Théorie de la réalisation.

1) Cas général non linéaire.

Un système stationnaire strictement causal est vu comme une "boîte" qui transforme une suite d'entrées $\{u(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ en une suite de sorties $\{y(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$, de façon stationnaire (i.e. invariante par changement d'origine des temps) et telle que $y(t)$ ne dépend que de $u(t-1), u(t-2), \dots$

En conséquence, le système est entièrement spécifié par la fonction, ~~qui~~ indépendante de t, qui associe $y(t)$ à $u(t-1), u(t-2), \dots$, étant entendu que si on veut connaître $y(t-1)$, par exemple, il suffit d'appliquer la même fonction à $u(t-2), u(t-3), \dots$. Ci-dessous, on appelle f cette fonction. On a ainsi la définition:

DEFINITION 1. Un système stationnaire strictement causal est défini par

- un ensemble d'entrées (ou inputs) U
- un ensemble de sorties (ou outputs) Y
- une fonction f de U^* dans Y, où

  U^* est le monoïde libre constitué des suites finies d'éléments de U, doté de l'opération de concaténation notée "." [ ] On écrira aussi $U^* = \Omega$.
  [et comprenant la chaîne vide Λ comme élément neutre]

DEFINITION 2. A un système, on associe la fonction initialisation $\bar f$, de Ω dans l'ensemble $\Sigma = Y^\Omega$ des systèmes, de la façon suivante

$$\bar f : \Omega \to \Sigma \quad : \quad \omega \mapsto \left(f_\omega(\cdot) \quad : \quad \omega' \mapsto f_\omega(\omega') = f(\omega.\omega') \right)$$

On dit que $f_\omega(\cdot)$ est le système initialisé par ω.

DÉFINITION 3. On appelle réalisation d'un système f une factorisation de la forme

$$\bar f = \overset{\text{in}}{h} \circ g, \quad \text{où} \quad g : \Omega \to X, \qquad h : X \to \Sigma$$

X étant un ensemble intermédiaire appelé espace d'états.

La ~~factorisation~~ réalisation est dite canonique si g est surjective et h est injective

REMARQUE 1 : sans l'exigence de canonicité, le concept de réalisation est assez trivial. Deux réalisations particulières (non canoniques) étant

i) $X = \Omega$, $g = Id$, $h = \bar{f}$ (pas injective en général)

ii) $X = \Sigma$ $g = \bar{f}$, $h = Id$ (pas surjective en général).

PROPOSITION 1 : A toute réalisation est associée une <u>représentation interne</u> du système, i.e. une représentation ~~interne~~ de f de la forme

(1) $x(t+1) = \varphi(x(t), u(t))$ $\qquad x(t_0) = g(\cancel{\Lambda}) = x_0$

(2) $y(t) = \eta(x(t))$.

et réciproquement.
Cette représentation est unique si la réalisation est canonique.

DEMONSTRATION. ~~Nous allons construire~~ Remarquons d'abord qu'une représentation interne de la forme (1)(2) engendre bien une réalisation, donnée par X = l'espace où x prend ses valeurs

$$g((u(t_0), u(t_0+1), \ldots, u(t-1))) = x(t)$$

$h(x(t))$ = le même système, mais initialisé en $x(t)$.

Réciproquement, étant donnée ~~(1) (2)~~ une ~~factorisation~~ réalisation considérons, pour $u \in U$ fixé, l'application σ_u de Ω dans lui-même ~~suivante~~ : $\sigma_u(\omega) = \omega . u$.

Nous construisons alors une carte $\varphi(x, u)$ de X dans X, telle que le diagramme ci-dessous commute, ~~ce qui est possible car tous les antécédents d'un x donné dans le haut du diagramme ont une image commune par f̄ota~~.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rr, "\bar f"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddd, "\sigma_u"'] & & \Sigma \\
& X \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "\varphi"] & \\
& X \arrow[dr, "h"] & \\
\Omega \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\bar f"'] & & \Sigma
\end{tikzcd}$$

Soit $x \in X$ (pris dans la factorisation "du haut" du diagramme), s'il n'a pas d'antécédent dans Ω, on fixe $\varphi(x, u)$ arbitrairement. S'il a des antécédents, ce qui est toujours le cas si la réalisation est canonique, ils ont tous même image dans Σ par $\bar{f}$, à savoir $h(x)$. En conséquence les $\sigma_u(\omega)$ ~~ont~~ correspondants ont aussi même image dans Σ par $\bar{f}$, car $f_{\sigma_u(\omega)}(\omega') = f(\omega . u . \omega') = f_\omega(u.\omega')$, ors les f_ω sont identiques. Etant dans l'image de Ω par $\bar{f}$, ces $f_{\sigma_u(\omega)}$ a des antécédents dans X (dans la factorisation "du bas"), et l'un quelconque peut être choisi pour être $\varphi(x,u)$. Si la réalisation est canonique, cet antécédant est unique, car h est injective, et alors φ est toujours spécifiée de manière unique. On prendra $x_0 = g(\Lambda)$.

On prend aussi $\eta(x) = f(\omega)$, pour $\omega \in g^{-1}(x)$, ceci est bien indépendant du choix de ω car on a aussi $\eta(x) = h(x)(\Lambda)$. ∎

REMARQUE: une réalisation canonique correspond à une représentation interne

- complètement accessible, au sens où tous les états x peuvent être atteints par (1), puisque g est surjective,
- complètement observable, au sens où, si (1) est considérée initialisée en deux états différents, il existe toujours une expérience (un choix ω) qui permet de les distinguer (d'obtenir des sorties différentes), puisque h est injective.

On a donc bien une définition "naturelle".

THÉORÈME 1. Tout système admet une réalisation canonique, et toutes les réalisations canoniques sont isomorphes, au sens où, si (X_1, g_1, h_1) et (X_2, g_2, h_2) sont deux réalisations canoniques, il existe une bijection i de X_1 dans X_2 telle que $g_2 = i \circ g_1$, et $h_2 = h_1 \circ i^{-1}$.

DEMONSTRATION. Nous introduisons la définition importante suivante:

DÉFINITION 4: deux éléments ω_1 et ω_2 de Ω sont dits équivalents au sens de Nerode, ce qui sera noté $\omega_1 \sim_f \omega_2$, si et seulement si

$$\forall \omega \in \Omega, \quad f(\omega_1 . \omega) = f(\omega_2 . \omega)$$

C'est à dire, $\bar{f}(\omega_1) = f_{\omega_1}(\cdot) = f_{\omega_2}(\cdot) = \bar{f}(\omega_2)$.

Une réalisation canonique est alors donnée par
$X = \Omega / \sim_f$, l'ensemble des classes d'équivalence de Nerode,
$g : \omega \mapsto [\omega]_f$ la classe d'équivalence de ω
$h : x \mapsto f_\omega$ pour $\omega \in x$, qui est bien indépendante du choix de ω

On vérifie immédiatement que cette réalisation est bien canonique.

Soient maintenant deux réalisations canoniques : (X_1, g_1, h_1) et $(X_2, g_2, h_2$
On a donc deux factorisations de la carte $\bar{f}$, et le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "h_1"] & \\ \Omega \arrow[ur, "g_1"] \arrow[rr, "\bar{f}"] \arrow[dr, "g_2"'] & & \Sigma \\ & X_2 \arrow[ur, "h_2"'] & \end{tikzcd}$$

Soit x_1 appartenant à X_1. Nous allons montrer qu'il existe un et un seul $x_2 = i(x_1)$ appartenant à X_2 tel que le diagramme "rempli" avec la flèche i de X_1 vers X_2 commute toujours (à l'aide du lemme de remplissage de Zieger). Puisque g_1 est surjective, x_1 a des antécédants dans Ω, qui ont tous $h_1(x_1)$ comme image par $\bar{f}$. $h_1(x_1)$ étant dans l'image de Ω par $\bar{f}$, il a ~~des~~ un antécédant par h_2 dans X_2, unique car h_2 est injectif. Cet antécédent est $i(x_1)$.

De même, il existe une carte unique j de X_2 dans X_1 telle que le diagramme commute toujours. Mais alors $h_2 \circ j \circ i \circ g_2 = \bar{f} = h_2 \circ g_2$. Comme h_2 est injective, $j \circ i \circ g_2 = g_2$, et comme g_2 est surjective, $j \circ i =$ Identité.
De même $j \circ i =$ identité, et donc i est bijective et $j = i^{-1}$. ∎

En conclusion, toute réalisation canonique constitue une représentation des classes d'équivalence de Nerode, qui donnent l'information qu'il faut avoir sur le passé du système pour décrire complètement son comportement futu

2) Le cas linéaire.

On suppose maintenant que U et Y sont des espaces vectoriels. On munit Ω d'une structure d'espace vectoriel de la façon suivante : étant donnés deux éléments ω et ω' de Ω, on complète le plus court à gauche par autant de zéros qu'il est nécessaire pour que les deux aient même longueur $|\omega|$. Alors $\lambda\omega + \lambda'\omega'$ est défini comme dans la structure canonique de $U^{|\omega|}$.

On suppose que f est linéaire. Le système est alors dit linéaire.

On introduit alors une nouvelle carte, plus simple que $\bar{f}$, qui consiste à ne "regarder" le système après l'application de ω que pour des entrée nulles. Soit donc Γ l'ensemble des suites infinies d'éléments de Y, et f^* définie de la façon suivante :

(3) $f^* : \Omega \longrightarrow \Gamma : \omega \longmapsto f^*(\omega) = (f(\omega), f(\omega.0), f(\omega.00), \dots)$

f^* est encore linéaire. Notons $(\omega)_f$ la classe d'équivalence de ω modulo $\operatorname{Ker} f^*$. On a le fait important suivant :

PROPOSITION 1 : $\forall \omega \in \Omega, \quad (\omega)_f = [\omega]_f$.

DEMONSTRATION. Clairement, si $\omega_1 \sim_f \omega_2$, on a, en particularisant aux chaînes de zéro, $\omega_1 \equiv \omega_2 \mod \operatorname{Ker} f^*$. Réciproquement supposons qu'on ait cette dernière égalité, soit $f^*(\omega_1 - \omega_2) = 0$. Formons, pour $\omega \in \Omega$ quelconque

$$f(\omega_1 \cdot \omega) - f(\omega_2 \cdot \omega) = f((\omega_1 - \omega_2) \cdot (0 \cdots 0)) \in f^*(\omega_1 - \omega_2) = 0,$$

et donc $\omega_1 \sim_f \omega_2$. ∎

En conséquence, la définition d'une réalisation peut être simplifiée en factorisant f^* au lieu de $\bar{f}$, ce qui maintenant revient au même. Le caractère injectif de h coïncide avec la définition classique de l'observabilité.

Les classes d'équivalence de Nerode étant maintenant identifiées à des classes d'équivalence modulo un sous espace vectoriel, on sait que $\Omega/\sim_f$ a une structure canonique d'espace vectoriel, pour laquelle on vérifie immédiatement que la réalisation canonique du théorème d'existence est linéaire, ainsi que les cartes φ et η ~~des~~ la ~~réalisation~~ représentation interne associée.

En outre, pour deux réalisations linéaires, la carte i du théorème d'unicité est linéaire.

Nous nous limitons dorénavant au cas de dimension finie, ~~soit~~ $U = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^p$, $X = \mathbb{R}^n$. (Remarquons que Ω et Γ sont de dimension infin

les deux premières conditions sont des données du système. La troisième peut ~~être~~ ou ne pas ~~être~~ vérifiée suivant les données. Rappelons comment se pose le problème :

PROBLÈME Soit $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices $p \times m$ existe-t-il trois matrices H, F et G, de type $p \times n$, $n \times n$ et $n \times m$ respectivement, telles que

$$A_i = H F^{i-1} G.$$

Si oui, quelle est la plus petite dimension n pour laquelle cela est possible.

On peut énoncer les résultats suivants.

THÉORÈME 2 Il existe une réalisation ~~de~~ dimension finie si et seulement si le rang de la matrice de Hankel $\mathcal{H}$ du système, définie par

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots \\ A_2 & A_3 & A_4 & \cdots \\ A_3 & A_4 & A_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

est fini, et ce rang est la dimension des réalisations minimales

THÉORÈME 3 : une réalisation (H, F, G) est minimale si et seulement si elle est canonique (i.e. complètement accessible et complètement observable).
~~Toutes~~ La réalisation minimale est unique à un changement de base près.

DEMONSTRATIONS. Le deuxième théorème est une conséquence immédiate du théorème d'unicité général, auquel on adjoint la remarque que deux espaces vectoriels de dimension finie isomorphes ont même dimension (donc toutes les réalisations canoniques ont même dimension) et le fait qu'on a déjà démontré : une réalisation minimale est nécessairement canonique.

Le premier théorème découle du fait que la matrice de Hankel est la matrice de l'application ~~$(\ldots u(-2), u(-1), u(0)) \longrightarrow (y(1), y(2))$~~

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ u(-1) \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(-1) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Or, h étant injective, X et $f^*(\Omega) = h(X)$ ont même dimension. Donc si $\operatorname{rang} \mathcal{H} = \dim f^*(\Omega) = n < \infty$, alors $\dim X = n < \infty$, et réciproquement. ∎

REMARQUES : le caractère nécessaire de la condition $\operatorname{rang} \mathcal{H} < \infty$ découle directement de la remarque suivante :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots \end{bmatrix}$$

(ceci n'est d'ailleurs que la transcription matricielle de la factorisation $f^* = h \circ g$)
Le caractère suffisant découle aussi de l'algorithme que nous allons donner pour retrouver H, F et G à partir de $\mathcal{H}$.

Nous allons montrer que la théorie générale montrant l'existence d'une représentation interne donne le moyen concret de la trouver. Nous savons déjà qu'elle est linéaire, i.e. que

$$\varphi(x,u) = Fx + Gu,$$
$$\eta(x) = Hx.$$

et que x doit être une paramétrisation des classes d'équivalence des inputs modulo le noyau de l'application

$$y = \mathcal{H}\omega.$$

Supposons que $\mathcal{H}$ soit de rang n fini. (On remarquera que dans tout ce qui suit, les calculs peuvent être faits avec une restriction finie de $\mathcal{H}$, pourvu qu'elle soit de rang n) Selectionnons n lignes independantes de $\mathcal{H}$. Elles constituent une matrice à n lignes qu'on peut écrire $S\mathcal{H}$ où S est une matrice de selection (formée de 1 et de 0)

De manière classique, posant

$$\omega = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(-1) \\ u(-2) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

nous choisissons de paramétriser les classes d'équivalences modulo $\operatorname{Ker}\mathcal{H}$

par

$$[\omega] \simeq S\mathcal{H}\omega.$$

$[\omega]$ est alors bien un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
La carte H agissant sur $[\omega]$ doit redonner ~~$y(1)$~~

$$y(1) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots \end{pmatrix} \omega = S_p\mathcal{H}\omega.$$

(S_p est la matrice de selection des p premières lignes). Or, puisque $\mathcal{H}$ est de rang n, toutes ses lignes sont des combinaisons linéaires de celles de $S\mathcal{H}$. Il existe donc bien une matrice H telle que

$$S_p\mathcal{H} = HS\mathcal{H},$$

d'où

$$H[\omega] = y(1).$$

La carte F sera obtenue en formant le diagramme commutatif du théorème d'existence de la representation interne, pour $u = 0$. σ_0 est le simple décallage. Donc F fait passer de $[\omega]$ à $[\omega.0]$, soit de

$$[\omega] = S\mathcal{H}\begin{pmatrix} u(0) \\ u(-1) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{à} \quad S\mathcal{H}\begin{pmatrix} 0 \\ u(0) \\ u(-1) \\ \vdots \end{pmatrix} = F[\omega]$$

~~Du fait de la structure de la matrice de Hankel, on peu~~
Introduisons donc le décallage à gauche de la matrice de Hankel.

$$\sigma\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A_2 & A_3 & \cdots \\ A_3 & A_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

On voit que

$$\mathcal{H}(\omega.0) = (\sigma\mathcal{H})\omega.$$

Mais du fait de la structure de matrice de Hankel, $\sigma\mathcal{H}$ est également la matrice décallée vers le haut. Donc $S(\sigma\mathcal{H})$ est un ensemble de n lignes de $\mathcal{H}$, qui, à nouveau, sont toutes des combinaisons linéaires de celles de $S\mathcal{H}$. Il existe donc une matrice F telle que

$$S(\sigma\mathcal{H}) = FS\mathcal{H},$$

d'où $\qquad [\omega.0] = F[\omega].$

Finalement, la carte G sera obtenue en regardant le diagramme commutatif pour l'action de u, c'est à dire en regardant ~~$[\omega.u]$~~

$$[\omega.u] = S\mathcal{H}\begin{pmatrix} u \\ u(0) \\ u(-1) \\ \vdots \end{pmatrix} = S\left(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} u + \sigma\mathcal{H}\omega\right) = Gu + F[\omega].$$

Donc on a directement

$$G = S\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = S\mathcal{H}S^m = \text{le premier bloc colonne de } S\mathcal{H}.$$

où S^m est la matrice qui selectionne les m premières colones de $\mathcal{H}$.

Vérifions que les matrices H, F et G ainsi définies soient bien une réalisation (i.e. que $A_i = HF^{i-1}G$). Tout d'abord, puisque H agissan sur les lignes de $S\mathcal{H}$ donne $S_p\mathcal{H}$, en prenant la première colonne dans cette egalité, on a bien $HG = A_1$. Considerons ensuite $HF^kS\mathcal{H}$. F décale les lignes de $S\mathcal{H}$ d'un bloc vers la gauche. Elles restent donc des lignes de $S\mathcal{H}$ (mais tronquées à gauche) et donc les actions successives de F continuent de décaler d'un bloc à gauche. Et l'actio de H agissant sur les lignes de $S\mathcal{H}$ redonnant $HS\mathcal{H} = S_p\mathcal{H}$, il vient

$$HF^{k-1}S\mathcal{H} = [A_k \; A_{k+1} \; \cdots]$$

soit en prenant la première colonne bloc :

$$HF^{k-1}G = HF^{k-1}S\mathcal{H}S^m = A_k .$$

☆ ⟶

GORITHME DE SILVERMAN

Pour calculer H, F et G, il suffit donc d'isoler n colonnes indépendantes de $S\mathcal{H}$, qui forment une matrice inversible M, les même colonnes, dans la première ligne bloc forment une matrice L, et on a

$$H = LM^{-1}.$$

En décalant les colonnes d'un bloc vers la droite, ~~M donne~~ par rapport à celles de M, on obtient une matrice $\bar{M}$, et on a

$$F = \bar{M} M^{-1}$$

et G se lit directement dans la première colonne bloc de $S\mathcal{H}$. (En fait, il peut être numériquement préférable de travailler avec plus de n colonnes, en résolvant $\begin{pmatrix} HM \\ FM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ \bar{M} \end{pmatrix}$ aux moindres carrés).

Il faut terminer par quelques remarques

- il existe d'autres algorithmes numériques pour calculer une réalisation du type B.L.HO (plus robuste) ou du type RISSANEN (moins de calculs, récursif). Ils sont fondés sur la factorisation de la matrice de Hankel

- la théorie linéaire de dimension infinie a été faite par AUBIN et BENSOUSSAN. La difficulté technique est dans le choix des bons espaces U et Ω (en temps continu) pour que X soit simple.

- On peut remarquer que la notion de factorisation de la relation d'entrée-sortie est liée à celle de réalisation même en non stationnaire. En effet, soit

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

☆ ⟶

Une façon plus compacte d'exprimer ce dernier argument est la suivante. ~~On sait que~~ (due à Fauvre-Clerget-Germain). On a

$$S\sigma\mathcal{H} = FS\mathcal{H}\ ,\ S_p\mathcal{H} = HS\mathcal{H},\quad G = S\mathcal{H}S^m.$$

On remarque que

$$\mathcal{H} = [\,\mathcal{H}S^m \mid \sigma\mathcal{H}\,]$$

d'où $\quad S\mathcal{H} = [\,S\mathcal{H}S^m \mid S\sigma\mathcal{H}\,] = [\,G \mid FS\mathcal{H}\,] = [\,G \mid F\,\cancel{S\mathcal{H}S^m} \mid \cancel{S\sigma\mathcal{H}}$

☆ ⟶

Une façon plus compacte d'exprimer ce dernier argument (due à Fauvre-Clerget-Germain) est la suivante. On sait que

$$S\sigma\mathcal{H} = FS\mathcal{H} \quad \text{et} \quad S\mathcal{H}S^m = G$$

Remarquons en outre que

$$\mathcal{H} = [\,\mathcal{H}S^m \mid \sigma\mathcal{H}\,]$$

il vient

$$S\mathcal{H} = [\,S\mathcal{H}S^m \mid S\sigma\mathcal{H}\,] = [\,G \mid FS\mathcal{H}\,] = [\,G \mid F[\,G \mid FS\mathcal{H}\,]\,] = \dots$$

et en itérant

$$S\mathcal{H} = [\,G \mid FG \mid F^2G \ \cdots\,]$$

« On devrait être puni pour avoir inventé une [illegible] ! »

Ivar Ekeland

Il ne reste qu'à appliquer $\quad S_p\mathcal{H} = HS\mathcal{H}$ pour obtenir le résultat

$$[\,A_1 \mid A_2 \mid A_3 \dots\,] = [\,HG \mid HFG \mid HF^2G \ \dots\,].$$

un système linéaire non stationnaire. Supposons que

$$h(t,\tau) = A(t)\,B(\tau)$$

on a la ~~relation~~ représentation interne suivante :

$$\dot{x} = B(t)\,u \quad , \quad x(t_0) = 0$$
$$y = A(t)\,x$$

Réciproquement, étant donnée une réalisation

$$\dot{x} = F(t)\,x + G(t)\,u$$
$$y = H(t)\,x \,,$$

on peut faire le changement de ~~variables~~ base variable

$$\hat{x}(t) = \Phi(t_0,t)\,x(t)$$

pour obtenir la forme précédente. Ou plus simplement, on peut remarquer q.

$$h(t,\tau) = H(t)\,\Phi(t,\tau)\,G(\tau) = \left[H(t)\,\Phi(t,t_0)\right]\left[\Phi(t_0,\tau)\,G(\tau)\right] = A(t)\,B(\tau$$

Une théorie algébrique des systèmes non-stationnaires a été ~~récemment~~ élaborée par E. SONTAG.

Matrices de transfert et fractions matricielles.

1) Rappels d'algèbre.

1.1) Matrices polynomiales.

Une matrice polynomiale $A(z)$ est une matrice dont chaque élément est un polynôme, ou, de manière équivalente, un polynôme dont les coefficients sont des matrices.

Sur une matrice polynomiale, on définit les opérations élémentaires de ligne :

i) Échange de deux lignes

ii) multiplication d'une ligne par un nombre quelconque,

iii) ~~addition~~ à une ligne du produit d'une autre par un polynôme quelconque

On définit de même les opérations de colonne.

Etudions rapidement les formes intéressantes sous lesquelles on peut amener une matrice polynomiale par ces opérations élémentaires. Limitons nous d'abord à des opérations élémentaires de ligne.

Par permutation, on amène en position (1,1) le terme de plus bas degré, non nul, de la première colonne. Pour chaque autre ligne, on calcule le quotient de son terme de première colonne par le terme (1,1), puis on retranche à cette ligne la première multipliée par ce quotient. On obtient ainsi dans la première colonne les restes de ces divisions polynomiales, puis on recommence le processus. Comme le terme (1, 1) verra son degré diminuer strictement à chaque fois, ce processus est fini. On ne s'arête que quand il n'y a plus que des zeros sous le premier terme de la première colonne. Par un produit on ramène à 1 le coefficient du terme de plus haut degré du nouveau polynome (1,1). On dit qu'on l'a rendu "monique".

On peut répéter la même opération avec le terme (2,2) et les termes situés en dessous de lui dans la deuxième colonne. Ceci ne détruit pas les zeros de la première colonne. Quand on a terminé on peut encore remplacer le ~~terme (1,2)~~ premier terme de la deuxième colonne par le ~~quotient~~ reste de la division de ce terme par le nouveau terme (2,2). Et on continue ainsi, soit jusqu'à la dernière colonne, soit jusqu'à la colonne de rang égal au nombre de lignes. La forme obtenue s'appelle la forme de Hermite de la matrice : triangulaire supérieure, avec, pour les colonnes de rang inférieur ou égal au nombre de ligne, les termes non nuls de degré inférieur à celui du terme diagonal.

En combinant maintenant des opérations de ligne et de colonne, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 1. Par des opérations élémentaires de ligne et de colonne, on peut amener toute matrice polynomiale sous la <u>forme de Smith</u> ; $S(z) = \mathrm{diag}[\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)]$ (si la matrice est rectangulaire les lignes ou colonnes supplémentaires sont nulles), où les $\varphi_i(z)$ sont moniques, et $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$ (lire : φ_i divise φ_{i+1}). La suite des φ_i est unique, et est caractérisée par $\varphi_i = D_i / D_{i-1}$, où $D_0 = 1$, et $D_i(z)$ est le p.g.c.d. des mineurs d'ordre i de A. (Les φ_i sont appelés les polynomes invariants de $A(z)$)

DÉMONSTRATION. On procède comme pour la forme de Hermite pour la première colonne. Puis par des opérations de colonnes, on fait de même pour la première ligne. Ce faisant on détruit la forme de la première colonne. On recommence donc, etc. Le terme $(1,1)$ baissant à chaque fois de degré, le processus est fini et s'arête quand ce terme est le seul non nul dans la première ligne et la première colonne. On cherche alors dans le reste de la matrice un terme que ne divise pas le terme $(1,1)$. On additionne sa colonne à la première colonne (ce qui ne change pas le terme (1.1)) et on recommence. A nouveau, comme le degré du terme $(1,1)$ continue de décroitre, ce processus est fini, et s'arête quand les première ligne et colonne sont nulles sauf le terme $(1,1)$, celui-ci divisant tous les termes restant de la matrice (il peut bien sur être égal à 1). On le rend monique. Puis on recommence avec la matrice privée de la première ligne et de la première colonne. Comme le terme $(1,1)$ divisait tous les termes de cette sous matrice, il divise le terme avec lequel on finit en position $(2,2)$, et ainsi de suite.

On est bien arrivé à la forme diagonale avec $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$. Il reste à vérifier que ~~d'apr~~ les opérations élémentaires ne modifient pas le pgcd ~~des~~ mineurs de la matrice, et donc la formule $\varphi_i = D_i / D_{i-1}$ peut se vérifier directement sur la forme

$\Leftarrow$ 603, Cours 2001

Il reste à prouver l'unicité des ψ_k, et au passage le fait que $\psi_k = \dfrac{\mathcal{D}_k}{\mathcal{D}_{k-1}}$, $\mathcal{D}_k$ = pgcd des mineurs d'ordre k. Parlons de matrices $p \times m$.

Remarquons que la forme $A = U[\Psi \ 0]V$ ou $A = U\begin{bmatrix}\Psi\\0\end{bmatrix}V$ montre que les racines $\zeta_1, \zeta_2 \dots$ des ψ_k sont les valeurs de ζ pour lesquelles le rang de $A(\zeta)$ sur $\mathbb{C}$ est inférieur à $n = \min(p, m)$. Plus précisément, on voit que le nombre de ψ_i qui s'annulent en ζ_k est le défaut de rang de $A(\zeta_k)$, disons δ_k. Or ces quantités, les ζ_k et les δ_k sont manifestement des propriétés intrinsèques de $A(\zeta)$, qui ne doivent rien au choix des matrices U et V. Formons le tableau ci-dessous

$$\begin{array}{cccc}
\zeta-\zeta_1 & & & \\
\zeta-\zeta_1 & \zeta-\zeta_2 & & \\
\zeta-\zeta_1 & \zeta-\zeta_2 & & \\
\vdots & \vdots & & \zeta-\zeta_l \\
\zeta-\zeta_1 & \zeta-\zeta_2 & \cdots & \zeta-\zeta_l
\end{array}
\quad \text{complété en} \quad
\left.\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 1 \\
\vdots & 1 & 1 \\
\zeta-\zeta_1 & \vdots & \\
\zeta-\zeta_1 & \zeta-\zeta_2 & 1 \\
\vdots & \vdots & \zeta-\zeta_3 \\
\zeta-\zeta_1 & \zeta-\zeta_2 & \zeta-\zeta_3
\end{array}\right\} n \text{ produits en ligne}$$

où $\zeta_1 \dots \zeta_l$ sont tous les ζ pour lesquels rang $A < n$, et chaque colonne (en $\zeta-\zeta_k$) a une hauteur de δ_k. Formons les produits en ligne en complétant toutes les colonnes par des 1 au-dessus jusqu'à une hauteur n. Les n produits obtenus sont les ψ_i. Il n'y a pas d'autre façon de faire des polynômes qui se divisent en chaîne, qui n'aient, parmi eux, que les ζ_l pour racines, et tels que δ_k d'entre eux ait ~~chaque~~ ζ_k pour racine. D'où l'unicité des ψ_i.

(sauter cela) Enfin, notons qu'en ζ_k, tous les mineurs d'ordre $> n-\delta_k$ sont nuls, donc tous ont $\zeta-\zeta_k$ en facteur. Tous ont aussi les $\zeta-\zeta_j$ pour tous les j tels que $\delta_j > \delta_k$.

$\simeq$ Donc ~~$(\zeta-\zeta_1)\cdots(\zeta-\zeta_{k-1})\cdots(\zeta-\zeta_1)\cdots(\zeta-\zeta_k)$ est un diviseur des mineurs~~

$(\zeta-\zeta_k)$ est un diviseur des $\mathcal{D}_i$, ~~$i<k$ (plus ... ordre)~~ $i > n-\delta_k$

La liste des degrés d_i des Ψ_i se déduit par "dualité de comptage" de la liste des δ_k.

Remarquons que pour une matrice carrée, $\det A = \prod_i \psi_i$. Considérons une sous matrice carrée M de dimension $i \times i$ de A. Pour tous les k tels que $n-\delta_k < i$ elle est singulière en ζ_k, et son défaut de rang est $i-n+\delta_k$. Elle a donc $\zeta-\zeta_k$ dans ce nombre là de ses facteurs invariants. En se référant au tableau ci-dessus, on voit qu'on obtient tous les facteurs premiers de ses facteurs invariants en prenant les i premières lignes du table. Qui plus est, pour tout autre ζ, il y a des sous matrices carrées $i \times i$ non singulières. Il n'y a donc pas d'autres racines communes à tous les déterminants $i \times i$ dans A. On a donc montré que le pgcd de ces déterminants est $\prod_k \psi_k$ $k \le i$.

La preuve d'unicité des φ_i exploite plus finement le théorème suivant.

Corollaire Soit $A(z)$ de type $p \times m$ et $n = \min\{p, m\}$. La matrice $A(z)$ est de rang n sur $\mathbb{C}$ pour tout z si et seulement si ses facteurs invariants sont tous 1.

Théorème Les $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels $\operatorname{rg} A(z) < n$ sont les zéros des facteurs invariants de A. Le défaut de rang correspondant à chaque zéro est le nombre de facteurs invariants qu'il annule.

diagonale, où elle est évidente. Mais cela établit aussi l'unicité des φ_i. ∎

Remarquons que les opérations élémentaires, de ligne et de colonne, correspondent à des pré ou post multiplications par des matrices faciles à écrire, qui toutes ont leur déterminant constant, i.e. indépendant de z. Une telle matrice est dite unimodulaire, et il faut insister sur la propriété suivante.

PROPOSITION 1: Le fait pour une matrice polynomiale d'être unimodulaire est équivalent au fait d'avoir une inverse polynomiale.

PREUVE. Si le déterminant est constant, la formule de Cramer nous montre que l'inverse est polynomiale. Réciproquement, si $U(z)$ est polynomiale et a son inverse polynomiale, on a $\det U^{-1}(z) = [\det U(z)]^{-1} =$ polynome. Or un polynome ne peut avoir un polynome pour inverse que s'il est constant ∎.

$\cancel{U(z)\,U^{-1}(z) = I \Longrightarrow \det U(z) \cdot \det(U^{-1}(z)) =}$

Ainsi le théorème 1 peut être réécrit :

THÉORÈME 1bis. Pour toute matrice polynomiale $A(z)$, il existe des matrices unimodulaires $U(z)$ et $V(z)$ (de type convenable) telles que l'on ait

$$A(z) = U(z)\,\Psi(z)\,V(z)$$

où $\Psi(z)$ est la forme de Smith de $A(z)$ donnée au théorème 1.

On pourra aussi, changeant de notation, écrire $\Psi = UAV$, ou $\Psi V = UA$, etc... Toutes les matrices écrites restant polynomiales.

DEFINITION 1. Deux matrices ayant la même forme de Smith sont dites équivalentes.

REMARQUE 1. Une matrice unimodulaire (donc carrée) a l'identité pour forme de Smith. Toutes les matrices unimodulaires peuvent être obtenues en combinant des opérations élémentaires de ligne et de colonne.

En effet, si ~~det~~ A est unimodulaire, $A = A\,I\,I$ est une forme de Smith. Et comme on peut obtenir cette forme de Smith par des opérations élémentaires de ligne et de colonne (en plus [illegible]) U et V, on a bien $A = UV$.

1.2.) Division matricielle, matrices rationnelles.

On considère maintenant des matrices dont chaque terme est une fraction rationnelle. En réduisant tous les termes au même dénominateur, on pourra l'écrire

$$H(z) = \frac{1}{\alpha(z)} K(z)$$

où K est polynomiale. Mettant K sous forme de Smith, puis simplifiant éventuellement les facteurs communs entre les φ_i et α, il vient finalement

$$H(z) = U(z)\left[\mathrm{diag}\left(\frac{\beta_1(z)}{\alpha_1(z)}, \frac{\beta_2(z)}{\alpha_2(z)}, \dots, \frac{\beta_n(z)}{\alpha_n(z)}\right)\right] V(z)$$

où $\beta_i(z) \mid \beta_{i+1}(z)$ et $\alpha_{i+1}(z) \mid \alpha_i(z)$. Cette forme est dite forme de Smith-MacMillan de la matrice.

Etant donnée une matrice rationnelle, on peut toujours effectuer les quotients et écrire chacun de ses termes comme un polynome ~~(eve)~~ plus une fraction rationnelle strictement propre, i.e. telle que le degré du numérateur soit inférieur à celui du dénominateur. On peut ainsi décomposer la matrice en la somme de sa partie polynomiale, et de sa partie strictement propre, souvent notée $[H(z)]_-$. Cette décomposition est clairement unique.

En effectuant les longues divisions, on peut en outre représenter chaque terme de $[H(z)]_-$ par une série entière en z^{-1}, conduisant ainsi à une représentation de la matrice de la forme

$$H(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} A_k z^{-k}.$$

Les puissances positives de z constituent la partie polynomiale, et les puissances négatives la partie strictement propre.

$\star$ ⟶

On veut maintenant trouver l'équivalent matriciel de la division entre polynomes. Soient $A(z)$, de type $p \times p$, et $B(z)$ de type $p \times n$, deux matrices polynomiales. Supposons en outre que $A(z)$ soit régulière, i.e

Pour justifier la manipulation des formes développées en série des fractions rationnelles on fait de la façon suivante. On se place dans l'espace des séries formelles (~~vectorielles ou scalaires~~) <u>finies à gauche</u> :

$$a(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k z^{-k}$$

où k_0 peut être positif ou négatif. Manifestement les polynomes appartiennent à cet espace, qui est muni de l'addition et de la multiplication ordinaires. (On s'apperçoit facilement que si les coefficients appartiennent à un corps $\mathbf{K}$, par exemple $\mathbb{R}$, alors cet espace de séries, noté $\mathbf{K}[[z]]$, est encore un corps).

Certaines séries, dont les coefficients satisfont une relation de récurrence, satisfont une relation de la forme

$$a(z)\, q(z) = p(z)$$

où $p(z)$ et $q(z)$ sont des polynomes. Elles sont alors appelées <u>rationnelles</u>. On convient alors d'écrire

$$a(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

et manifestement toutes les règles de calcul ordinaires s'appliquent. Enfin, on voit qu'on peut retrouver les coefficients de $a(z)$ en effectuant la longue division (division suivant les puissances décroissantes) de p par q

Ainsi, il convient de considérer une matrice de transfert comme une matrice de séries formelles, rationnelles quand le système est de dimension finie.

que $\det A(z)$ n'est pas identiquement nul. Alors la matrice $A^{-1}(z)$ est une matrice rationnelle, ainsi que la matrice

$$H(z) = A^{-1}(z)\,B(z).$$

Décomposons la donc en partie polynomiale $Q(z)$ et strictement propre $S(z)$, puis multiplions ~~au~~ à gauche par $A(z)$ en posant $A(z)S(z) = R(z)$. On obtient le théorème de division matricielle :

THÉORÈME 2 Etant donnée la matrice polynomiale carrée régulière $A(z)$ et la matrice polynomiale $B(z)$ (ayant autant de lignes), il existe deux matrices polynomiales $Q(z)$ et $R(z)$, définies de manière unique, telles que

$$B(z) = A(z)Q(z) + R(z)$$

et

$$A^{-1}(z)\,R(z) \text{ est strictement propre.}$$

PREUVE. Il ne reste qu'à vérifier que $R(z)$ est bien polynomiale, ce qui est une conséquence immédiate de $R = B - AQ$. ∎

La deuxième condition remplace la condition sur les degrés de la division polynomiale ordinaire.

On a énoncé ici le théorème de division à gauche. Il existe évidemment le théorème de division à droite entre matrices ayant le même nombre de colonnes : $C(z)$ et $D(z)$ carrée régulière, de la forme

$$C(z) = Q(z)D(z) + R(z)$$
$$R(z)D^{-1}(z) \text{ est strictement propre.}$$

Ayant défini la notion de division matricielle, on peut aborder celle de matrices premières entre elles. On dira que les matrices polynomiales $A(z)$ et $B(z)$, de types respectifs $p\times m$ et $p\times n$, ont un facteur commun gauche s'il existe une matrice carrée polynomiale $C(z)$, et deux matrices polynomiales $\bar{A}(z)$ et $\bar{B}(z)$ telles que

$$A(z) = C(z)\bar{A}(z) \quad \text{et} \quad B(z) = C(z)\bar{B}(z).$$

On ne peut pas demander que deux matrices (ayant même nombre de lignes) n'aient pas de facteur commun gauche. En effet, pour tout $C(z)$ unimodulaire, on a des égalités de ce type, avec $\bar{A} = C^{-1}A$ et $\bar{B} = C^{-1}B$, encore polynomiales. On pose donc la définition suivante :

DEFINITION 2. Deux matrices polynomiales (ayant même nombre de ligne) sont dites <u>premières entre elles à gauche</u> si tout facteur commun gauche est unimodulaire. On a une définition analogue pour des matrices premières entre elles à droite.

On remarquera que si A est carrée régulière, on aura

$$A^{-1}(z)B(z) = \bar{A}^{-1}(z)\bar{B}(z)$$

mais si $C(z)$ n'est pas unimodulaire, degré $\det \bar{A}$ < degré $\det A$. En ce sens, on a bien simplifié la fraction matricielle $A^{-1}B$.

THÉORÈME 3. Les propositions suivantes sont équivalentes.

i) $A(z)$ et $B(z)$ sont premières entre elles à gauche (A de type $p \times m$ et B $p \times n$)

ii) la forme de Smith de $[A\ B]$ est $[I\ 0]$

iii) rang $[A(z)\ B(z)] = p \quad \forall z \in \mathbb{C}$

iv) il existe deux matrices polynomiales $P(z)$ et $Q(z)$ telles que

$$A(z)P(z) + B(z)Q(z) = I.$$

PREUVE. Nous montrons

$$\begin{array}{c} i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i). \\ \Downarrow \quad\quad \\ iii) \quad\quad \end{array}$$

Nous faisons la première démonstration dans le cas où A est carrée. Dans les autres cas il faut partitionner A ou B pour faire apparaître un bloc carré à gauche, et partitionner V en conséquence. Le reste de la preuve est inchangé.

i) ⇒ ii) ~~Supposons donc que~~ Ecrivons donc la forme de Smith de $[A\ B]$.

$$[A \quad B] = U[\Psi \quad 0]\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

ceci donne $\quad A = U\Psi V_{11}, \quad B = U\Psi V_{12}$.

Donc $U\Psi$ est un facteur commun gauche[1] Donc si A et B sont premières entre elles à gauche $\det U\Psi =$ constante. Or $\det U =$ constante et $\det \Psi = \prod_{i=1}^{p} \psi_i$. les ψ_i sont donc tous constants, et égaux à un puisque moniques.

ii) ⇔ iii) Pour étudier l'indépendance des lignes de $[A \quad B]$, étudions l'équation

$$\xi'[A \quad B] = 0.$$

Si $\Psi = I$, cette equation s'écrit $[\xi' U \quad 0]V = 0$. Comme pour tout ζ, $\det V \neq 0$, cela implique $\xi' U = 0$, soit puisque $\det U \neq 0$, $\xi' = 0$. Donc cette equation n'a de solution non nulle pour aucun ζ. Au contraire, si l'un des ψ_i a une racine ζ_0. En choisissant ξ' tel que $\xi' U$ soit une ~~ligne~~ ligne de zeros, avec un 1 en i^{me} position, on a bien ~~$\xi'[A(\zeta)$~~

$$\xi'[A(\zeta_0) \quad B(\zeta_0)] = 0.$$

ii) ⇒ iv). Si la forme de Smith de $[A \quad B]$ est $[I \quad 0]$, on a :

$$[A \quad B]\begin{bmatrix} V^{11} & V^{12} \\ V^{21} & V^{22} \end{bmatrix} = [U_{\xi} \quad 0]$$

soit $\quad A V^{11} + B V^{21} = U$, ou, en posant $P = V^{11}U^{-1}$ et $Q = V^{21}U^{-1}$, qui sont bien polynomiales car U est unimodulaire

$$A(\zeta)P(\zeta) + B(\zeta)Q(\zeta) = I.$$

C'est l'identité de Bezout.

iv) ⇒ i). Supposons que l'identité de Bezout soit satisfaite, et soit $C(\zeta)$ un facteur gauche commun à A et B. Il vient

$$C(\zeta)\left(\bar{A}(\zeta)P(\zeta) + \bar{B}(\zeta)Q(\zeta)\right) = I$$

---

[1] [illegible] $= I[I \quad 0]V$

soit $\det C(z) \times \det(\bar{A}P + \bar{B}Q)(z) = 1$, ~~et~~ donc $\det C(z) =$ constante.

Il existe d'autres tests, parfois récents, pour vérifier si deux matrices sont premières entre elles. Ceux-ci nous suffiront. En théorie, l'algorithme de division matricielle permet de extraire les facteurs communs de deux matrices polynomiales données. La forme de Smith le fait aussi : dans un sens, le facteur $U\Psi$ mis en évidence est "le plus grand commun diviseur", car V_{11} et V_{12} sont premières entre elles.

Il nous reste à introduire un dernier concept, qui a été inventé pour la théorie des systèmes. C'est celui de matrice polynomiale carrée ligne réduite (ou ligne propre) ou colonne réduite (ou colonne propre). Il a été introduit pour pouvoir tester, sans faire le calcul d'inverse, la condition $A^{-1}R$ strictement propre ou RD^{-1} strictement propre, simplement en comparant des degrés de polynômes.

Supposons que $S = A^{-1}R$ soit strictement propre. Alors, en écrivant $R = AS$, on voit immédiatement que le degré de chaque terme de R est inférieur au plus haut degré présent dans la même ligne de A. Définissons donc le degré d'une ligne (ou le degré d'une colonne) d'une matrice polynomiale comme le plus haut degré présent dans les termes de cette ligne (cette colonne).

DÉFINITION 3. Une matrice polynomiale carrée est dite ligne réduite si la matrice des coefficients des termes de plus haut degré de chaque ligne est inversible. (~~Elle est dite colonne réduite~~) Soit d_i le degré de la ligne i, on a toujours degré $\det A \le \sum d_i$, avec égalité si et seulement si la matrice est ligne réduite. (ce qui constitue une définition équivalente).

On définit de même une matrice colonne réduite.

PROPOSITION 2. On peut toujours amener une matrice polynomiale sous forme ligne réduite par des opérations élémentaires de lignes. De même, on peut toujours y arriver par des opérations ~~du même coté~~ élémentaires de colonnes.

On laisse le lecteur vérifier la première affirmation. La seconde est donnée par la forme de Hermite colonne.

On peut de même faire la réduction de colonne par des opérations de colonne, et aussi par des opérations de ligne.

REMARQUE la mise d'une matrice sous forme ligne réduite ou colonne réduite ne change pas ~~[illegible]~~ son déterminant.

PROPOSITION 3 Etant donnée une matrice polynomiale carrée ligne réduite $A(z)$, et une matrice polynomiale $R(z)$ ayant même nombre de lignes, la matrice $A^{-1}(z)R(z)$ est strictement propre si et seulement si chaque ligne de la matrice R a un degré inférieur à celui de la ligne de même rang de la matrice A.

(d_k le degré de la ligne k de A, $k = 1, \dots, p$.)

PREUVE. La condition nécessaire a déjà été montrée. (même si A n'est pas ligne réduite.) Soit A_0 la matrice (constante) des termes de plus haut degré des lignes, et $Z(z) = \mathrm{diag}\,[z^{d_1}, z^{d_2}, \dots, z^{d_p}]$. On a

$$A(z) = Z(z)\,A_0 + \tilde{A}(z) = Z(z)\left[I + Z^{-1}(z)\tilde{A}(z)A_0^{-1}\right]A_0\,,$$

où la matrice $\tilde{A}(z)$, et donc aussi

$$\hat{A}(z) = \tilde{A}(z)\,A_0^{-1}$$

a des degrés de ligne inférieurs aux d_i. Il ~~est~~ en est aussi ainsi de $R(z)$ par hypothèse. Donc $Z^{-1}\hat{A}(z)$ et $Z^{-1}R(z)$ sont strictements propres. Or on a

$$A^{-1}(z)R(z) = A_0^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(-Z^{-1}(z)\hat{A}(z)\right)^k\right]Z^{-1}(z)\,R(z)$$

d'où le résultat.

On a bien sur le résultat analogue pour les colonnes :

PROPOSITION 3 bis. Etant donnée une matrice polynomiale carrée colonne réduite $D(z)$, et une matrice polynomiale $R(z)$ ayant même nombre de colonnes, la matrice $R(z)D^{-1}(z)$ est strictement propre si et seulement si chaque colonne de la matrice $R(z)$ a un degré inférieur à celui de la colonne de même rang de la matrice $A(z)$.

1.3) Matrice caractéristique.

Etant donnée une matrice réelle ~~F~~ carrée A, on appelle matrice caractéristique de F la matrice polynomiale $\zeta I - A$

PROPOSITION 4. Etant données deux matrices réelles carrées A et A_1, leurs matrices caractéristiques sont équivalentes si et seulement si A et A_1 sont semblables. (i.e, il existe une matrice constante U_0 telle que $A_1 = U_0^{-1} A U_0$).

PREUVE. Supposons qu'il existe deux matrices unimodulaires $U(\zeta)$ et $V(\zeta)$ telles que

$$U(\zeta)(\zeta I - A_1) = (\zeta I - A) V(\zeta).$$

Effectuons les divisions matricielles suivantes.

$$U(\zeta) = (\zeta I - A) U_1(\zeta) + U_0,$$
$$V(\zeta) = V_1(\zeta)(\zeta I - A_1) + V_0.$$

D'après la règle de la proposition 3, U_0 et V_0 sont des matrices constantes. En reportant dans la première expression, en multipliant par $(\zeta I - A)^{-1}$ à gauche et $(\zeta I - A_1)^{-1}$ à droite, il vient

$$U_1(\zeta) + (\zeta I - A)^{-1} U_0 = V_1(\zeta) + V_0 (\zeta I - A_1)^{-1},$$

soit, en égalant les parties strictement propres

$$(\zeta I - A)^{-1} U_0 = V_0 (\zeta I - A_1)^{-1}.$$

On remultiplie par $(\zeta I - A)$ à gauche et $(\zeta I - A_1)$ à droite, et on compare les termes de degré un pour identifier U_0 à V_0.

La réciproque est évidente. ■

COROLLAIRE ~~Ainsi~~, les facteurs invariants de $(\zeta I - F)$, encore appelés facteurs invariants de F constituent un ensemble complet d'invariants pour F sous l'action de groupe de similitude. C'est la base de la façon la plus simple d'établir les divers formes "canoniques" sous lesquelles peut ~~ent~~ être transformée une matrice par changement de base : identifier les facteurs invariants. On laisse le lecteur montrer l'existence de la forme de Jordan (en décomposant les facteurs invariants en produits de monômes, appelés les <u>diviseurs élémentaires</u>).

Remarquons que la ~~matrice~~ forme "compagnon", sous laquelle on sait que peut se mettre toute matrice cyclique :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

a pour facteurs invariants 1, $n-1$ fois, et un seul facteur non trivial :

$$\psi(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

ce qui est donc la caractéristique des matrices cycliques.
(On amènera la première colonne en dernière position, puis par des opérations de lignes, entre lignes successives du haut en bas on supprime les z de la diagonale, sauf le dernier, qui apparaît dans $z+\alpha_1$. On a alors une diagonale de -1 une dernière ligne inchangée, et une dernière colonne $(z, z^2, \ldots, z^{n-1}, \alpha_n)'$. Il ne reste plus qu'à mettre des zeros aux $n-1$ premières positions de la dernière ligne par des opérations de ligne utilisant le -1 de chaque colonne, et enfin de manière symétrique à mettre des zeros aux $n-1$ premières positions de la dernière colonne. Il reste bien $\psi(z)$ en bas et à droite.)

La matrice $(zI-F)$ a un déterminant de degré n. Donc pour chaque facteur invariant de degré $n_i < n$, il faut $n_i - 1$ facteurs unité, pour que le produit soit de degré n. A chacun des ensembles ainsi réunis de facteurs invariants on peut associer un bloc compagnon du type ci-dessus. On a ainsi démontré que par un changement de base, toute matrice réelle peut se ramener sous la forme d'une matrice compagnon par blocs, où les blocs sont de taille croissante, et $\psi_i \mid \psi_{i+1}$.

Cette forme (la deuxième forme naturelle) correspond à une interprétation géométrique interessante. (Cf Gantmacher)

Le dernier ~~poly~~facteur invariant est le polynome ~~annulateur~~ minimal de F. Si on cherche ~~le~~ un sous espace cyclique(*) de dimension maximale de F, on voit immédiatement qu'il ne peut être d'une dimension superieure au degré de ce polynome. Le fait interessant est qu'il y a des sous espaces cycliques de cette dimension. Soit $\mathcal{V}_1$ l'un d'entre eux. Il est invariant par F. On peut donc considerer l'action de F sur $\mathbb{R}^n/\mathcal{V}_1$, ou, de manière équivalente, trouver $\mathcal{W}_1 \subset \mathbb{R}^n$, ~~tel~~ invariant par F, tel que $\mathbb{R}^n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{W}_1$, et considerer l'action de F sur $\mathcal{W}_1$. On reproduit le même raisonnement. La succession des polynomes annulateurs ainsi mise en évidence est la suite des ψ_i. (Comme la forme compagnon permet de le verifier, avec pour générateurs cycliques, les vecteurs $g_i = (0\ 0 \cdots 0\ 1)'$) Le fait qu'ils se divisent entre eux peut être retrouvé ~~pour~~ le fait que le polynome minimal ~~annulateur~~ de F est un polynôme annulateur pour la restriction de F à $\mathcal{W}_1$, et est donc un multi~~plicateur~~ du polynome minimal de cette restriction.

Remarquons enfin que le plus grand facteur invariant ψ_n, qui est, nous l'avons dit, le polynome minimal de F (la forme compagnon le montre) est aussi le p.p.c.m des dénominateurs de $(\zeta I - F)^{-1}$, comme la forme de Smith de $(\zeta I - F)$ le montre. (On peut le voir aussi en appliquant la règle de Cramer et la definition $\psi_n = D_n / D_{n-1}$.)

Remarquons que dans le cas monovariable u scalaire, la paire (F, G) est complètement commandable si et seulement si F est cyclique ($\mathbb{R}^n$ pour plus grand espace cyclique) et G est un generateur cyclique. La forme compagnon ~~est~~ correspondante est alors appelée forme canonique commandable.

On peut naturellement introduire des blocs compagnons transposés, qui sont naturels à introduire pour étudier le caractere complètement observable d'une paire (H, F).

(*) i.e. engendré par un vecteur g de $\mathbb{R}^n$ et ses transformés successifs par F : $Fg, F^2g, \dots$ }

2. Réalisation de matrices rationnelles, formes fraction matricielle.

2.1) Réalisation polynomiale abstraite

Soit $\mathcal{H}(z)$ une matrice rationnelle strictement propre, donnée sous la forme

(1) $\mathcal{H}(z) = P(z)Q^{-1}(z)R(z)$,

où $P(z), Q(z), R(z)$ sont des matrices polynomiales, Q de type $q \times q$:

$$P(z) \in \mathbb{R}^{p\times q}[z], \quad Q(z) \in \mathbb{R}^{q\times q}[z], \quad R(z) \in \mathbb{R}^{q\times m}[z].$$

Remarquons qu'on peut mettre toute matrice rationnelle sous cette forme, de manière banale en sortant ~~le~~ plus petit commun multiple $\alpha(z)$ de tous les dénominateurs et en écrivant

$$\mathcal{H}(z) = (\alpha(z)I)^{-1}B(z) = B(z)(\alpha(z)I)^{-1}.$$

On peut faire un peu mieux en gardant la matrice à inverser diagonale, en sortant, à gauche, les dénominateurs commun par ligne, ou à droite ceux par colonne.

On va proposer une réalisation naturelle de la forme (1) ci-dessus, fondée sur la factorisation de la carte f^* introduite en (3) dans la théorie générale de la réalisation. En terme de transformées en z, f^* s'écrit :

$$f^* : \quad \omega(z) \longmapsto \gamma(z) = [\mathcal{H}(z)\omega(z)]_-$$

où $\omega(z) \in \Omega = \mathbb{R}^m[z]$ est un vecteur polynomial à m composantes, $\gamma(z) \in \Gamma = \mathbb{R}^p[[z]]$ est une série formelle en z^{-1} vectorielle à p composan[tes]

et $[\ ]_-$ désigne la partie strictement propre.

Introduisons l'espace

$$X = \mathbb{R}^q[z]/Q$$

des classes d'équivalences de vecteurs polynomiaux à q composantes modulo
C'est à dire que $p_1(z)$ et $p_2(z)$ appartiennent à la même classe s'il existe un vecteur polynomial $p(z)$ tel que

$$p_1(z) = p_2(z) + Q(z)\,p(z).$$

En particulier, dans ce cas les parties (strictement) propres des produits par Q^{-1} coïncident

$$[Q^{-1}(z)\,p_1(z)]_- = [Q^{-1}(z)\,p_2(z)]_-$$

et $p_1(z)$ et $p_2(z)$ auront même reste après division par $Q(z)$.

On désignera par $[p(z)]_Q$ la classe d'équivalence de $p(z)$ modulo Q.
La factorisation de f^* est alors la suivante :

$$f^* = g \circ h, \qquad g(\omega) = [R(z)\,\omega(z)]_Q,$$

$$h(x) = [P(z)\,Q^{-1}(z)\,q(z)]_- \quad \text{pour } q(z) \in x.$$

$h(x)$ est bien indépendant du choix de $q(z)$ dans x, puisque la partie polynomiale de $Q^{-1}q$ ne contribue qu'à des termes polynomiaux dans $PQ^{-1}q$.

~~On peut alors montrer le théorème suivant~~. Remarquons alors le résultat suivant :
~~THEORÈME 4. La réalisation ci-dessus est~~

PROPOSITION 5. $\dim X = \mathrm{deg}\,\det Q(z)$.

PREUVE. Remarquons d'abord que si $U(z)$ et $V(z)$ sont unimodulaires,
$\mathbb{R}^q(z)/Q(z) \sim \mathbb{R}^q(z)/U(z)Q(z)V(z)$, (espaces isomorphes), comme on le vérifie facilement par le fait que $p_1 \sim_Q p_2 \Leftrightarrow Up_1 \sim_{UQV} Up_2$ ce qui engendre un isomorphisme canonique associant $[p]_Q$ et $[Up]_{UQV}$.

On peut donc, pour calculer la dimension de X, prendre $Q(z)$ sous forme de Smith.

$$U(z)Q(z)V(z) = \mathrm{diag}\,[q_1(z), \dots, q_q(z)]$$

avec $d^\circ q_i(z) = k_i$, $\quad \sum k_i = \text{degré} \det Q(z)$.

En représentant la classe $[p]_Q$ par le reste de la division de p par Q, on voit que ces restes sont des vecteurs dont la coordonnée i est de degré inférieur à k_i, et donc définie par k_i coefficients. D'où le résultat annoncé. ∎

On obtient alors le théorème suivant.

THÉORÈME 4. La réalisation ci-dessus est

i) complètement accessible si et seulement si Q et R sont premières entre elles à gauche,

ii) complètement observable si et seulement si P et Q sont premières entre elles à droite.

Montrons d'abord les caractères suffisants. Supposons que Q et R sont premières entre elles à gauche. Donc il existe des matrices polynomiales A et B telles

$$Q(z)A(z) + R(z)B(z) = I$$

Soit $p(z)$ quelconque dans $\mathbb{R}^q[z]$. Alors $\omega(z) = B(z)p(z) \in \Omega$, et en multipliant l'identité de Bezout à droite par $p(z)$, on voit que

$$R(z)\omega(z) ~~R(z)\omega(z)~~ = p(z) - Q(z)A(z)p(z)$$

soit $\quad g(\omega(z)) = [p(z)]_Q$

et donc g est surjective.

De même, supposons que P et Q sont premières entre elles à droite, et écrivons l'identité de Bezout correspondante:

$$A(z)P(z) + B(z)Q(z) = I.$$

Soit $x \in X$ tel que $h(x) = 0$, c'est à dire

$$p(z) \in x \Rightarrow [P(z)Q^{-1}(x)p(z)]_{-} = 0.$$

Donc $PQ^{-1}p = q$ est polynomial. En multipliant l'identité de Bezout à droite par $Q^{-1}p$, il vient

$$r(z) = A(z)q(z) + B(z)p(z) = Q^{-1}(z)p(z)$$

soit $\qquad p(z) = Q(z)r(z) \quad , \quad r(z)$ polynomiale,

et donc $p(z) \sim_Q 0$, soit $x = 0$. Donc h est injective.

Passons au caractère nécessaire. Supposons que Q et R ne sont pas première entre elles à gauche. Alors, considérons la matrice rationnelle

$$\mathcal{H}_R(z) = Q^{-1}(z)R(z) = \bar{Q}^{-1}(z)\bar{R}(z)$$

avec degré $\det \bar{Q}$ < degré $\det Q$. ~~En applic~~ Elle est du type (1) ci-dessus, avec $P = I$, ~~et donc~~ En appliquant la construction ci-dessus avec la forme $IQ^{-1}R$, on obtient une réalisation de dimension n = degré $\det Q$, où h est injective, car I est première avec Q. Mais en appliquant cette construction à la forme $I\bar{Q}^{-1}\bar{R}$, on obtient une réalisation de dimensio degré $\det \bar{Q}$ inférieure à n. Donc la carte g de la première réalisation n'était pas surjective, or c'est la même que la carte g introduite pour réaliser $\mathcal{H} = PQ^{-1}R$. Cette ~~première~~ réalisation n'était donc pas complètement accessible.

On fait de même pour l'observabilité, en utilisant $\mathcal{H}_P = P(z)Q^{-1}(z)$. ■

Un corollaire immédiat est le critère de POPOV et HAUTUS :

THÉORÈME 4bis.

i) la paire (F, G) est complètement accessible si et seulement si les matrices $zI - F$ et G, sont premières entre elles à gauche, ou, de manière équivalente si et seulement si $\text{rang}\,[zI-F \;\; G] = n$, $\forall z \in \mathbb{C}$, ou encore si et seulement si F n'a pas de vecteur propre gauche orthogonal à toutes les colonnes de G.

ii) la paire (H, F) est complètement observable si et seulement si les matrices $(zI - F)$ et H sont premières entre elles à droite, ou, de manière équivalente si et seulement si

$$\text{rang}\begin{bmatrix} H \\ zI-F \end{bmatrix} = n, \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

ou encore si et seulement si F n'a pas de vecteur propre dans le noyau de H

DÉMONSTRATION. (H, F, G) est une réalisation de $\mathcal{H}(z) = H(zI-F)^{-1}G$ de dimension $n = \text{degré}\det(zI-F)$. Il suffit d'appliquer le théorème précédent, en identifiant H à P, $zI-F$ à Q et G à R pour obtenir la première caractérisation de chaque alinéa. Les autres en découlent en utilisant le théorème 3 de ce chapitre.

EXERCICE : Retrouver la troisième caractérisation des alinéas i) et ii) du théorème par des arguments élémentaires sur les équations d'état.

2.2. ~~Formes fractions matricielles~~ et Réalisation polynomiale concrète

Des formes particulièrement intéressantes sont celles où dans (1), l'une des matrices $P(z)$ ou $Q(z)$ ~~est~~ réduite à l'identité. On obtient alors ce qu'on appelle les formes fraction matricielle, gauche :

(2) $\qquad \mathcal{H}(z) = A^{-1}(z)\,B(z)$

Nous explicitons une forme plus concrète de la réalisation du paragraphe précédent, obtenue en représentant chaque classe d'équivalence modulo $Q(z)$ par le reste de la division de l'un quelconque de ses éléments par $Q(z)$. On identifie ainsi $\mathbb{R}^q[z]/Q(z)$ au sous espace, noté $\mathbb{R}^q_Q[z]$ de $\mathbb{R}^q[z]$ formé des vecteurs polynomiaux $x(z)$ dont le produit par $Q^{-1}(z)$ est strictement propre :

$$(2) \qquad \mathbb{R}^q_Q[z] = \left\{ x(z) \in \mathbb{R}^q[z] \;\middle|\; Q^{-1}(z)\, x(z) \text{ strictement propre} \right\}$$

Notons H_Q, F_Q et G_Q les opérateurs associés à la réalisation et la représentation ci-dessus. En ~~nous~~ appuyant sur la théorie générale, on voit que F_Q doit faire passer de $g(\omega)$ à $g(\omega.0)$, soit ici, F_Q de $g(\omega(z))$ à $g(z\,\omega(z))$. Donc

$$(3) \qquad F_Q\, x(z) = Q(z)\left[Q^{-1}(z)\, z\, x(z) \right]_-$$

est le reste de la division de $z\,x(z)$ par $Q(z)$. Ceci peut aussi s'écrire

$$z\,x(z) = F_Q\, x(z) + Q(z) \cdot c(z).$$

~~On peut toujours supposer que Q~~ Comme $Q^{-1}x$ et $Q^{-1}F_Q\, x$ sont tous les deux strictement propres, on voit que $c(z)$ est en fait constant (de degré zéro), so

$$(3\,\text{bis}) \qquad F_Q\, x(z) = z\, x(z) - Q(z) \cdot c \quad , \; c \text{ tel que } Q^{-1} F_Q\, x(z) \text{ soit s.p.}$$

On trouve G_Q en cherchant l'état atteint par $\omega = u$. On peut toujours supposer que $Q^{-1}(z) R(z)$ est strictement propre, car s'il contient des termes polynomiaux ils sont annulés par $P(z)$. Dans ce cas on voit que

Corriger cela

$$(4) \qquad G_Q\, u = R(z)\, u$$

appartient bien à $\mathbb{R}^q_Q[z]$. Enfin, puisque $y(z) = P(z) Q^{-1}(z)\, x(z)$,

$y(1) = H_Q\, x(z)$ est le coefficient du terme en z^{-1} de cette série, noté

(5) $\quad H_Q\, x(z) = \left[P(z)\, Q^{-1}(z)\, x(z)\right]_{-1}$

A titre d'exercice, on propose d'exprimer les matrices de ces opérateurs, dans un cas où $Q(z)$ est diagonal :

$$Q(z) = \operatorname{diag}\left(q_1(z), \dots, q_q(z)\right)$$

chaque $q_i(z)$ étant de degré k_i, en prenant une base naturelle pour les polynomes. $\mathbb{R}^q_Q[z]$ est constitué des ~~pol~~ vecteurs polynomiaux dont la coordonnée i est de degré inférieur à q_i. Introduisons la matrice

$$\Psi'(z) = \begin{bmatrix} z^{k_1-1} & z^{k_1-2} & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z^{k_2-1} & z^{k_2-2} & & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & z^{k_3-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & \end{bmatrix}.$$

On peut écrire $\quad x(z) = \Psi'(z)\, \underline{x} \quad$ $\underline{x}$ ~~$\in \mathbb{R}^n$~~ est un ensemble de coordonnées pour $x(z)$.

Le lecteur vérifiera que dans cette base, on a

$$F_Q = \operatorname{diag}(\dots, F_i, \dots)$$

avec

$$F_i = \begin{pmatrix} -q_i^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -q_i^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -q_i^{k_i} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{si } q_i(z) = z^{k_i} + q_i^1 z^{k_i-1} + \dots + q_i^{k_i}.$$

G_Q est la matrice formée avec les coefficients de $R(z)$, telle que

$$R(z) = \Psi'(z)\, G_Q$$

Enfin, si $\;P(z) = \underline{P}\, \Psi(z)\;$ (à nouveau, $\underline{P}$ est formée avec les coefficients de $P(z)$), il faut encore introduire les α_i^k donnés par

$$\frac{1}{q_i(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_i^k z^{-k}$$

et la matrice $\mathcal{H}_Q$ définie par

$$\mathcal{H}_Q = \mathrm{diag}(\dots, \mathcal{H}_i, \dots)$$

où $\mathcal{H}_i$ est une matrice de Hankel :

$$\mathcal{H}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i^{2k_i-1} & \alpha_i^{2k_i-2} & \dots & \alpha_i^{k_i} \\ \alpha_i^{2k_i-2} & \alpha_i^{2k_i-3} & \dots & \alpha_i^{k_i-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_i^{k_i} & \alpha_i^{k_i-1} & \dots & \alpha_i^{1} \end{bmatrix}$$

et on a

$$H_Q = \underline{P}\, \mathcal{H}_Q .$$

Ceci étant, cette réalisation reste complexe, et en général non minimale (il est douteux qu'on puisse obtenir Q diagonale tout en satisfaisant aux conditions de minimalité du Théorème 4). Aussi va-t-on introduire des formes particulières plus utiles de la forme (1).

2.3 Formes fraction matricielle.

On s'interesse aux cas où soit $P(z)$ soit $R(z)$ est réduite à l'identité (ce qui est le cas dans les forme simples suggérées en 2.1). On a alors, avec des notations différentes, que nous utiliserons par la suite, la forme fraction maticielle gauche :

$$(6) \qquad \mathcal{H}(z) = A^{-1}(z) B(z),$$

qui est naturellement associées aux représentations "ARMA" :

$$A(z)\, y(z) = B(z)\, u(z),$$

et la forme fraction matricielle droite

$$(7) \qquad \mathcal{H}(z) = C(z)\,D^{-1}(z),$$

qui est naturellement associée aux formes "état partiel" $D(z)\xi(z) = u$, $y(z) = C(z)\xi(z)$, et que nous utiliserons notamment pour étudier des questions de rejection des perturbations et d'assignation de modèle. } et bien non : de placement de pôles et de vecteurs propres.

donner explicitement les opérateurs H_A, F_A, G_A et H_B, F_B, G_B

On peut particulariser à ces cas tout ce qui a été fait jusqu'ici. On voit en particulier que la réalisation polynomiale sera toujours complètement observable dans le cas fraction gauche (6), et complètement accessible dans le cas droit (7). Ces réalisations seront minimales si et seulement si les deux matrices, appelées numérateur et dénominateur, sont premières entre elles.

Montrons qu'à une représentation interne (H, F, G) complètement observable on peut associer une forme (6) de façon naturelle. D'après le théorème (4 bis) la matrice

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$$

est irréductible. Écrivons sa forme de Smith :

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zI - F \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} V$$

soit

$$U_{21}(zI - F) + U_{22}H = 0$$

ou encore, en changeant de notations

$$(8) \qquad W(z)(zI - F) = A(z)\,H.$$

Du fait que les lignes de $(U_{21}\ U_{22}) = (W\ {-A})$ sont indépendantes pour tout z et du fait que $(zI - F)$ est régulière, on déduit que $A(z)$ est régulière. En effet, si ne l'est pas il existe $\xi'(z)$ tel que $\xi'(z)A(z) = 0$ d'où d'après (8) $\xi'(z)W(z)(zI - F) = 0$, soit

d'où $\xi'(z)W(z)=0$, ce qui avec $\xi'(z)A(z)=0$ contredit l'hypothèse.
On peut donc déduire de (8)

$$(9) \qquad H(zI-F)^{-1} = A^{-1}(z)W(z)$$

ou

$$(10) \qquad H(zI-F)^{-1}G = A^{-1}(z)B(z)$$

avec

$$(11) \qquad B(z) = W(z)G,$$

qui est premier avec $A(z)$ si et seulement si (F,G) est complètement accessible, d'après le théorème 1.
La relation (9) nous montre que les colonnes de $W(z)$ appartiennent à $\mathbb{R}^p_A[z]$.

10. à 11 ... $\mathbb{R}_A$ En outre, elles engendrent tout cet espace. Sinon, il existerait $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $W(z)\xi = 0$, d'où, d'après (8), $H(zI-F)^{-1}\xi = 0$, contredisant l'hypothèse que (H,F) soit complètement observable. Nous les prenons pour vecteurs de base.

La relation (8) s'écrit aussi

$$zW(z) - A(z)H = W(z)F$$

avec $A(z)W(z)F$ strictement propre. Donc, d'après (3 bis)

$$F_A W(z) = W(z)F,$$

et F est la matrice de F_A dans cette base. D'après (11) et (4), (avec $R(z)=B(z)$), on voit que G_A à G pour matrice, et d'après (5) et ~~le fait que~~ (9), et le fait que $[(zI-F)^{-1}]_{-1} = I$, H_A a H pour matrice.

De même qu'à un triplet complètement ~~accessible~~ observable correspond une forme fraction matricielle gauche, à un triplet (H,F,G) complètement accessible correspond une forme ~~matri~~ fraction matricielle droite. En effet, par le même argument, il existe des matrices unimodulaires U et $V = \begin{pmatrix} V_1 & W \\ V_2 & D \end{pmatrix}$ telles que

$$\begin{bmatrix} zI-F & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & W \\ V_2 & D \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$$

d'où $$(zI-F)W(z) = GD(z) \text{, ~~soit~~}$$

(12) $$(zI-F)^{-1}G = W(z)D^{-1}(z),$$

ou
$$H(zI-F)^{-1}G = C(z)D^{-1}(z),$$

avec

(13) $$C(z) = HW(z),$$

qui, d'après le théorème 4, est premier avec $D(z)$ si et seulement si la paire (H,F) est complètement observable.

Par contre, trouver la base dans laquelle les opérateurs H_D, F_D, G_D ont H, F et G pour matrice est beaucoup moins facile que dans le cas précédent. ~~On laisse le lecteur vérifier (c'est un exercice assez difficile) que~~ Elle peut être obtenue de la façon suivante. Puisque la matrice $[G \; FG \dots F^{n-1}G]$ est de rang n, il existe n matrices $U_0, \dots, U_{n-1}$ telles que

(12). $$[G \; FG \dots F^{n-1}G]\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{n-1}\end{bmatrix} = I$$

(la colonne de rang i des U_k est la valeur à l'instant k de la commande qui permet d'atteindre le i^{me} vecteur de base de $\mathbb{R}^n$ en n pas.) Posons

$$\Omega(z) = U_0 + U_1 z + \dots + U_{n-1} z^{n-1};$$

et prenons pour $V(z)$ le reste de la division à gauche de $\Omega(z)$ par $D(z)$:

$$V(z) = D(z)\left[D^{-1}(z)\Omega(z)\right]_- .$$

les colonnes de $V(z)$ forment la base de $\mathbb{R}_D^m[z]$ que nous recherchons.

~~(La preuve consiste à montrer, par un calcul direct, que $[WD^{-1}\Omega]_- = (zI-F)^{-1}$, donc $[WD^{-1}V]_- = (zI-F)^{-1}$. On en déduit immédiatement que $H_D V = [HWD^{-1}V]_{-1} = H$, et~~

Par calcul direct on a

$$W(z)D^{-1}(z)\Omega(z) = (zI-F)^{-1}G\,\Omega(z) = z^{-1}[GU_0 + FGU_1 + \dots + F^{n-1}GU_{n-1}] + z^{-2}[FGU_0 + \dots + F^{n}GU_{\dots}$$
$$+ \dots + GU_1 + FGU_2 + \dots F^{n-2}GU_{n-1} + z[GU_2 + \dots] + \dots + z^{n-2}G\dots$$

soit
$$W(z)D^{-1}(z)\Omega(z) = (zI-F)^{-1} + T(z) \quad , \quad T(z) \in \mathbb{R}^{n\times n}[z], \text{ polynomiale.}$$

Donc aussi

$$(\star) \qquad W(z)D^{-1}(z)V(z) = (zI-F)^{-1} + R(z) \quad , \quad R(z) \in \mathbb{R}^{n\times n}[z], \text{ polynomiale}$$

Donc, d'après ~~(13) et~~ (5) et (13)

$$H_D V(z) = C(z)D^{-1}(z)V(z) = [H\,W(z)\,D^{-1}(z)V(z)]_{-1} = H,$$

et aussi

$$W(z)D^{-1}(z)V(z)G = (zI-F)^{-1}G + R(z)G = W(z)D^{-1}(z) + R(z)G.$$

donc $WD^{-1}(VG-I)$ est polynomiale, mais donc aussi $D^{-1}(VG-I)$ du fait que
(Donc, si $PW+QD=I$, $PWD^{-1}H + QH = D^{-1}H$, => cqfd)
W est, par construction, première avec D ! Mais comme $D^{-1}VG$ est strictement propre,
~~ainsi bien sûr que D^{-1}~~, on en conclu que $D^{-1}(VG-I)$ est nul, ~~soit~~ (c'est-à-dire ou $D^{-1}VG = D_-^{-1}$)
si D^{-1} n'est pas s.p., soit
$$V(z)G = DD_-^{-1} \quad \cancel{\text{ou } DD_-^{-1}}$$ ~~, qui est ce qui fait que D^{-1} pas s.p.~~

Donc, d'après (4), G_D a G pour matrice. Finalement, divisons $V(zI-F)$ par D :

$$(\star\star) \qquad V(z)(zI-F) = D(z)K + L(z).$$

(Du fait que $D^{-1}V$ est s.p., on voit facilement que K est constant.) On peut écrire (en utilisant $(\star)$)

$$W(z)D^{-1}(z)V(z)(zI-F) = W(z)K + W(z)D^{-1}(z)L(z) = I + R(z)(zI-F),$$

d'où on déduit que $WD^{-1}L$ est un polynôme, donc, à nouveau, aussi $D^{-1}L$, et donc que le re
$L(z)$ est nul. Et alors $(\star\star)$ montre, de la même façon que (7) précédemment, que F_D a F pour matri

9.4. Réalisations des formes fraction matricielle.

On va montrer comment retrouver H, F et G à partir d'une fonction de transfert donnée sous forme de fraction matricielle, gauche ou droite. Soit donc la matrice rationnelle $p \times m$:

$$\mathcal{H}(z) = C(z)\, D^{-1}(z)$$

où $D(z)$ est colonne réduite : Outre la matrice

$$Z(z) = \operatorname{diag}\left(z^{k_1}, z^{k_2}, \ldots, z^{k_m}\right)$$

que nous avons déjà introduite, nous allons aussi utiliser la matrice

$$\Psi(z) = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ z & \vdots & \\ z^2 & \vdots & \\ \vdots & & \\ z^{k_1-1} & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ & z & \\ & \vdots & \\ & & \end{array}\right]$$

ayant m colonnes, et $\sum k_i = n$ lignes. La matrice $D(z)$ peut s'écrire

$$D(z) = D_0\, Z(z) + D_1\, \Psi(z) = D_0\, \bar{D}(z).$$

De même, d'après la proposition 3 bis, on a également

$$C(z) = C_1\, \Psi(z).$$

~~et~~ Introduisons la matrice $n \times n$ (où $n = \sum k_i$)

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & 0 & \\ \hline & & & 0\ 1 \\ & 0 & & \ \ \ddots \\ & & & \end{array}\right],$$

faite de blocs $k_i \times k_i$ de sur diagonales de 1, sur la diagonale, et de zéros partout ailleurs, ~~On vérifie immédiatement que~~ et enfin la matrice

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

formée de m colonnes, la colonne i étant formée de zeros partout sauf un 1 à la ligne $k_1 + \dots + k_i$.

On remarque l'identité :

$$(zI - J)\,\Psi(z) = \hat{G}\,Z(z).$$

D'où

$$\hat{G}\,\bar{D}(z) = \hat{G}\left(Z(z) + D_0^{-1} D_1 \Psi(z)\right) = \left(zI - J + \hat{G} D_0^{-1} D_1\right)\Psi(z)$$

Posons donc

$$(1) \qquad H = C_1, \qquad F = J - \hat{G} D_0^{-1} D_1, \qquad G = \hat{G} D_0^{-1},$$

~~il vient~~ l'identité ci-dessus devient

$$G\,D(z) = (zI - F)\,\Psi(z)$$

soit

$$(2) \qquad (zI - F)^{-1} G = \Psi(z)\, D^{-1}(z)$$

et en prémultipliant par $C_1 = H$:

$$H (zI - F)^{-1} G = C(z)\, D^{-1}(z) = \mathcal{H}(z).$$

On a bien obtenu une réalisation. Il est interessant de remarquer la structure qu'elle a, en notant que par des opérations élémentaires de colonnes, ~~on a toujours~~ ~~(et quitte à renuméroter les sorties)~~ on peut s'arranger pour que $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$, ~~et D_0 diagonale triangulaire supérieure~~

~~Ot~~ on n'a aucune structure particulière, et on a (pour $m=3$ par exemple)

$$
F = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & 1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & 0 & \\
 & & 1 & & & & & & \\
\times & \times \cdots & \times & \times & \times \cdots & \times & \times & \times \cdots & \times \\
\hline
 & & & 0 & 1 & & & & \\
 & 0 & & & \ddots & & & 0 & \\
 & & & & & 1 & & & \\
\times & \times \cdots & \times & \times & \times \cdots & \times & \times & \times \cdots & \times \\
\hline
 & & & & & & 0 & 1 & \\
 & 0 & & & 0 & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1 \\
\times & \times \cdots & \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \cdots & \times
\end{array}\right]
\qquad
G = \left[\begin{array}{c|c|c}
0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\times & \times & \times \\
\hline
0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\times & \times & \times \\
\hline
0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\times & \times & \times
\end{array}\right]
$$

où les $\times$ dans F sont les éléments de $D_0^{-1} D_1$, et dans G ceux de D_0^{-1}.

Ceci est (presque) la forme canonique commandable de Brunovsky. Et comme le feedback $u = D_0 \hat{u} + D_1 x$ met le système dans la forme canonique exacte, les k_i sont les indices de Kronecker du système. ~~On~~ vérifie immédiatement en formant la matrice de commandabilité que cette ~~forme~~ réalisation est toujours complètement commandable. Comme elle est de dimension $n = \sum k_i$, elle ~~est~~ est minimale (i.e. sont complètement observable) si et seulement si $C(z)$ et D sont premières entre elles à droite.

On peut faire un traitement analogue pour une fraction matricielle gauche

$$\mathcal{H}(z) = A^{-1}(z)\, B(z)$$

$$A(z) = Z(z)\, A_0 + \Phi(z)\, A_1 = \bar{A}(z)\, A_0$$

$$B(z) = \Phi(z)\, B_1$$

où

$$Z(z) = \operatorname{diag}\left(z^{k_1}, z^{k_2}, \dots, z^{k_p}\right) \quad , \quad \sum k_i = n$$

et

$$
\Phi(z) = \left[\begin{array}{ccccc|cccc|ccc}
1 & z & z^2 & \cdots & z^{k_1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & z & \cdots & z^{k_2-1} & 0 & \cdots & \\
0 & & \cdots & & - & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots &
\end{array}\right] \quad p \times n
$$

et ~~aussi~~ aussi

$$
\hat{H} = \left[\begin{array}{ccccc|cccc|ccc}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots &
\end{array}\right] \quad p \times n
$$

La matrice J est maintenant formée de p blocs $k_i \times k_i$ de sous diagonale de 1.
On a l'identité

$$\Phi(z)(zI - J) = Z(z)\hat{H}$$

soit, par un calcul analogue, en posant

$$(3) \qquad H = A_0^{-1}\hat{H}, \qquad F = J - A_1 A_0^{-1}\hat{H}, \qquad G = B_1,$$

les égalités

$$(4) \qquad H(zI - F)^{-1} = A(z)^{-1}\Phi(z)$$

d'où

$$H(zI-F)^{-1}G = A(z)^{-1}B(z) = \mathcal{H}(z).$$

On a maintenant une forme où G n'a aucune structure spéciale, H et F ont une structure analogue à celle de G et F dans la réalisation précédente, à une transposition près (et avec p blocs au lieu de m).

Cette réalisation est toujours complètement observable, et de dimension $n = \sum k_i$, donc minimale, soit complètement commandable si et seulement si les matrices $A(z)$ et $B(z)$ sont premières entre elles à gauche.

On va finalement préciser la relation entre la représentation d'état et les formes fraction matricielles par le théorème ci-dessous :

THEORÈME 5 Les facteurs invariants non unité de $D(z)$ (resp. $A(z)$) ~~(autres que ceux de $A(z)$~~ coïncident avec les facteurs invariants non unité de $zI-F$ pour la matrice F de la réalisation canonique commandable (resp. observable) associée par (1) (resp(

DEMONSTRATION. Partons de l'égalité

$$G\,D(z) = (zI-F)\,\Psi(z).$$

La matrice G est de plein rang. On peut donc écrire

$$D(z) = (G'G)^{-1}G'(zI-F)\Psi(z) = D_0\,\hat{G}'(zI-F)\Psi(z),$$

soit

$$\bar{D}(z) = \hat{G}'(zI-F)\Psi(z)$$

Introduisons la matrice L formée de colonnes de la matrice unité de I qui ne sont pas dans $\hat{G}$. Ainsi, $[L\ \hat{G}]$ est inversible, et bien sûr unimodulaire puisque constante. On introduit aussi la matrice $K(z)$ dont les blocs diagonaux $k_i \times k_i-1$, intercallés entre les colonnes de $\Psi($ forment une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonal. Donc $[K(z) \mid \Psi(z)]$, qui se déduit de cette matrice par des permutations de lignes, est unimodulaire :

$$K(z) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ z & 1 & \cdots & 0 \\ z^2 & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ z^{k_1-1} & z^{k_1-2} & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots \\ z & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{matrix} \end{array}\right]$$

On peut remarquer que $L'\hat{G} = L'G = 0$, et que

$$L'(zI-F)K(z) = I_{n-m}.$$

De sorte que

$$\begin{bmatrix} L' \\ \hat{G}' \end{bmatrix}(zI-F)\begin{bmatrix} K(z) & \Psi(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ M(z) & \bar{D}(z) \end{bmatrix}$$

$(zI-F)$ est donc équivalente à ~~celle~~ la matrice du deuxième membre.

Soient $U(z)$ et $V(z)$ les matrices unimodulaires telles que $U(z)\bar{D}(z)V(z) = S(z)$ soit sous forme de Smith. On a

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -UM & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ M & -\bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}.$$

les matrices à gauche et à droite du premier membre sont unimodulaires et celle du deuxième membre est sous forme de Smith. ■.

On aurait naturellement le théorème et la démonstration analogue pour la forme commandable. D'où le corollaire : ~~beaucoup plus précis que celui établi à la suite du théorème 4 bis.~~

COROLLAIRE 4. Si on a deux représentations

$$\mathcal{H}(z) = A^{-1}(z)\, B(z) = C(z)\, D^{-1}(z)$$

d'une même fonction de transfert où $A(z)$ et $B(z)$ sont premières entre elles à gauche, et $C(z)$ et $D(z)$ à droite, les matrices $A(z)$ et $D(z)$ ont les mêmes facteurs invariants, non unité, (et donc notamment même déterminant).

PREUVE. Dans ce cas les réalisations observables et commandable associées sont minimales. Donc elles se déduisent l'une de l'autre par changement de base, et donc les facteurs invariants des matrices $zI-$ correspondantes sont les mêmes. ■

On peut encore démontrer l'équivalence des matrices polynomiales suivantes (quelle que soit la réalisation minimale H, F, G de $\mathcal{H} = A^{-1}B = CD^{-1}$

$$\begin{pmatrix} zI-F & G \\ -H & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C(z) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B(z) \end{pmatrix}.$$

Les deux sections qui suivent sont des compléments qui ne sont pas logiquement nécessaires, et le Théorème 6, qui repose sur un résultat du chapitre suivant, pourrait aussi bien être cité ici. Mais il s'agit de façons complémentaires de comprendre la relation entre les representations par fraction maticielle et les représentations d'état associées, qu'il semble difficile d'ign.

2.3) Obtention des formes fraction maticielle.

On verra au chapitre suivant comment mettre une paire (F,G) complètement commandable sous forme de Brunovski, de même pour une paire (H,F) complètement observable. Le développement précédent donne directement les formes $C(z)D^{-1}(z)$ et $A^{-1}(z)B(z)$ associées. Il est toutefois interessant de comprendre ~~directement~~ comment les justifier à partir de la forme d'état.

Remarquons que la forme commandable obtenue au paragraphe précédent (et la forme de Brunovski) peut s'écrire

$$F = J + GK$$

où J est la matrice obtenue en ne gardant que les sur-diagonales de 1 dans les blocs diagonaux. Le système (discret par exemple) s'écrit de

$$x(t+1) = Jx(t) + G\xi(t)$$
$$\xi(t) = Kx(t) + u(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

Introduisons les coefficients maticiels

$$C_i = HJ^{i-1}G \qquad \text{et} \qquad D_i = -KJ^{i-1}G$$

et remarquons que J^{k_n} ~~présente un bloc~~ a ses k_n dernières lignes nulle $J^{k_{n-1}}$ a ses $k_n + k_{n-1}$ dernières lignes nulles, etc... et $J^{k_1} = 0$. En appliquant la formule de la réponse impulsionnelle aux systèmes $\xi(\cdot) \to \xi(\cdot)$ et $\xi(\cdot) \to y(\cdot)$ ci-dessus, il vient

$$\xi(t) = -\sum_{i=1}^{k_1} D_i\, \xi(t-i) + u(t) \qquad \text{ou} \qquad \xi(t+k_1) = -\sum_{i=1}^{k_1} D_i\, \xi(t+k_1-i) + u(t+k_1)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k_1} C_i\, \xi(t-i) \qquad \text{où} \qquad y(t+k_1) = \sum_{i=1}^{k_1} C_i\, \xi(t+k_1-i)$$

soit en introduisant les polynomes

$$\tilde{D}(z) = z^{k_1} I + \sum_{i=1}^{k_1} D_i\, z^{k_1-i}$$

$$\tilde{C}(z) = \sum_{i=1}^{k_1} C_i\, z^{k_1-i}$$

et en passant en transformée en z :

$$\tilde{D}(z)\xi(z) = z^{k_1} u(z) \quad \cancel{\text{ou}} \quad \cancel{z^{k_1}}$$

$$\tilde{C}(z)\xi(z) = z^{k_1} y(z)$$

soit

$$y(z) = \tilde{C}(z)\tilde{D}^{-1}(z)\, u(z)$$

Mais en raison des blocs de ligne nulles que nous avons signalés, on s'aperçoit que $\tilde{C}(z)$ et $\tilde{D}(z)$ ont le facteur commun droit ci-dessous :

$$\cancel{\tilde{C}(z) = C(z) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & z^{k_1-k_2} & \\ & & z^{k_1-k_3} \\ & & & \ddots \end{pmatrix}} \qquad \begin{aligned} \tilde{C}(z) &= C(z)\,\tilde{Z}(z) \\ \tilde{D}(z) &= D(z)\,\tilde{Z}(z) \end{aligned}$$

$$\cancel{\tilde{D}(z) =}\ \tilde{Z}(z) = \operatorname{diag}\left(1, z^{k_1-k_2}, z^{k_1-k_3}, \dots, z^{k_1-k_m}\right)$$

Une fois retiré ce facteur, on a degré $\det D(z) = \sum k_i = n$, et

$$\mathcal{H}(z) = C(z)\, D^{-1}(z).$$

Prenons maintenant la forme observable du paragraphe précédent. On a

$$F = J + KH$$

(les matrices J et K ne sont plus les mêmes que précédemment) où J est la matrice obtenue en ne gardant que les sous-diagonales de 1 des blocs diagonaux. Elle est donc encore nilpotente à la puissance k_1 (ce n'est pas la même suite $k_1, \dots, k_p$ que dans le cas commandable), et présente des colonnes de zéro aux puissances antérieures.

Le système s'écrit

$$x_k(t+1) = J x_k(t) + K y_k(t) + G u_k(t),$$

$$y_k(t) = H x_k(t).$$

On introduit les coefficients matriciels

$$A_i = -H J^{i-1} K, \qquad B_i = H J^{i-1} G,$$

et l'application au système ci-dessus des formules de réponse impulsionnelle donne

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{k_1-1} A_i\, y(t-i) + \sum_{i=1}^{k_1-1} B_i\, u(t-i),$$

ou

$$y(t+k_1) + \sum_{i=1}^{k_1-1} A_i\, y(t+k_1-i) = \sum_{i=1}^{k_1-1} B_i\, u(t+k_1-i).$$

soit, en introduisant les polynômes matriciels :

$$\tilde{A}_i(z) = z^{k_1} I + \sum_{i=1}^{k_1} A_i z^{k_1-i} = \tilde{Z}(z) A_i(z),$$

$$\tilde{B}_i(z) = \sum_{i=1}^{k_1} B_i z^{k_1-i} = \tilde{Z}(z) B_i(z),$$

où $\tilde{Z}(z) = \mathrm{diag}\,(1, z^{k_1-k_2}, \dots, z^{k_1-k_p})$, une représentation

$$H(z) = A^{-1}(z) B(z)$$

avec degré $\det A(z) = \sum_{i=1}^{p} k_i = n$.

Ainsi est fini d'établir le résultat :

THÉORÈME 6. À toute représentation fraction matricielle réduite gauche correspond de façon canonique une représentation interne complètement observable et réciproquement. De même pour une représentation fraction matricielle droite et une représentation interne complètement commandable

2.~~5~~4) Réalisation physique.

On peut retrouver les représentations internes de la section 2.2) de la manière suivante, consistant à construire, formellement, un circuit électronique qui "réalise" la fonction de transfert (d'où le terme réalisation). On admet qu'on dispose d'opérateurs physiques z^{-1}, qui seront des retards dans le cas discret, des intégrateurs dans le cas continu. ~~pris ici pour exemple afin de changer un peu~~ (le lecteur vérifiera que tout marche de la même façon).

Considérons une forme fraction matricielle ~~gauche~~ droite avec les notations des paragraphes précédents, et posons

$$u(z) = D_0\, v(z)$$

$$\bar{D}(z)\,\xi(z) = v(z)$$

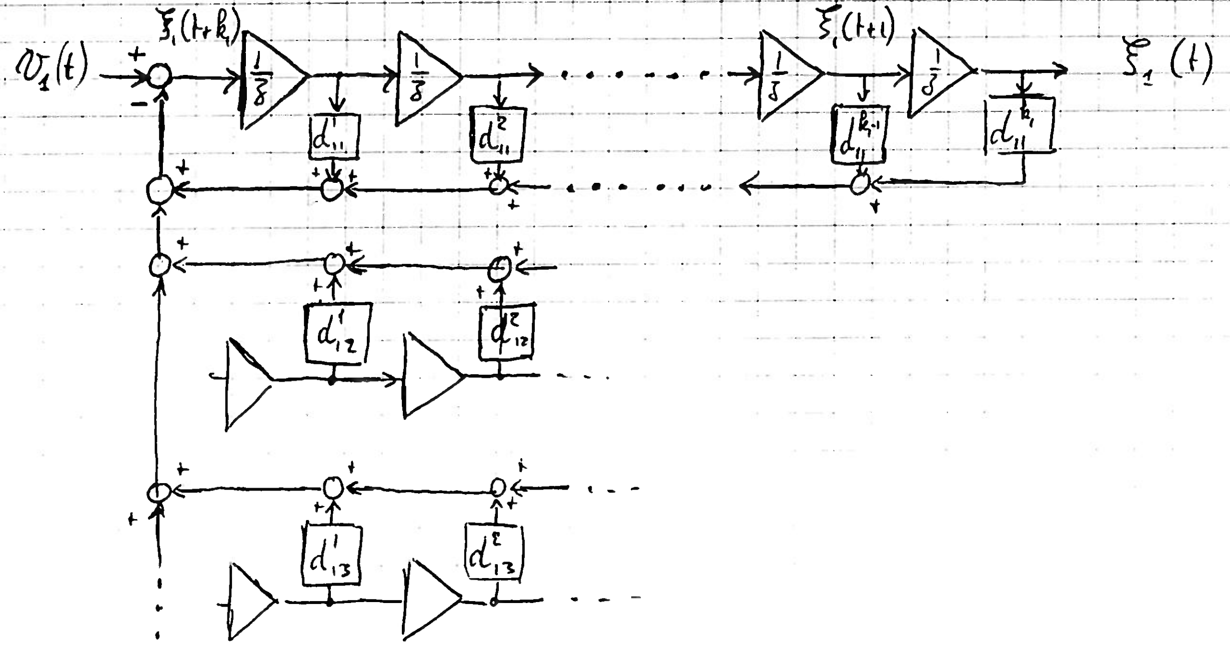
$$C(z)\,\xi(z) = y(z)$$

(ξ est appelé l'état partiel de cette représentation). Le fait que $\bar{D}$ ~~soit~~ a l'identité pour matrice des plus haut degrés fait que ceci s'écrit, pour la ligne en revenant dans le domaine des temps:

$$\xi_1(t+k_1) = -\sum d_{1i}^{j}\ \xi_i(t+k_1-j) + v_1(t).$$

En outre, on est assuré que ξ_1 n'interviendra jamais avec un décallage de temps supérieur à k_1. De plus, le fait que CD^{-1} soit strictement propre garantit que dans $y\,\cancel{(t)} = C\xi$ n'interviennent également que des décalages inférieurs à k_1 pour ξ_1. Et de même pour les autres coordonnées.

On peut alors représenter les m équations du type ci-dessus avec m "lignes à retard" (ou chaînes d'intégrateurs). Nous dessinons la première et en schématisons deux autres. (Et on porte sur le dessin les quantités présentes à l'instant t (On n'a pas représenté les sorties)



En prenant pour ~~état~~ variables d'état les sorties des opérateurs z^{-1}, avec $x_1(t) = \xi_1(t)$, $x_2(t) = \xi_1(t+1), \ldots,$ $x_{k_1}(t) = \xi_1(t+k_1-1)$ puis en continuant avec les ξ_2, etc..., on obtient la ~~réalisati~~ représentation interne commandable de la section 8.2. Remarquons aussi que la correspondance entre x et ξ indiquée ci-dessus explique la formule (2), qui exprime l'égalité entre deux expressions de la fonction de transfert de u à x.

Pour une représentation fraction matricielle gauche, posons

$$\bar{y} = A_0 y$$

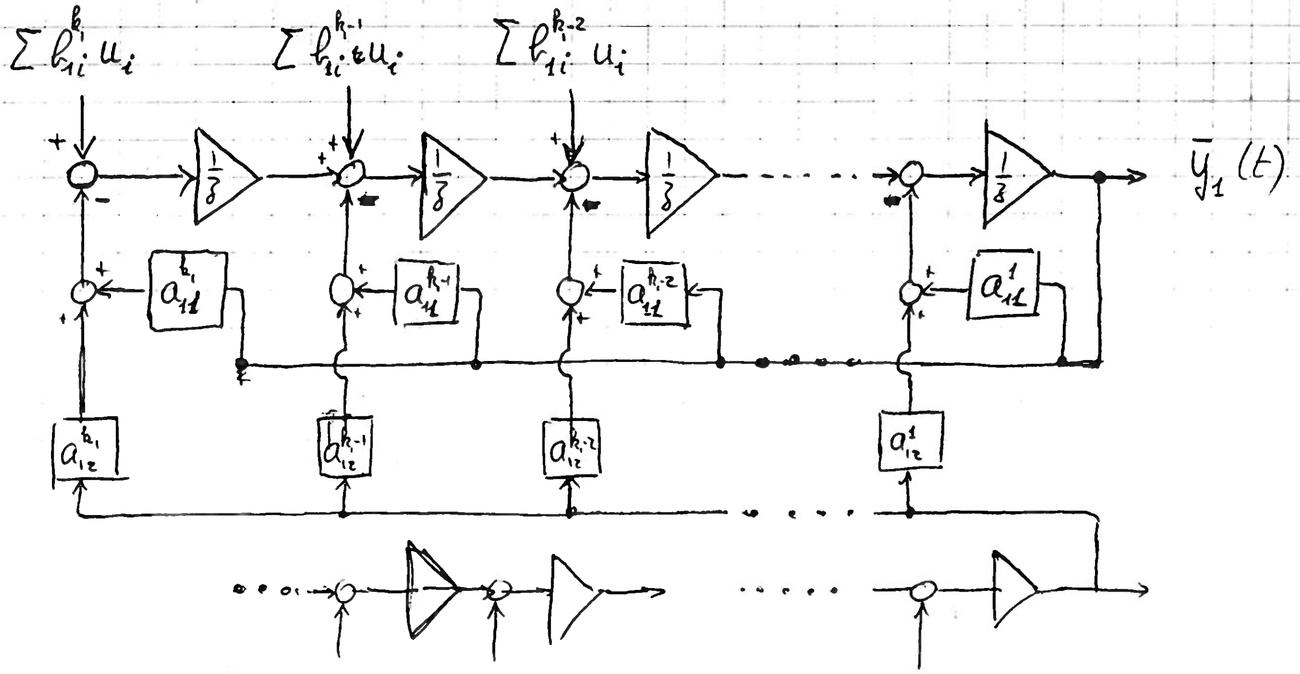
$$\bar{A}(z)\,\bar{y}(z) = B(z)\,u(z)$$

et écrivons la ligne 1 sous la forme ci-dessous.

$$\cancel{z(\cdots z(z\bar{y}_1 + \sum a^1_{1i} y_i - \sum b^1_{1i} u_i) + \sum a^2_{1i} y_i - \sum b^2_{1i} u_i)\cdots) +}$$

$$z(\cdots z(z\bar{y}_1 + \sum a^1_{1i} y_i - \sum b^1_{1i} u_i) + \sum a^2_{1i} y_i - \sum b^2_{1i} y_i)\cdots) + \sum a^{k_1}_{1i} y_i - \sum b^{k_1}_{1i} u$$

Ceci suggère la réalisation physique ci-dessous, où on a une ligne à retard (ou chaîne d'intégrateurs) par sortie. L'égalité est réalisée sur le sommateur de tête de la chaîne.



A nouveau, on prend les sorties des intégrateurs ou délai pour variable d'état, mais cette fois numérotés de gauche à droite :

$x_1(t) = y_1(t + k_1 - 1)$, $x_2(t) = y_1(t + k_1 - 2)$, ..., $x_{k_1}(t) = y_1(t)$, ...

et en continuant avec y_2, etc. On obtient ainsi la réalisation commandable antérieure. Et la relation entre x et y explique la formule (4 qui exprime l'égalité de deux expressions de la fonction de transfert de G u à y.

On remarquera la dualité entre les deux réalisations physiques obtenues. Dans la première toutes les variables d'état sont renvoyées en feedback sur le même sommateur, avant le premier intégrateur ou délai. Dans la deuxième, la dernière variable de la chaîne est renvoyée devant chaque intégrateur ou délai.