ISIA
Formulaire de commande linéaire-quadratique

Pierre BERNHARD
2001

Ce formulaire *(et non pas* cours*) comporte deux chapitres, temps continu et temps discret, dont les formules correspondantes portent respectivement les numéros* $100+n$ *et* $200+n$ *pour le même* n*.*

1. TEMPS CONTINU

1.1. **Le système.**

1.1.1. *Les variables.*
- L'état $x \in \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t)$ absolument continue[1],
- la commande $u \in \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, $t \mapsto u(t)$ mesurable,
- une perturbation $w \in \mathbb{R}^\ell$, $t \mapsto w(t)$ mesurable,
- la sortie mesurée $y \in \mathbb{R}^p$, $p \leq n$, $p \leq \ell$,
- la sortie "à commander" $z \in \mathbb{R}^q$, $q \geq m$.

1.1.2. *Les coefficients.* Tous les coefficients dont il est question ici peuvent être, sauf dans la théorie stationnaire en horizon infini —et cela sera rappelé dans le texte—, variables avec le temps, continus par morceaux, cad-lag[2]. On renoncera toujours à noter explicitement cette dépendance, qui peut partout être sous-entendue. (Sauf en horizon infini.)
- La matrice de dynamique $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
- la matrice de commande $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$,
- la matrice de perturbation $D \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$,
- la matrice de sortie $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$,
- la matrice de perturbation de sortie $E \in \mathbb{R}^{p\times \ell}$, surjective pour tout t,[3]
- la matrice $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$,
- la matrice $G \in \mathbb{R}^{q\times m}$ injective[4].

On remarque qu'on peut former les produits CAB et HAD, et aussi la matrice par blocs

(101) $$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ C & 0 & E \\ H & G & 0 \end{pmatrix}$$

On utilisera souvent les notations induites par les formules ci-dessous:

(102) $$\begin{pmatrix} H^t \\ G^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^t & R \end{pmatrix}$$

1. donc notamment C^1 presque partout, de variation égale à l'intégrale de sa dérivée.
2. continu à droite, limité —c'est à dire admettant une limite— à gauche.
3. Plus précisément, on supposera que la plus petite valeur propre de EE^t est bornée inférieurement par un nombre positif ε.
4. Plus précisément, la plus petite valeur propre de G^tG est bornée inférieurement par un nombre positif γ.

de sorte que l'hypothèse fréquemment faite que $S=0$ équivaut à $H^tG=0$, et G injectif équivaut à l'hypothèse essentielle que $R>0$,[5] et on introduit encore les notations

$$\bar{A} = A - BR^{-1}S^t\,, \qquad \bar{Q} = Q - SR^{-1}S^t\,, \tag{103}$$

et de même

$$\begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^t & E^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & L \\ L^t & N \end{pmatrix} \tag{104}$$

de sorte que l'hypothèse fréquemment faite que $L=0$ équivaut à $DE^t=0$, et E surjectif équivaut à l'hypothèse essentielle que $N>0$,[6] et on définit

$$\tilde{A} = A - LN^{-1}C\,, \qquad \widetilde{M} = M - LN^{-1}L^t\,. \tag{105}$$

On notera que toutes les conditions d'inégalité sur les dimensions des matrices impliquées et de rang se conservent par transposition de la matrice $\mathcal{S}$, qui échange les constructions ci-dessus. Ce sont les premières manifestations de la *dualité*.

Dans ce qui suit, on utilisera la notation $\|z(\cdot)\|_{L^2}$, ou plus simplement $\|z\|_{L^2}$ pour désigner la norme L^2 de la fonction vectorielle $t\mapsto z(t)$, et étant donnée une matrice symétrique X, nous noterons $\|x\|_X^2$ la forme quadratique $(x,Xx)=x^tXx$ qui est bien le carré d'une norme (sur $\mathbb{R}^n$) si X est positive définie —et on note $\mathbb{R}^n_X$ l'espace $\mathbb{R}^n$ doté de cette norme—, et sera juste une notation pour désigner la forme quadratique dans le cas contraire.

On aura encore besoin pour le critère d'une matrice $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $X\ge 0$ et de la notation

$$\zeta = \begin{pmatrix} z(\cdot) \\ x(T) \end{pmatrix} \in L^2([0,T]\to\mathbb{R}^q)\times\mathbb{R}^n_X\,, \tag{106}$$

de sorte que

$$\|\zeta\|^2 = \|z(\cdot)\|^2_{L^2} + \|x(T)\|^2_X\,, \tag{107}$$

et d'une matrice $Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $Y>0$, $Y^{-1}=Z$, et de la notation

$$\omega = \begin{pmatrix} x_0 \\ w(\cdot) \end{pmatrix} \in \Omega = \mathbb{R}^n_Y \times L^2([0,T]\to\mathbb{R}^\ell)\,, \tag{108}$$

de sorte que

$$\|\omega\|^2 = \|x_0\|^2_Y + \|w(\cdot)\|^2_{L^2}\,. \tag{109}$$

1.1.3. *Les équations.* Les équations du système s'écrivent

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw\,, \quad x(0)=x_0\,, \tag{110}$$
$$y = Cx + Ew\,, \tag{111}$$
$$z = Hx + Gu\,, \tag{112}$$

qui peut bien sûr aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} x \\ u \\ w \end{pmatrix}\,.$$

5. Plus précisément, R^{-1} est bornée.
6. Plus précisément, N^{-1} est bornée.

1.2. **Le problème sans perturbation.** On examine ici le cas où w n'est pas présent, ou, de manière équivalente, où $D = 0$. En commande déterministe non perturbée, la notion d'observation n'a pas de sens, donc on ignore y.

On cherchera toujours la commande qui *minimise* le critère.

1.2.1. *Le critère.* On introduit

$$J(x_0; u(\cdot)) = \|\zeta\|^2 = \|x(T)\|_X^2 + \int_0^T \begin{pmatrix} x^t(t) & u^t(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & S \\ S^t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt \,. \tag{113}$$

1.2.2. *Commande optimale déterministe.* La trajectoire optimale peut être donnée en boucle ouverte comme l'unique solution des équations canoniques:

$$\begin{array}{rcll} \dot{x} & = & \bar{A}x - BR^{-1}B^t\lambda \,, & x(0) = x_0 \,, \\ \dot{\lambda} & = & -\bar{Q}x - \bar{A}^t\lambda \,, & \lambda(T) = Xx(T) \,, \end{array} \tag{114}$$

et la commande optimale en boucle ouverte s'en déduit par

$$u^*(t) = -R^{-1}(B^t\lambda(t) + S^t x(t)) \,. \tag{115}$$

Un moyen de résoudre le problème aux limites (114) est d'introduire deux fonctions matricielles carrées $n \times n$, $\Xi(\cdot)$ et $\Lambda(\cdot)$ solutions du problème de Cauchy rétrograde (qui représente n^2 équations différentielles linéaires):

$$\begin{array}{rcll} \dot{\Xi} & = & \bar{A}\Xi - BR^{-1}B^t\Lambda \,, & \Xi(T) = I \,, \\ \dot{\Lambda} & = & -\bar{Q}\Xi - \bar{A}^t\Lambda \,, & \Lambda(T) = X \,, \end{array} \tag{116}$$

et de prendre $x(t) = \Xi(t)\rho$, $\lambda(t) = \Lambda(t)\rho$, pour $\rho = \Xi(0)^{-1}x_0$. (On démontre que Ξ reste inversible pour tout t.)

Il est plus efficace de donner une formule en boucle fermée: introduisons

$$P(t) = \Lambda(t)\Xi(t)^{-1} \tag{117}$$

dont on démontre qu'elle est *symétrique* (elle n'a donc que $n(n+1)/2$ éléments différents) et qu'elle peut être obtenue sans calculer Ξ et Λ en intégrant la très célèbre équation de Riccati:

$$-\dot{P} = PA + A^tP - (PB + S)R^{-1}(B^tP + S^t) + Q \,, \quad P(T) = X \,. \tag{118}$$

Remarquons que l'équation ci-dessus s'écrit aussi

$$-\dot{P} = P\bar{A} + \bar{A}^tP - PBR^{-1}B^tP + \bar{Q} \,, \quad P(T) = X \,. \tag{119}$$

On a alors

$$u^*(t) = -R^{-1}(B^tP(t) + S^t)x(t) = \varphi^*(t,x(t)) \,. \tag{121}$$

Il est logique d'introduire le gain de feedback d'état optimal:

$$F = R^{-1}(B^tP + S^t) \,, \qquad \varphi^*(t,x) = -F(t)x \,. \tag{122}$$

On a aussi

$$\min_{u(\cdot)} J(x_0; u(\cdot)) = \|x_0\|_{P(0)}^2 = x_0^t P(0) x_0 \,. \tag{123}$$

Horizon infini. On considère ici le cas où toutes les matrices considérées sont constantes, $T = \infty$, et naturellement le terme en $x(T)$ est absent:

$$J(x_0; u(\cdot)) = \|z\|^2_{L^2([0,\infty]\to\mathbb{R}^q)} \tag{124}$$

Sous les hypothèses complémentaires

(1) La paire (A,B) est stabilisable[7],

(2) La paire $(\bar{Q},\bar{A})$ est détectable[8],

la solution optimale est encore donnée par (122) où F est constante, et P est la solution maximale (au sens des matrices définies) de l'équation de Riccati algébrique

$$PA + A^tP - (PB+S)R^{-1}(B^tP+S^t) + Q = 0\,. \tag{125}$$

C'est la seule solution de cette équation qui soit positive définie, la seule qui rende stable la matrice $A - BF$, et elle peut être obtenue comme limite quand $t \to -\infty$ de la solution de l'équation (différentielle) de Riccati (118) intégrée depuis $P(0) = 0$.

1.2.3. *Les formules "non homogènes".* On peut étendre les formules en horizon fini à un problème "non homogène". Ceci est utile par exemple quand le critère naturel à considérer est de la forme

$$J = \|x(T)-\xi\|_X^2 + \int_0^T \left(\|x-x_d\|_Q^2 + \|u-u_d\|_R^2\right)\,dt\,,$$

où $x_d(\cdot)$ est une trajectiore désirée donnée non nulle et par exemple, u_d la commande nominale associée à cette trajectoire (éventuellement non constantes l'une et l'autre). On peut aussi avoir des termes additifs connus, variables, dans la dynamique, par exemple en commande stochastique quand on veut prendre en compte une perturbation dynamique d'espérance non nulle.

On donne les formules plus générales correspondant au problème

$$\dot{x} = Ax + Bu + f$$

$$J = \|x(T)\|_X^2 + 2(\xi,x(T)) + \int_0^T \left[(x^t(t)\; u^t(t)) \begin{pmatrix} Q & S \\ S^t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} + 2(q,x(t)) + 2(r,u(t))\right] dt\,.$$

Ici, ξ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné, et $f(\cdot)$, $q(\cdot)$ et $r(\cdot)$ des fonctions vectorielles de taille adaptée données, de même rgularité que les autres paramètres du problème (cadlag), et comme pour ceux-ci la dépendance en temps sera implicite dans toutes les formules ci-dessous.

La valeur optimale du critère est $V(0,x_0)$ avec

$$V(t,x) = \|x\|_{P(t)}^2 + 2(p(t),x) + \pi(t)$$

et la commande optimale est $u(t) = \varphi^*(t,x(t))$ où

$$\varphi^*(t,x) = -R^{-1}[(B^tP(t)+S^t)x + B^tp(t) + r]\,.$$

La matrice symétrique $P(t)$ est encore donnée par l'équation de Riccati (118) ou (119), le vecteur $p(t)$ par l'équation différentielle

$$\dot{p} + [A^t - (PB+S)R^{-1}B^t]p - (PB+S)R^{-1}r + Pf + q = 0\,, \quad p(T) = \xi\,,$$

qu'on pourra ré-écrire en fonction de $\bar{A}$ et $\bar{q} = q - SR^{-1}r$, et enfin si on le veut, le scalaire π est doné par une simple intégrale

$$\pi(t) = \int_t^T [p^tf + f^tp - (p^tB + r^t)R^{-1}(B^tp + r)]\,ds\,.$$

Des formules non homogènes en horizon infini n'ont guère de sens, car sauf conditions très particulières, le critère est infini négatif.

7. donc complètement accessible suffit

8. donc complètement observable suffit

1.3. **Commande stochastique.** La fonction $w(\cdot)$ est supposée être un processus stochastique blanc, gaussien, normal (moyenne nulle, densité spectrale identité). Remarquons que le fait que la même variable w apparaisse dans les équations de dynamique (110) et de sortie (111) n'implique pas que le bruit de mesure doive être corellé au bruit de dynamique. Il suffit que L soit nulle, pour que les bruits Dw et Ew soient des bruits blancs gaussiens decorellés. (Prendre $w^t = (w_1^t \quad w_2^t)$, $D = (D_1 \quad 0)$, $E = (0 \quad E_2)$.)

Pour le problème en information imparfaite, x_0 est aussi supposé être une variable aléatoire gaussienne, d'espérance $\hat{x}_0$ et de covariance Σ_0.

Le critère J (113) est maintenant une variable aléatoire, on s'intéresse donc à la minimisation de son espérance mathématique $\mathbb{E}_\omega J(u(\cdot),\omega)$. Essentielle ici est l'*information* disponible pour former la commande. On rappellera ceci en notant $u(t) = \varphi(t,z(t))$ où $z(t)$ peut être l'état courant $x(t)$ ou l'ensemble des mesures passées $(y(s),s < t)$. On adoptera la notation (un peu abusive)

$$G(\varphi) = \mathbb{E}_\omega J(\varphi,\omega)\,. \tag{126}$$

1.3.1. *Information complète.* Le problème en *information complète* est celui où le controleur ayant accès à $x(t)$ en temps réel, il peut utiliser des feedbacks d'état $u(t) = \varphi(t,x(t))$.

La solution de ce problème est la même que la solution *en boucle fermée* du problème sans perturbation. Elle est donc donnée par (118) ou (119) et (121) ou (122). Par contre (123) n'est plus exacte et doit être remplacée par

$$\min_\varphi G(\varphi) = \mathrm{tr}(\Sigma_0 P(0)) + \int_0^T \mathrm{tr}(MP)\,dt\,. \tag{127}$$

1.3.2. *Information incomplète.* On considère maintenant le cas où le controleur ne peut utiliser que des commandes ne dépendant que des mesures $y(\tau)$ passées.

Filtre de Kalman. On cherche d'abord à calculer l'espérance conditionnelle de l'état:

$$\hat{x}(t) = \mathbb{E}(x(t) \mid y(\tau),\tau < t)\,. \tag{128}$$

Elle peut être calculée en temps réel en intégrant les équations du célèbrissime *filtre de Kalman*:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})\,, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0\,, \tag{129}$$

où le gain de Kalman K est donné en fonction de la matrice de covariance d'erreur du filtre

$$\Sigma(t) = \mathbb{E}[(x(t) - \hat{x}(t))(x^t(t) - \hat{x}^t(t)) \mid y(\tau),\tau < t] \tag{130}$$

par la formule duale de (122)

$$K = (\Sigma C^t + L)N^{-1} \tag{131}$$

et Σ est elle même donnée par l'équation de Riccati duale de de (118):

$$\dot{\Sigma} = \Sigma A^t + A\Sigma - (\Sigma C^t + L)N^{-1}(C\Sigma + L^t) + M\,, \quad \Sigma(0) = \Sigma_0\,, \tag{132}$$

qui peut encore s'écrire

$$\dot{\Sigma} = \Sigma\tilde{A}^t + \tilde{A}\Sigma - \Sigma C^t N^{-1} C\Sigma + \widetilde{M}\,, \quad \Sigma(0) = \Sigma_0\,. \tag{133}$$

Formules non homogènes. La question d'éventuelles formules non homogènes ne se pose pas ici de façon similaire à celle du problème de commande. On a déjà pris en compte une espérance $\mathbb{E}x(0) = \hat{x}_0 \neq 0$. Si il y a en outre une espérance non nulle $\mathbb{E}v(t) = \bar{v}(t) \neq 0$, concernant la dynamique, on absorbe $D\bar{v}$ dans un terme f comme ci-dessus, et concernant les mesures, on utilise $y - E\bar{v}$ au lieu de y. Il ne reste qu'à ajouter f dans le membre de droite de (129), et rien d'autre n'est changé.

Principe de séparation. On a alors le grand théorème dit *principe de séparation*: la stratégie optimale est obtenue en remplaçant x par $\hat{x}$ dans la loi optimale déterministe (121) ou (122):

$$u(t) = \varphi^*(t,\hat{x}(t)) = -F(t)\hat{x}(t)\,. \tag{135}$$

La valeur optimale du critère est alors

$$\min_{\varphi} G(\varphi) = \operatorname{tr}(\Sigma_0 P(0)) + \int_0^T \operatorname{tr}(MP + \Sigma PBR^{-1}B^t P)\,dt\,. \tag{136}$$

Horizon infini. Nous considérons le cas où toutes les matrices du système sont constantes, le temps se déroule de $-\infty$ à $+\infty$. Aux hypothèses faites pour la commande, on doit ajouter

(3) la paire (C, A) est detectable,

(4) la paire $(\tilde{A}, \widetilde{M})$ est stabilisable.

Tous les résultats ci-dessus demeurent, en remplaçant P par sa version stationnaire et dualement Σ par sa version stationnaire qui est la solution maximale de l'équation de Riccati algébrique

$$\Sigma A^t + A\Sigma - (\Sigma C^t + L)N^{-1}(C\Sigma + L^t) + M = 0\,, \tag{137}$$

qui est la seule solution positive définie de cette équation, la seule qui stabilise $A - KC$, et peut être obtenue comme limite quand $t \to \infty$ de la solution de l'équation (différentielle) de Riccati (132) initialisée en $\Sigma(0) = 0$.

1.4. **Commande minimax.** On ne met plus de structure de processus stochastique sur x_0 et les perturbations inconnues. Celles-ci sont seulement supposées de carré sommable sur $[0,T]$. Il est naturel dans différents contextes de considérer le critère paramétrisé par un nombre positif γ:

$$J_\gamma(x_0; u(\cdot), w(\cdot)) = \|\zeta\|^2 - \gamma^2\|\omega\|^2\,, \tag{138}$$

soit de façon plus explicite:

$$J_\gamma = \int_0^T \left[(x^t(t)\; u^t(t)) \begin{pmatrix} Q & S \\ S^t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - \gamma^2\|w(t)\|^2 \right] dt + \|x(T)\|_X^2 - \gamma^2\|x_0\|_Y^2\,. \tag{139}$$

Le critère qu'on cherchera à minimiser sera alors $\sup_{\omega\in\Omega} J_\gamma(u(\cdot),\omega)$, ou plus précisément, pour prendre en compte l'information disponible $z(t)$ pour former la commande $u(t) = \varphi(t,z(t))$,

$$G(\varphi) = \sup_{\omega\in\Omega} J_\gamma(\varphi,\omega)\,. \tag{140}$$

(Le cadre le plus naturel —mais pas le plus classique— consiste à considérer qu'on a mis une *mesure de coût* normale de paramètres $\gamma^2 I$ sur ω, et qu'on considère une *frayeur mathématique* notée $\mathbb{F}$. En effet, la formule (140) ci-dessus s'écrit alors

$$G(\varphi) = \mathbb{F}_\omega J(\varphi,\omega) \tag{141}$$

qui est totalement semblable à (126). Nous n'utiliserons pas ces notations.)

1.4.1. *Information complète.* La solution du problème en feedback d'état est donnée par des formules analogues au cas stochastique. Elles font intervenir une matrice positive (semi-)définie $P(t)$ solution de l'équation de Riccati

$$-\dot{P} = P\bar{A} + \bar{A}^t P - P(BR^{-1}B^t - \gamma^{-2}M)P + \bar{Q}\,, \quad P(T) = X\,, \tag{142}$$

ou, avec la même condition terminale,

$$-\dot{P} = PA + A^t P - (PB + S)R^{-1}(B^t P + S^t) + \gamma^{-2}PMP + Q\,, \tag{143}$$

et le même gain (mais avec un P différent)

(145) $$F = R^{-1}(B^tP + S^t)\,.$$

Le critère (140) est fini si et seulement si

(1) l'équation de Riccati(142) a une solution sur $[0,T]$,

(2) $P(0) < \gamma^2 Y$,

ceci se produit pour γ suffisamment grand, alors une commande optimale et une perturbation la pire sont données par

(146) $$\begin{array}{rcccl} u(t) & = & \varphi^*(t,x(t)) & = & -F(t)x(t)\,, \\ w(t) & = & \psi^*(t,x(t)) & = & \gamma^{-2}D^tP(t)x(t) \end{array}$$

et la valeur optimale du critère est 0.

En fait, la seconde condition du résultat ci-dessus est due à l'opération de maximisation en x_0. Pour le problème en information parfaite, on aurait du retirer le terme en $-\gamma^2\|x_0\|_Y^2$ et l'opération de maximisation en x_0. Le résultat s'énonce alors sans la deuxième condition ci-dessus, et la valeur optimale du critère est $\|x_0\|_{P(0)}^2$.

1.4.2. *Information incomplète.* On considère maintenant des commandes qui ne doivent dépendre que des valeurs passées de la mesure y. On introduit un observateur

(147) $$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\varphi^*(\hat{x}) + D\psi^*(\hat{x}) + K(y - \hat{y}), \quad \hat{x}(0) = 0\,,$$

avec

(148) $$K = \left(I - \gamma^{-2}\Sigma P\right)^{-1}(\Sigma C^t + L)N^{-1}$$

et naturellement

(149) $$\hat{y} = C\hat{x} + E\psi^*(\hat{x}) = (C + \gamma^{-2}L^tP)\hat{x}\,.$$

La matrice $\Sigma(t)$ est obtenue comme solution de l'équation de Riccati duale de (142) ou (143):

(150) $$\dot{\Sigma} = \tilde{A}\Sigma + \Sigma\tilde{A}^t - \Sigma(C^tN^{-1}C - \gamma^{-2}Q)\Sigma + \widetilde{M}\,, \quad \Sigma(0) = Z\,,$$

ou, avec la même condition initiale

(151) $$\dot{\Sigma} = A\Sigma + \Sigma A^t - (\Sigma C^t + L)N^{-1}(C\Sigma + L^t) + \gamma^{-2}\Sigma Q\Sigma + M\,.$$

Principe de séparation. On a de nouveau un principe de séparation, ou plutôt déquivalence à la certitude, en ce qu'une commande minimax est alors obtenue comme

(152) $$u^*(t) = \varphi^*(t,\hat{x}(t)) = -R^{-1}(B^tP + S^t)\hat{x}(t)$$

Plus précisément, on peut affirmer que si

(1) l'équation (142) a une solution $P(\cdot)$ sur $[0,T]$,

(2) l'équation (150) a une solution $\Sigma(\cdot)$ sur $[0,T]$,

(3) si en outre ces solutions satisfont $\rho(\Sigma P) < \gamma^2$ sur $[0,T]$,

alors les équations (142), (150), (147), (148), (149), (152) donnent une commande minimax. En outre, il y aura alors une solution pour tout $\gamma' > \gamma$. Si au contraire, l'une des conditions ci-dessus est violée, le critère (140) sera infini pour toute commande $u(\cdot)$, et il en ira de même pour tout $\gamma' < \gamma$.

Horizon infini. Nous considérons maintenant le cas où toutes les matrices du système sont constantes, le temps se déroule de $-\infty$ à $+\infty$. On suppose en outre que la paire (A,D) est stabilisable, et la paire (H,A) détectable, alors,

(1) s'il existe une solution positive définie P de l'équation de Riccati algébrique induite par (142) en y faisant $\dot{P} = 0$,

(2) s'il existe une solution positive définie Σ de l'équation de Riccati algébrique induite par (150) en y faisant $\dot{\Sigma} = 0$,

(3) si ces solutions satisfont $\rho(\Sigma P) < \gamma^2$,

les formules (147), (148), (149), (152) où P et Σ représentent les *plus petites solutions positives définies* de (142) et (150) respectivement, donnent une commande minimax. En outre, ces P et Σ peuvent être obtenus comme limite des solutions des équations différentielles de Riccati correspondantes, intégrées depuis 0 la première pour $t \to -\infty$ la seconde pour $t \to +\infty$. Enfin, si la paire $(\bar{A},B)$ est stabilisable et la paire $(C,\tilde{A})$ détectable, pour des γ suffisamment petits une telle solution existe.

Remarques finales. On remarque que[9]

- la même dualité que dans le cas stochastique se retrouve ici entre les équations de la commande et celles de l'observation,
- si on met formellement $\gamma^{-2} = 0$ dans les équations de la commande minimax, on retrouve les formules du cas stochastique.

9. On ne peut pas dire que ces faits soient complètement élucidés

2. Temps discret

On utilisera largement le parallèle avec le temps continu. Il est donc conseillé de regarder les parties homologues du premier chapitre. Dans toute la mesure du possible, chaque formule 2xx du cas discret est l'analogue de la formule 1xx du cas continu. Le parallèle s'effondre en (2.5)

2.1. **Le système.**

2.1.1. *Les variables.* Les variables sont les mêmes que dans le cas continu, avec les mêmes relations d'ordre sur leurs dimensions. Toutes fois, les hypothèses de régularité en t disparaissent puisqu'on a maintenant affaire à des suites. Pour distinguer un peu les deux cas, on adoptera les notations u_t, à la place de $u(t)$, $\{u_t\}$ à la place de $u(\cdot)$, et de même pour w, x, y et z.

2.1.2. *Les coefficients.* Les coefficients sont les mêmes que dans le cas continu, avec les mêmes hypothèses sur le rang des matrices. L'hypothèse de régularité en t disparait puisqu'on a maintenant des suites de matrices. Enfin, on prendra (les notations, notamment de normes, sont reprises de la partie 1) :

(206) $$\zeta = \begin{pmatrix} \{z_t\} \\ x_T \end{pmatrix} \in l^2([0,T-1] \to \mathbb{R}^q) \times \mathbb{R}^n_X ,$$

et de même

(208) $$\omega = \begin{pmatrix} x_0 \\ \{w_t\} \end{pmatrix} \in \Omega = \mathbb{R}^n_Y \times l^2([0,T-1] \to \mathbb{R}^\ell) .$$

2.1.3. *Les équations.* Les équations du système s'écrivent

(210) $$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Dw_t ,$$

(211) $$y_t = Cx_t + Ew_t ,$$

(212) $$z_t = Hx_t + Gu_t .$$

2.2. **Le problème sans perturbation.**

On examine ici le cas où w n'est pas présent, ou, de manière équivalente, où $D = 0$. À nouveau, dans ce cas on ignore y.

On cherchera toujours la commande qui *minimise* le critère.

2.2.1. *Le critère.* On introduit

(213) $$J(x_0; \{u_t\}) = \|\zeta\|^2 = \|x_T\|^2_X + \sum_{t=0}^{T-1} \begin{pmatrix} x_t^t & u_t^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & S \\ S^t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ u_t \end{pmatrix} .$$

2.2.2. *Commande optimale déterministe (en boucle fermée).* On introduit l'équation de Riccati discrète, qui peut prendre des formes assez différentes (en raison d'identités algébriques). Nous ne donnons que quelques unes d'entre elles:

(218) $$P_t = A^t P_{t+1} A - (A^t P_{t+1} B + S)(B^t P_{t+1} B + R)^{-1}(B^t P_{t+1} A + S^t) + Q , \quad P_T = X ,$$

ou

(219) $$P_t = \bar{A}^t P_{t+1} \bar{A} - \bar{A}^t P_{t+1} B(R + B^t P_{t+1} B)^{-1} B^t P_{t+1} \bar{A} + \bar{Q} , \quad P_T = X ,$$

ou

(220) $$P_t = \bar{A}^t [P_{t+1}^{-1} + BR^{-1}B^t]^{-1} \bar{A} + \bar{Q} , \quad P_T = X .$$

La commande optimale est alors donnée en boucle fermée par

(221) $$u_t^* = \varphi_t^*(x_t) = -F_t x_t ,$$

où F peut prendre deux formes équivalentes [10]:

(222) $$F_t = (R + B^t P_{t+1} B)^{-1}(B^t P_{t+1} A + S^t) = -R^{-1}[B^t(P_{t+1} + BR^{-1}B^t)^{-1}\bar{A} + S^t]\,.$$

On a aussi

(223) $$\min_{\{u_t\}} J(x_0;\{u_t\}) = \|x_0\|^2_{P_0} = x_0^t P_0 x_0\,.$$

Horizon infini. On considère ici le cas où toutes les matrices considérées sont constantes, $T=\infty$, et naturellement le terme en x_T est absent:

(224) $$J(x_0;\{u_t\}) = \|z\|^2_{l^2([0,\infty]\to\mathbb{R}^q)}$$

Sous les hypothèses complémentaires

(1) La paire (A,B) est stabilisable [11],

(2) La paire $(\bar{Q},\bar{A})$ est détectable [12],

la solution optimale est encore donnée par (221),(222) où F est constante, et P_{t+1} est remplacée par la la solution maximale (au sens des matrices définies) P de l'équation de Riccati algébrique

(225) $$P = A^t P A - (A^t P B + S)(R + B^t P B)^{-1}(B^t P A + S^t) + Q$$

ou la forme équivalente obtenue à partir de (219) ou (220). C'est la seule solution de cette équation qui soit positive définie, la seule qui rende stable la matrice $A - BF$, et elle peut être obtenue comme limite quand $t \to -\infty$ de la solution de l'équation de Riccati (218) ou (219) intégrée depuis $P_0 = 0$.

2.2.3. *Les formules non homogènes.* On peut avoir l'usage d'un critère non homogène, par exemple de la forme

$$J = \|x_T - \xi\|^2 + \sum_{t=0}^{T-1}(\|x_t - x_d\|^2_Q + \|u_t - u_d\|^2)\,,$$

où x_d et u_d peuvent représenter des trajectoires autour des quelles on désire réguler le système (non nécessairement constantes). On peut aussi avoir un terme d'excitation connu dans la dynamique (par exemple une espérance non nulle pour le bruit de dynamique en commande stochastique).

On donne les formules correspondant au problème plus général suivant:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + f_t\,,$$

$$J = \|x_T\|^2_X + 2(\xi,x_T) + \sum_{t=0}^{T-1}\left[(x_t^t\; u_t^t)\begin{pmatrix} Q & S \\ S^t & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ u_t\end{pmatrix} + 2(q,x_t) + 2(r,u_t)\right]\,.$$

Ici, ξ est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$, f, q et r des vecteurs de taille adéquate, éventuellement variables avec t (On a renoncé à les noter f_t, q_t et r_t par homogénéité avec le fait que nous n'avons pas rappelé non plus dans la notation que les autres paramètres du système, les matrices qui le définissent, peuvent eux aussi être fonction de t.)

La valeur optimale du critère est $V(0,x_0)$ avec

$$V(t,x) = \|x\|^2_{P_t} + 2(p_t,x) + \pi_t$$

10. vérifier l'identité des deux expressions ci-dessous, comme des deux formes de l'équation de Riccati discrète, est un exercice instructif.

11. donc complètement accessible suffit

12. donc complètement observable suffit

et la commande optimale peut s'écrire $u_t = \varphi_t^*(x_t)$ avec, par exemple, (à nouveau plusieurs formules équivalentes peuvent être données)

$$\varphi_t^*(x) = -(R + B^t P_{t+1} B)^{-1}[(B^t P_{t+1} A + S^t)x + B^t(P_{t+1} f + p_{t+1}) + r]\,.$$

La matrice symétrique P_t est encore donnée par l'équation de Riccati sous une de ses formes équivalentes, le vecteur p_t est donné par l'équation

$$\begin{aligned} p_t = [A^t - (A^t P_{t+1} B + S)(B^t P_{t+1} B + R)^{-1} B^t](p_{t+1} + P_{t+1} f) \\ - (A^t P_{t+1} B + S)(B^t P_{t+1} B + R)^{-1} r + q\,, \qquad p_T = \xi\,, \end{aligned}$$

et π_t est donné par une simple somme

$$\begin{aligned} \pi_t = \textstyle\sum_{k=t}^{T-1} p_{k+1}^t f + f^t p_{k+1} + f^t P_{k+1} f \\ - (f^t P_{k+1} B + p_{k+1}^t B + r^t)(B^t P_{k+1} B + R)^{-1}(B^t P_{k+1} f + B^t p_{k+1} + r)\,. \end{aligned}$$

2.3. **Commande stochastique.** La suite $\{w_t\}$ est supposée être un processus stochastique blanc, —c'est à dire une suite de variables aléatoires indépendantes—, gaussien, normal (moyenne nulle, covariance identité). Voir le commentaire dans la partie 1.

Pour le problème en information imparfaite, x_0 est aussi supposé être une variable aléatoire gaussienne, d'espérance $\hat{x}_0$ et de covariance Σ_0.

Le critère J (213) est maintenant une variable aléatoire, on s'intéresse donc à la minimisation de son espérance mathématique $\mathbb{E}_\omega J(\{u_t\},\omega)$, ou plus exactement, pour tenir compte du l'information z_t disponible pour former la commande $u(t) = \varphi_t(z_t)$, (comme dans le cas continu)

(226) $$G(\varphi) = \mathbb{E}_\omega J(\varphi,\omega)\,.$$

2.3.1. *Information complète.* Le problème en *information complète* est celui où le controleur ayant accès à x_t en temps réel, il peut utiliser des feedbacks d'état $u_t = \varphi_t(x_t)$.

La solution de ce problème est la même que la solution *en boucle fermée* du problème sans perturbation. Elle est donc donnée par (218) ou (219) et (221),(222). Par contre, (223) doit être remplacée par

(227) $$\min_\varphi G(\varphi) = \|x_0\|^2_{P(0)} + \sum_{t=0}^{T-1} \mathrm{tr}(M P_{t+1})$$

2.3.2. *Information incomplète.* On considère maintenant le cas où le controleur ne peut utiliser que des commandes ne dépendant que des mesures y_τ passées.

Filtre de Kalman. On cherche d'abord à calculer l'espérance conditionnelle de l'état [13]

(228) $$\hat{x}_t = \mathbb{E}(x_t \mid y_\tau, \tau < t)\,.$$

Elle peut être calculée en temps réel en intégrant les équations du célèbrissime *filtre de Kalman* à partir de $\hat{x}_0$ donné:

(229) $$\hat{x}_{t+1} = A\hat{x}_t + Bu_t + K(y_t - C\hat{x}_t)\,,$$

où le gain de Kalman K est donné en fonction de la matrice de covariance d'erreur du filtre

(230) $$\Sigma_t = \mathbb{E}[(x_t - \hat{x}_t)(x_t^t - \hat{x}_t^t) \mid y_\tau, \tau < t]$$

par la formule duale de (222)

(231) $$K = (A\Sigma_t C^t + L)(N + C\Sigma_t C^t)^{-1}$$

13. Le fait qu'on conditionne par $\tau < t$ et non pas $\tau \leq t$, qui est anecdotique en temps continu, est essentiel ici, tant au plan pratique que théorique.

(ou une formule duale de l'autre expression de F, laissée en exercice) et Σ_t est elle même donnée par l'équation de Riccati duale de de (218) (ou une des formes équivalentes) intégrée depuis Σ_0 donnée:

$$\Sigma_{t+1} = A\Sigma_t A^t - (A\Sigma_t C^t + L)(C\Sigma_t C^t + N)^{-1}(C\Sigma_t A^t + L^t) + M\,, \tag{232}$$

ou

$$\Sigma_{t+1} = \tilde{A}\Sigma_t\tilde{A}^t - \tilde{A}\Sigma_t C^t(C\Sigma_t C^t + N)^{-1}C\Sigma_t\tilde{A}^t + \widetilde{M}\,, \tag{233}$$

ou encore

$$\Sigma_{t+1} = \tilde{A}[\Sigma_t^{-1} + C^t N^{-1} C]^{-1}\tilde{A}^t + \widetilde{M}\,. \tag{234}$$

2.3.3. *Formules non homogènes.* La question d'une formulation non homogène ne se pose pas comme en commande. On a déja pris en compte le caractère non homogène dû à la condition initiale $\hat{x}_0 \neq 0$. S'il y a une espérance $\mathbb{E}v_t \neq 0$, elle entre de façon élémentaire dans la dynamique du filtre. Quant au bruit de mesure, si son espérance est non nulle, on commence par la retirer à y.

Principe de séparation. On a alors le grand théorème dit *principe de séparation*: la stratégie optimale est obtenue en remplaçant x par $\hat{x}$ dans la loi optimale déterministe (221):

$$u(t) = \varphi_t^*(\hat{x}_t) = -F_t\hat{x}_t\,. \tag{235}$$

La valeur optimale du critère est alors

$$\min_{\varphi} G(\varphi) = \|\hat{x}_0\|^2_{P_0} + \sum_{t=0}^{T-1}\mathrm{tr}[MP_{t+1} + \Sigma_t A^t P_{t+1}B(B^tP_{t+1}B + R)^{-1}B^tP_{t+1}A]\,. \tag{236}$$

Horizon infini. Nous considérons le cas où toutes les matrices du système sont constantes, le temps se déroule de $-\infty$ à $+\infty$. Aux hypothèses faites pour la commande, on doit ajouter

(3) la paire (C,A) est détectable,

(4) la paire $(\tilde{A},\widetilde{M})$ est stabilisable.

Tous les résultats ci-dessus demeurent, en remplaçant P_t par sa version stationnaire et dualement Σ_t par sa version stationnaire qui est la solution maximale de l'équation de Riccati algébrique

$$\Sigma = \tilde{A}\Sigma\tilde{A}^t - \tilde{A}\Sigma C^t(N + C\Sigma C^t)^{-1}C\Sigma\tilde{A}^t + \widetilde{M}\,, \tag{237}$$

(ou de sa version obtenue à partir de (233)) qui est la seule solution positive définie de cette équation, la seule qui stabilise $A - KC$, et peut être obtenue comme limite quand $t \to \infty$ de la solution de léquation de Riccati (232) initialisée en $\Sigma_0 = 0$.

2.4. **Commande minimax.** On ne met plus de structure de processus stochastique sur x_0 et les perturbations inconnues. Il est naturel dans différents contextes de considérer le critère paramétrisé par un nombre positif γ:

$$J_\gamma(x_0;\{u_t\},\{w_t\}) = \|\zeta\|^2 - \gamma^2\|\omega\|^2\,, \tag{238}$$

soit, de façon plus explicite:

$$J_\gamma = \|x_T\|^2_X + \sum_{t=0}^{T-1}\left[(x_t^t\; u_t^t)\begin{pmatrix} Q & S\\ S^t & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t\\ u_t\end{pmatrix} - \gamma^2\|w_t\|^2\right] - \gamma^2\|x_0\|^2_Y\,. \tag{239}$$

Le critère qu'on cherchera à minimiser sera alors $\sup_{\omega\in\Omega} J_\gamma(\{u_t\},\omega)$, ou, pour tenir compte de l'information

$$G(\varphi) = \sup_{\omega\in\Omega} J_\gamma(\varphi,\omega)\,. \tag{240}$$

(Voir commentaire en partie 1.)

2.4.1. *Information complète.* La solution du problème en feedback d'état est donnée par des formules analogues au cas stochastique. Elles font intervenir une matrice positive (semi-)définie P_t solution de l'équation de Riccati où intervient la matrice

(241) $$\Pi_{t+1} = \begin{pmatrix} R + B^t P_{t+1} B & B^t P_{t+1} D \\ D^t P_{t+1} B & -\gamma^{-2} I + D^t P_{t+1} D \end{pmatrix}$$

(242) $$P_t = \bar{A}^t P_{t+1} \bar{A} - \bar{A}^t P_{t+1} (\, B \quad D\,) \Pi_{t+1}^{-1} \begin{pmatrix} B^t \\ D^t \end{pmatrix} P_{t+1} \bar{A} + \bar{Q} \,, \quad P_T = X \,,$$

ou, avec la même condition terminale

(243) $$P_t = A^t P_{t+1} A - (\, A^t P_{t+1} B + S \quad A^t P_{t+1} D\,) \Pi_{t+1}^{-1} \begin{pmatrix} B^t P_{t+1} A + S^t \\ D^t P_{t+1} A \end{pmatrix} + Q$$

qu'on peut encore écrire

(244) $$P_t = \bar{A}^t [P_{t+1}^{-1} + B R^{-1} B^t - \gamma^{-2} M]^{-1} \bar{A} + \bar{Q} \,, \quad P_T = X \,.$$

(Formule plus naturelle si on se souvient que $M = DD^t$.) Les stratégies optimales (pour u et w) peuvent à nouveau prendre plusieurs formes :

$$\begin{pmatrix} u_t^* \\ w_t^* \end{pmatrix} = -\Pi_{t+1}^{-1} \begin{pmatrix} B^t P_{t+1} A + S^t \\ D^t P_{t+1} A \end{pmatrix} x$$

que nous n'utiliserons guère, ou en termes d'un gain de feedback

(245) $$F_t = R^{-1} [B^t (P_{t+1}^{-1} + B R^{-1} B^t - \gamma^{-2} M)^{-1} \bar{A} + S^t]$$

par

(246) $$\begin{array}{rclcl} u_t^* & = & \varphi_t^*(x_t) & = & -F_t x_t \,, \\ w_t^* & = & \psi_t^*(x_t) & = & \gamma^{-2} D^t (P_{t+1}^{-1} + B R^{-1} B^t - \gamma^{-2} M)^{-1} \bar{A} x \,. \end{array}$$

On utilisera la condition (donnée sous deux formes équivalentes):

(247) $$\gamma^2 I - D^t P_{t+1} D > 0 \quad \text{soit aussi} \quad P_{t+1}^{-1} - \gamma^{-2} M > 0 \,,$$

Le résultat précis est que si

(1) l'équation de Riccati (242) ou (243) admet une solution $\{P_t\}$ telle que pour tout $t \in [0, T-1]$, on ait (247),

(2) $P_0 < \gamma^2 Y$

le critère (240) est borné et les formules ci-dessus donnent une stratégie minimax, et il en va de même pour tout $\gamma' > \gamma$. Dans le cas contraire, le critère n'est jamais borné, non plus que pour aucun $\gamma' < \gamma$. (Voir la remarque dans la partie 1.)

2.5. **Information incomplète.** On considère maintenant des commandes qui ne doivent dépendre que des valeurs strictement passées de la mesure y. La forme de la stratégie minimax et les conditions d'existence sont notablement différentes si on autorise u_t à dépendre aussi de la sortie y_t au même moment. (Dans ce cas, la condition d'existence à la même forme que pour le problème en temps continu : $\rho(\Sigma P) < \gamma^2$.)

La théorie présentée ci-dessous est moins élégante que celle du cas continu. Elle correspond à un état intermédiaire de cette dernière, mais les derniers calculs qui mettent la théorie "continue" sous sa forme achevée n'ont, pour le moment, pas pu être reproduit dans la théorie discrète.

On a besoin, pour simplifier les expressions, de la duale de Π:

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} N + C\Sigma_t C^t & C\Sigma_t H^t \\ H\Sigma_t C^t & -\gamma^2 I + H\Sigma_t H^t \end{pmatrix},$$

et il sera utile de noter

$$\Delta_t = (\Sigma_t^{-1} + C^t N^{-1} C - \gamma^{-2} Q)^{-1}$$

L'observateur nécessite un “état” intermédiaire que nous notons $\check{x}_t$ solution d'une équation de type “observateur”:

(248) $$\check{x}_{t+1} = A\check{x}_t + Bu_t + \gamma^{-2}\tilde{A}\Delta_t(Q\check{x} + Su) + (\tilde{A}\Delta_t C^t + L)N^{-1}(y_t - C\check{x}_t), \quad \check{x}_0 = 0,$$

et la variable qui sera utilisée dans les stratégies optimales est

(249) $$\hat{x}_t = (I - \gamma^{-2}\Sigma_t P_t)^{-1}\check{x}_t.$$

Dans ces équations, Σ_t est donnée par une équation de Riccati duale de (242) ou (243) ou (244):

(250) $$\Sigma_{t+1} = \tilde{A}\Sigma_t\tilde{A}^t - \tilde{A}\Sigma_t(C^t\ H^t)\Gamma_t^{-1}\begin{pmatrix} C \\ H \end{pmatrix}\Sigma_t\tilde{A}^t + \widetilde{M}, \quad \Sigma_0 = Z,$$

ou, avec la même condition initiale,

(251) $$\Sigma_{t+1} = A\Sigma_t A^t - (\,A\Sigma_t C^t + L \quad A\Sigma_t H^t\,)\Gamma_t^{-1}\begin{pmatrix} C\Sigma_t A^t + L^t \\ H\Sigma_t A^t \end{pmatrix} + M,$$

ou

(252) $$\Sigma_{t+1} = \tilde{A}[\Sigma_t^{-1} + C^t N^{-1} C - \gamma^{-2} Q]^{-1}\tilde{A}^t + \widetilde{M}, \quad \Sigma_0 = Z,$$

dont on a besoin que la solution satisfasse

(253) $$\gamma^2 I - H\Sigma_t H^t > 0 \quad \text{soit encore} \quad \Sigma_t^{-1} - \gamma^{-2} Q > 0.$$

Pour énoncer le résultat complet, il nous faut encore introduire les quantités intermédiaires

$$\widetilde{P}_t = \bar{A}^t(P_{t+1}^{-1} - \gamma^{-2} M)^{-1}\bar{A} + \bar{Q}$$

et

$$\widetilde{\Sigma}_t = \tilde{A}(\Sigma_t^{-1} - \gamma^{-2} Q)^{-1}\tilde{A}^t + \widetilde{M},$$

et les conditions

(254) $$\widetilde{P}_t > 0 \quad \text{et} \quad \rho(\Sigma_t\widetilde{P}_t) < \gamma^2,$$

et

(255) $$\widetilde{\Sigma}_{t+1} > 0 \quad \text{et} \quad \rho(\widetilde{\Sigma}_{t+1} P_{t+1}) < \gamma^2.$$

Le résultat visé est: si les équations de Riccati (242) ou (243) et (250) ou (251) ont des solutions vérifiant soit (247) et (254), soit (de manière équivalente) (253) et (255) pour tout $t = 0, \ldots, T-1$, le critère est borné, et une commande minimax est obtenue en remplaçant x_t par $\hat{x}_t$ donné par (248) et (249) dans (246). Si une de ces conditions est violée, le critère sera infini pour toute commande admissible.

Horizon infini. Sous les mêmes hypothèses que dans le cas à temps continu, les résultats se transportent en régime stationnaire en remplaçant partout P_t et Σ_t par leurs versions stationnaires, qui sont les plus petites solutions positives définies des équations de Riccati algébriques, obtenues par passage à la limite dans les équations aux différences.

Remarques finales. Comme dans le cas continu, on a encore

- la même dualité que dans le cas stochastique se retrouve ici entre les équations de la commande et celles de l'observation,
- si on met formellement $\gamma^{-2} = 0$ dans les équations de la commande minimax, on retrouve les formules du cas stochastique, comme le montre la forme (244,245) des formules.

3. UNE BRÈVE BIBLIOGRAPHIE

3.1. Théorie linéaire quadratique gaussienne (LQG). On recommande le texte d'introduction

– Brigitte d'Andréa-Novel et Michel Cohen de Lara : *Cours d'Automatique, Commande linéaire des systèmes*, (2^{me} édition), Presses de l'École des Mines de Paris, 2000.

On pourra aussi consulter

– Pierre Faurre : *Navigation inertielle optimale et filtrage statistique*, Dunod, Paris, 1971.
– Pierre Faurre et Maurice Robin : *Éléments d'Automatique*, (2^{me} édition) Dunod, Paris, 1984.
– Pierre Bernhard et Guy Cohen : *Commande optimale, décentralisation et jeux dynamiques*, Dunod, Paris, 1976.

Pour une théorie complète en Français, voir

– Alain Bensoussan : *Filtrage optimal des systèmes linéaires*, Dunod, Paris, 1971.
– Pierre Faurre, Michel Clerget et François Germain : *Opérateurs rationnels de type positif et applications*, Dunod, Paris, 1975 (?)

3.2. Théorie minimax ou "$\mathcal{H}_\infty$". Cette théorie est beaucoup plus récente. Les textes didactiques en Français manquent. La monographie de référence est

– Tamer Başar and Pierre Bernhard : $\mathcal{H}^\infty$*-optimal control and related minimax design problems : a dynamic game approach* (second ed.), Birkhauser, Boston, 1995.

On recommande aussi une preuve simple et unifiée des deux principes de séparation dans

– Pierre Bernhard : "A separation theorem for expected value and feared value discrete time control", *COCV*, **1**, pp 191–206, SMAI, `http://www.emath.fr/cocv/`, 1996.
– Pierre Bernhard : "Minimax —or feared value— L^1/L^∞ control" *Theoretical Computer Science*, special issue on $(\max,+)$ algebra, 2000.

Enfin deux références introuvables...

– Pierre Bernhard : "Introduction à la commande robuste", cours ISIA 1999.
– Pierre Bernhard : "Survey of Linear Quadratic Robust Control", in Mark Salmon editor, a volume to appear, Cambridge University Press.