)} - 1\right)\right]\,.$$

On peut donc résumer ainsi le procesus de détermination du portefeuille optimal

- Déterminer le φ^* optimal par la formule[7] $\varphi^* = \frac{1}{1-\theta}S^{-1}\lambda$.
- Déterminer $P(t)$ en intégrant l'équation différentielle (46) de $t = T$ à $t = 0$, ou avec (47)
- Calculer la consommation optimale $c^*(t) = (p(t)/P(t))w(t)$.
- Éventuellement, évaluer la valeur optimale du critère : $J(w(0); \varphi^*, c^*) = P(0)^{1-\theta}w(0)^\theta$.

Le cas d'un seul actif risqué Regardons le cas $N = 1$, $\theta = 1/2$. On a alors $\varphi^* = 2\lambda/\sigma^2$.

Comme dans le cas comparable en temps discret, cette formule donne une fraction risquée du portefeuille croissante avec le rendement relatif λ de cet actif, et décroissante avec sa volatilité σ. (Les formules ne sont néanmoins pas tout à fait comparables, parce que σ est homogène, dans le cas discret, à l'inverse d'un temps, et dans le cas continu à l'inverse de la racine carrée d'un temps.) On notera que φ^* est aussi croissant quand θ se rapproche de 1, c'est à dire que l'investisseur devient de moins en moins averse au risque.

[7] On notera que *comme dans la théorie de Markowitz*, le vecteur des φ^* est colinéaire au vecteur $S^{-1}\lambda$, le coefficient de proportionnalité ne dépendant que de l'aversion au risque.

3.2.4 Horizon infini

Équation de Shapley On peut, comme dans la théorie en temps discret, traiter le problème de l'héritage en prenant un critère en horizon infini, de la forme

$$J = \mathbb{E} \int_0^\infty \exp(-\rho_c t) U(c(t))\, \mathrm{d}t\,.$$

On cherche une solution de l'équation (43) (sans sa condition terminale) de la forme $V(t,w) = \exp(-\rho_c t) W(w)$. Après multiplication par $\exp(\mu_c t)$, il vient

$$\forall w \in \mathbb{R}\,, \quad -\rho_c W(w) + \max_\psi \left[W'(w) f(w,\psi) + \frac{1}{2} \|g(w,\psi)\|^2 W''(w) + U(\psi) \right] = 0\,. \qquad (48)$$

On impose en outre une condition de croissance

$$\forall (\varphi(\cdot), c(\cdot)) \text{ admissibles}\,, \quad \exp(-\rho_c t) \mathbb{E} W(w(t)) \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to \infty\,. \qquad (49)$$

On démontre comme précédemment le théorème :

Théorème 3.4 *S'il existe une fonction satisfaisant (49) solution de (48) avec un feedback admissible $\psi = \Psi^*(w)$ comme argument du maximum, alors cette stratégie est optimale parmi toutes les stratégies causales, et la valeur optimale du critère est $W(w(0))$.*

Démonstration On cherche une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman de la forme $V(t,w) = \exp(-\rho_c t) W(w)$. Puis on fait tendre T vers l'infini dans (44) et on utilise la condition (49). ∎

Critère en puissance fractionnaire Prenons maintenant comme critère à optimiser

$$J = \mathbb{E} \int_0^\infty \exp(-\rho_c t) c^\theta(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

où à nouveau le choix $\rho_c = \rho_0$ serait logique.

Un calcul facile montre que l'équation (48) admet la solution $W = (\chi^*)^{\theta-1} w^\theta$, $c^* = \chi^* w$, avec

$$\chi^* = \frac{1}{1-\theta} (\rho_c - \theta \rho_0) + \zeta\,.$$

Remarquons que si $\rho_c = \rho_0$, cette quantité est bien positive et on trouve $\chi^* = \rho_0 + \zeta$, dont il est facile de vérifier que c'est bien la limite de $p(0)/P(0)$ quand $T \to \infty$ dans le problème en horizon fini avec le choix de $p(t)^{1-\theta} = \rho_0^{1-\theta}$.

On remarque ausi que χ^* est croissant avec ρ_c, et tend vers l'infini avec lui. Si on actualise beaucoup, on tend à épuiser au plus vite la ressource. Aussi, χ^* est croissant avec λ : si on s'attend à ce que l'actif croisse vite, on peut en consommer une plus grande proportion, et décroissant avec S, par précaution contre le risque de baisse. Et χ^* croit également avec θ, c'est à dire quand l'aversion au risque diminue.