

Commande

P. Morin et C. Samson
INRIA
2004, Route des Lucioles
06902 Sophia-Antipolis Cedex

1 Introduction

Le chapitre précédent a fait le point sur les différentes méthodes de planification de mouvement pour les robots mobiles. La question qui se pose alors est: comment faire réaliser ces mouvements par le système physique, via la commande des actionneurs dont il est équipé. L'objet de ce chapitre est d'apporter des éléments de réponse à cette question en présentant des stratégies de commande simples et efficaces. Une première approche consisterait à appliquer directement les lois de commande obtenues précédemment lors de la planification. Toutefois, il est bien connu en automatique que ce type de commande en boucle ouverte est insuffisant pour garantir des propriétés de robustesse nécessaires pour les applications. C'est pourquoi les méthodes présentées ici sont basées sur la commande par retour d'état. Elles supposent donc que l'on soit capable de mesurer les variables utilisées dans la boucle de commande (typiquement la position et l'orientation du robot mobile par rapport à un repère fixe ou à une trajectoire sur laquelle on souhaite s'asservir). Tout au long de ce chapitre, nous ferons l'hypothèse que ces mesures sont accessibles de façon continue, et non bruitées. D'une façon plus générale, les considérations de robustesse seront très peu évoquées. Une des raisons pour cela est que la majeure partie des approches présentées relèvent de la commande des systèmes linéaires. Les retours d'état synthétisés héritent alors des propriétés fortes de robustesse de ces systèmes. Les résultats peuvent en outre être affinés, si besoin est, en faisant appel à des techniques d'automatique plus élaborées.

La commande des robots mobiles a fait l'objet de nombreuses recherches ces dix dernières années. En particulier, les propriétés de non-holonômie ont conduit à l'utilisation de techniques de commande très non-linéaires. Ces approches seront abordées, mais nous en avons volontairement limité l'exposé afin de présenter prioritairement des techniques plus classiques (i.e. faisant principalement appel aux outils de l'automatique linéaire) dont les bases, à la fois pratiques et théoriques, sont mieux établies.

Par soucis de simplicité, les méthodes de commande seront développées principalement pour les robots de type unicycle et de type voiture. La plupart des résultats se généralisent en fait à d'autres robots mobiles, et en particulier au système avec remorques. Nous mentionnerons les cas où de telles extensions se font directement.

Rappelons (voir Figure 1 ci-dessous) que:

1. Le **robot de type unicycle** est composé schématiquement de deux roues motrices indépendantes à l'arrière, du corps principal du robot, et d'une roue folle à l'avant (roue non commandée) destinée uniquement à assurer la stabilité du système.

2. Le **robot de type voiture** est composé d'un train moteur à l'arrière, du corps principal, et de roues de direction à l'avant.

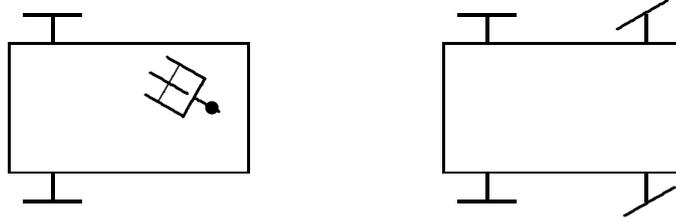


Figure 1: Robots de type unicycle et de type voiture

Notons également, comme l'illustre le schéma ci-dessous, que le robot de type voiture peut être assimilé (au moins du point de vue cinématique) à un robot unicycle suivi d'une remorque.

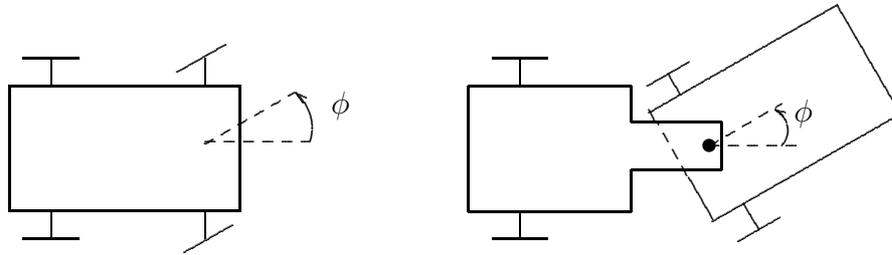


Figure 2: Analogie voiture / chariot avec remorque

Nous allons étudier dans ce chapitre les trois problèmes de commande suivants.

Suivi de chemin: Étant donné une courbe \mathcal{C} du plan, une vitesse d'avancement v_0 (non nulle) pour le robot mobile, ainsi qu'un point P fixe sur ce robot, on souhaite que le point P suive la courbe \mathcal{C} lorsque le robot roule à la vitesse v_0 . La variable que l'on doit réguler à zéro est donc la distance du point P à la courbe (i.e. la plus petite distance de P à M lorsque M parcourt \mathcal{C}). Ce type de problème correspond typiquement à la conduite sur route lorsque le conducteur cherche à maintenir une distance constante par rapport à des marquages au sol par exemple.

Stabilisation de trajectoires: Ce problème se distingue du précédent par le fait que la vitesse d'avancement du véhicule n'est plus fixée à l'avance, du fait que l'on cherche également à réguler la distance parcourue le long de la courbe \mathcal{C} . Cet objectif nécessite de doter la courbe \mathcal{C} d'une loi horaire, c'est à dire de la paramétrer par la variable temporelle t . Cela revient à définir une trajectoire $t \mapsto (x_r(t), y_r(t))$ par rapport à un repère de référence \mathcal{R}_0 . On souhaite alors réguler à zéro le vecteur d'erreur $(x(t) - x_r(t), y(t) - y_r(t))$, où $(x(t), y(t))$ désignent les coordonnées du point P dans \mathcal{R}_0 , à l'instant t . Le problème peut également être interprété comme celui consistant à asservir le véhicule à un véhicule de référence, dont la trajectoire est donnée par $t \mapsto (x_r(t), y_r(t))$.

Stabilisation de configurations fixes: Pour ce dernier problème, on se donne un repère de

référence \mathcal{R}_0 , ainsi qu'un repère lié au véhicule \mathcal{R}_1 . L'objectif est alors de réguler à zéro le vecteur position $(x(t), y(t))$ (exprimé dans \mathcal{R}_0) d'un point P lié au véhicule, ainsi que l'orientation $\theta(t)$ de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R}_0 . Ce problème est celui pour lequel les propriétés de non-holonômie interviennent de la façon la plus contraignante, et pour lequel les méthodes classiques de l'automatique linéaire se montrent insuffisantes. Les principales applications de ce problème sont liées aux manoeuvres de parking (créneau,...), et plus généralement aux applications nécessitant une immobilisation du véhicule s'accompagnant d'un positionnement précis.

Le plan de ce chapitre est le suivant. La Section 2 est consacrée au choix de modèles de commande, ainsi qu'à une modélisation spécifique pour l'étude du problème de suivi de chemin. Dans la Section 3, nous étudions les problèmes de suivi de chemin et de stabilisation de trajectoires sous une hypothèse sur le choix du point P de référence lié au robot mobile. Cette hypothèse implique que le mouvement de ce point n'est pas contraint. La résolution des problèmes de commande s'en trouve grandement simplifiée. Toutefois, en contrepartie, la stabilité de l'orientation du système n'est pas garantie, notamment lors des phases d'inversion de la vitesse d'avancement. L'hypothèse sur le choix du point P est supprimée en Section 4, et l'on reconsidère les deux problèmes étudiés précédemment, ainsi que le problème de stabilisation de configurations fixes. Des références détaillées sur les méthodes étudiées, ainsi que sur des articles permettant d'aller au delà de cette présentation, sont fournies en Section 5. Le chapitre se termine par quelques remarques de conclusion.

2 Modèles de commande

2.1 Choix du cadre cinématique

On a vu au chapitre précédent que les équations dynamiques d'un système non-holonôme s'écrivent

$$J(q)\dot{u} + N(q, u)u + G(q) = B^T(q)D(q)\Gamma, \quad (1)$$

ce à quoi il faut ajouter les équations cinématiques qui prennent en compte les contraintes non-holonômes:

$$\dot{q} = B(q)u. \quad (2)$$

Rappelons que $q \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables de configurations, $u \in \mathbb{R}^m$ correspond aux vitesses instantanées non contraintes (sa dimension m est le nombre de degrés de liberté du système, soit $m = 2$ pour les robots mobiles considérés ici), et $\Gamma \in \mathbb{R}^m$ correspond aux forces et couples moteurs appliqués, produits par les actionneurs dont le véhicule est équipé. Pour les robots mobiles rencontrés usuellement (unicycle, voiture, chariot avec remorques,...) on a de plus les propriétés suivantes:

- A. $B(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est de rang plein $m < n$,
- B. $J(q) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est inversible,
- C. $D(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est de rang plein. Cela revient à supposer que le véhicule est équipé d'autant d'actionneurs indépendants (m) qu'il y a de degrés de liberté, chacun produisant une force ou un couple. Si tel n'était pas le cas, le système serait sous-actionné et les problèmes de commande seraient beaucoup plus difficiles (voir même impossibles à résoudre dans certains cas).

Selon la terminologie consacrée en automatique, le modèle dynamique (1)–(2) est un “système de commande” du type $\dot{x} = f(x, v)$ avec $x = (q, u)$ comme vecteur d’état, et $v = \Gamma$ la commande. Le modèle cinématique (2) est également un système de commande avec q comme vecteur d’état, et u comme vecteur de commande. Nous raisonnerons exclusivement sur ce dernier dans la suite du chapitre. Par analogie avec la commande de robots manipulateurs, cela revient à utiliser un modèle de commande en vitesses, plutôt qu’un modèle de commande en couples. Les principales raisons de ce choix sont les suivantes.

1. Le modèle cinématique est plus simple que le modèle dynamique. En particulier, il ne fait pas intervenir un certain nombre de fonctions matricielles dont la connaissance précise repose sur celle des paramètres inertiels du véhicule et de ses actionneurs (masse, moments d’inertie, coefficients de réduction des moteurs électriques, etc...). Pour de nombreuses applications, il n’est pas nécessaire de connaître l’ensemble de ces termes avec précision.
2. Pour des robots à motorisation électrique, il est fréquent de disposer d’un asservissement “bas niveau” en vitesse sur les moteurs, dont la grandeur en entrée est une vitesse désirée, et ayant pour rôle d’asservir la vitesse du moteur à celle désirée. Si cet asservissement est bien conçu, l’écart entre ces deux vitesses est toujours faible, de sorte que la vitesse désirée peut à son tour être interprétée comme une variable de commande libre.
3. S’il s’avère que l’asservissement en vitesse évoqué dans le point précédent, dont le rôle est de découpler la partie dynamique de la partie cinématique du véhicule, n’est pas présent, l’équation (1) peut alors être incorporée au modèle, en considérant que les couples fournis par les moteurs sont les variables de commande dont on dispose. Du point de vue de la commande, une façon simple de procéder (du moins théoriquement) consiste à utiliser la méthode des “couples calculés” (computed torques en Anglais). Plus précisément, l’équation (1) peut être linéarisée par le changement de variable de commande $\Gamma \mapsto w$ où w est défini par

$$\Gamma = [B^T(q)D(q)]^{-1}[J(q)w + N(q, u)u + G(q)].$$

Les propriétés A, B, et C introduites précédemment assurent que Γ et w sont liés de façon bi-univoque. L’équation (1) devient alors simplement

$$\dot{u} = w. \tag{3}$$

Cette dernière équation indique que le problème de commande en couples se ramène, via la méthode des couples calculés, à un problème de commande en accélération. Il n’est généralement pas difficile de déduire une solution du problème de commande en accélération à partir d’une commande en vitesse. Par exemple,

$$w = -k(u - u^*(q, t)) + \frac{\partial u^*}{\partial q}(q, t)B(q)u + \frac{\partial u^*}{\partial t}, \quad k > 0$$

est une solution si u^* est solution du problème cinématique et est différentiable, et si

$$u = u^*(q, t) + (u(0) - u^*(q_0, 0))e^{-kt}$$

est également solution de ce problème.

Pour le robot unicycle, le modèle cinématique qui sera utilisé est:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases} \quad (4)$$

où (x, y) représente les coordonnées du point P_0 situé au milieu de l'axe des roues arrière, et θ l'orientation du robot (voir Figure 3 ci-dessous). Dans cette équation, u_1 représente l'intensité de la vitesse d'avancement du véhicule, et u_2 la vitesse instantanée de rotation du corps du véhicule. Les variables u_1 et u_2 sont elles-mêmes reliées aux vitesses de rotation des roues arrière par les relations

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{r}{2}(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \\ u_2 &= \frac{r}{2R}(\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1). \end{aligned}$$

avec r le rayon des roues, et R la longueur de l'axe arrière reliant ces roues.

Notons que ce modèle ne contient en fait qu'une partie des équations de (2). Il est cependant habituel de ne conserver dans le modèle que les variables dont la régulation présente un intérêt pratique.

Pour le robot de type voiture, le modèle utilisé sera:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{u_1}{L} \tan \phi \\ \dot{\phi} = u_2, \end{cases} \quad (5)$$

où ϕ représente l'angle de braquage du véhicule, et L la distance entre les axes des roues avant et arrière.

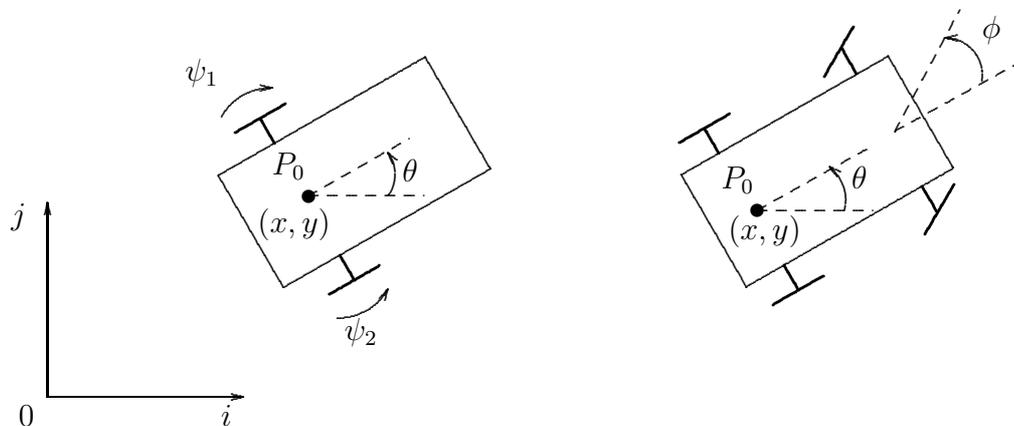


Figure 3: Variables de configuration

2.2 Modélisation dans un repère de Frénet

L'objet de cette sous-section est de généraliser les équations cinématiques précédentes lorsque le repère de référence est un repère de Frénet. Cette généralisation sera utilisée par la suite pour le

problème de suivi de chemin.

Considérons une courbe \mathcal{C} du plan ainsi que les trois repères \mathcal{R}_0 , \mathcal{R}_1 , et \mathcal{R}_s illustrés sur la Figure 4 ci-dessous.

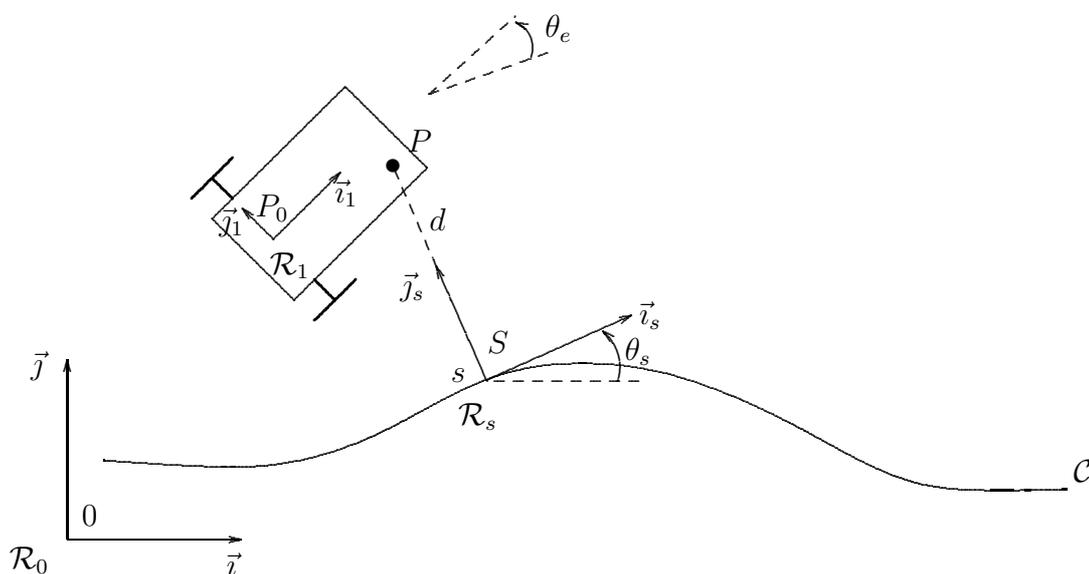


Figure 4: Représentation dans un repère de Frénet

Le repère \mathcal{R}_0 est un repère fixe, \mathcal{R}_1 est lié au robot avec pour origine le point P_0 situé au milieu de l'axe des roues arrière, et \mathcal{R}_s , indexé par l'abscisse curviligne s sur la courbe, est tel que le vecteur unitaire \vec{i}_s soit tangent à \mathcal{C} . Considérons un point P lié au robot, et soit (l_1, l_2) les coordonnées de P exprimées dans la base du repère \mathcal{R}_1 . On souhaite établir les équations de mouvement de P par rapport à la courbe \mathcal{C} . Nous introduisons pour cela trois variables: s , d , et θ_e , définies comme suit.

s représente l'abscisse curviligne du point S obtenu par projection orthogonale de P sur \mathcal{C} . Afin que ce point existe, et soit unique, le point P doit être suffisamment proche de la courbe. Plus précisément, si r désigne la borne inférieure (lorsque s parcourt la courbe \mathcal{C}) du rayon de courbure $r(s)$ de \mathcal{C} en s , P doit être situé à une distance de \mathcal{C} inférieure à r . Nous supposons dans la suite que cette condition est satisfaite.

d correspond à l'ordonnée de P dans le repère \mathcal{R}_s ; c'est aussi (au signe près) la distance de P à la courbe.

$\theta_e = \theta - \theta_s$ représente l'orientation du robot par rapport au repère \mathcal{R}_s .

Déterminons maintenant \dot{s} , \dot{d} , et $\dot{\theta}_e$. Par définition de la courbure $c(s)$ de \mathcal{C} en s , i.e. $c(s) = \partial\theta_s/\partial s$, on déduit directement de (4) que

$$\dot{\theta}_e = u_2 - \dot{s}c(s). \quad (6)$$

Étant donné que $\overrightarrow{SP} = d\vec{j}_s$, on déduit tout d'abord, en utilisant l'égalité $d\overrightarrow{OS}/dt = \dot{s}\vec{i}_s$, que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} &= \frac{\partial \overrightarrow{OS}}{\partial t} + \dot{d}\vec{j}_s + dc(s)\dot{s}\vec{i}_s \\ &= \dot{s}(1 - dc(s))\vec{i}_s + d\vec{j}_s.\end{aligned}\quad (7)$$

Par ailleurs, on a également $\overrightarrow{P_0P} = l_1\vec{i}_1 + l_2\vec{j}_1$, d'où l'on déduit, puisque $d\overrightarrow{OP_0}/dt = u_1\vec{i}_1$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} &= \frac{\partial \overrightarrow{OP_0}}{\partial t} + l_1u_2\vec{j}_1 - l_2u_2\vec{i}_1 \\ &= (u_1 - l_2u_2)\vec{i}_1 + l_1u_2\vec{j}_1 \\ &= (u_1 - l_2u_2)(\cos\theta_e\vec{i}_s + \sin\theta_e\vec{j}_s) + l_1u_2(-\sin\theta_e\vec{i}_s + \cos\theta_e\vec{j}_s) \\ &= [(u_1 - l_2u_2)\cos\theta_e - l_1u_2\sin\theta_e]\vec{i}_s + [(u_1 - l_2u_2)\sin\theta_e + l_1u_2\cos\theta_e]\vec{j}_s.\end{aligned}\quad (8)$$

En projetant les équations (7) et (8) sur \vec{i}_s et \vec{j}_s , et en utilisant également (6), on déduit finalement le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \dot{s} &= \frac{1}{1 - dc(s)}[(u_1 - l_2u_2)\cos\theta_e - l_1u_2\sin\theta_e] \\ \dot{d} &= (u_1 - l_2u_2)\sin\theta_e + l_1u_2\cos\theta_e \\ \dot{\theta}_e &= u_2 - \dot{s}c(s).\end{cases}\quad (9)$$

Ces équations sont bien une généralisation de (4). Pour le vérifier, il suffit de prendre comme point P l'origine du repère \mathcal{R}_1 (i.e. $l_1 = l_2 = 0$), et de choisir l'axe (O, \vec{i}) du repère \mathcal{R}_0 comme courbe \mathcal{C} avec $s = x$. Dans ce cas, $c(s) = 0$ pour tout s , et en posant $y \equiv d$ et $\theta \equiv \theta_e$, on retrouve exactement (4).

Pour le système de type voiture, il est facile de vérifier, en utilisant (5), que le système (9) devient

$$\begin{cases} \dot{s} &= \frac{u_1}{1 - dc(s)}[\cos\theta_e - \frac{\tan\phi}{L}(l_2\cos\theta_e + l_1\sin\theta_e)] \\ \dot{d} &= u_1[\sin\theta_e + \frac{\tan\phi}{L}(l_1\cos\theta_e - l_2\sin\theta_e)] \\ \dot{\theta}_e &= \frac{u_1}{L}\tan\phi - \dot{s}c(s) \\ \dot{\phi} &= u_2\end{cases}\quad (10)$$

(il suffit juste de remplacer $u_2 = \dot{\theta}$ dans (9) par la nouvelle valeur de $\dot{\theta}$: $u_1/L \tan\phi$). En conclusion nous avons montré:

Proposition 1 *Les équations cinématiques de l'unicycle et de la voiture, exprimées par rapport à un repère de Frénet, sont données par les systèmes (9) et (10) respectivement.*

3 Adaptation des méthodes de commande des systèmes holonomes

Dans cette section, nous considérons les problèmes de stabilisation de trajectoires et de suivi de chemin. Lorsque nous avons défini ces problèmes en introduction, nous avons considéré un point de référence P lié au robot. Il se trouve que le choix de ce point est important. En effet, considérons par exemple les équations (9) d'un point P de l'unicycle lorsque \mathcal{C} est confondu avec l'axe (O, \vec{i}) (rappelons que dans ce cas, s , d , et θ_e ne sont autres que les variables de position et d'orientation x , y , et θ , par rapport au repère de référence \mathcal{R}_0). Deux cas sont possibles: soit P

est situé sur l'axe des roues motrices, soit il ne l'est pas. Plaçons nous d'abord dans le premier cas, c'est à dire $l_1 = 0$. D'après les deux premières équations de (9), on a

$$\dot{x} = (u_1 - l_2 u_2) \cos \theta, \quad \dot{y} = (u_1 - l_2 u_2) \sin \theta.$$

Ces relations indiquent que P ne peut se déplacer que dans la direction du vecteur $(\cos \theta, \sin \theta)$. Ceci est une conséquence directe de la non-holonômie. Si par contre P n'est pas situé sur cet axe, alors

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -l_1 \sin \theta \\ \sin \theta & l_1 \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Le fait que les deux matrices carrées dans le terme de droite soient inversibles, indique que \dot{x} et \dot{y} peuvent prendre des valeurs quelconques, et donc que le mouvement de P n'est pas contraint. Cela signifie, pour établir un parallèle avec le cas des robots manipulateurs holonômes, que P peut être vu comme l'extrémité d'un bras à deux degrés de liberté, et qu'il peut donc être commandé en appliquant les mêmes lois de commande que celles employées pour les robots manipulateurs. Dans cette section, nous supposons être dans cette deuxième situation. Dans ce cas, comme nous allons le voir, les problèmes de stabilisation de trajectoires et de suivi de chemin peuvent être très simplement résolus. Toutefois, comme nous le verrons dans la section suivante, il peut aussi y avoir intérêt à choisir P sur l'axe des roues arrières, afin en particulier de contrôler l'orientation du véhicule.

3.1 Stabilisation de trajectoires d'un point non contraint

Cas de l'unicycle: On se donne une trajectoire de référence dans l'espace cartésien $t \mapsto (x_r(t), y_r(t))$. Cette trajectoire est supposée être différentiable. Soit $e = (x_P - x_r, y_P - y_r)$ l'erreur de suivi. Rappelons que l'objectif de commande est de stabiliser asymptotiquement cette erreur à zéro. L'équation d'erreur est donnée, au vu de (11), par

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -l_1 \sin \theta \\ \sin \theta & l_1 \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - l_2 u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{pmatrix}. \quad (12)$$

En introduisant de nouvelles variables de commande (v_1, v_2) définies par

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -l_1 \sin \theta \\ \sin \theta & l_1 \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - l_2 u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

les équations (12) deviennent simplement

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{pmatrix}.$$

Les techniques classiques de stabilisation de systèmes linéaires peuvent alors être utilisées pour stabiliser asymptotiquement l'erreur à zéro. Par exemple, on peut choisir une commande proportionnelle avec précompensation:

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{x}_r - k_1 e_1 = \dot{x}_r - k_1 (x_P - x_r) & (k_1 > 0) \\ v_2 &= \dot{y}_r - k_2 e_2 = \dot{y}_r - k_2 (y_P - y_r) & (k_2 > 0), \end{aligned}$$

donnant l'équation bouclée de type $\dot{e} = -Ke$. Cette commande peut bien évidemment se reformuler dans les variables de commande de départ u puisque l'application $(u_1, u_2) \mapsto (v_1, v_2)$ est partout inversible.

Cas du chariot avec remorques: La technique précédente s'étend directement au cas d'un chariot suivi d'un nombre arbitraire de remorques, à condition de choisir P lié au chariot et, comme dans le cas précédent, en avant de l'axe des roues arrières. En outre, il est préférable en pratique que la vitesse d'avancement du chariot, u_1 , soit toujours positive, afin d'éviter que les orientations relatives entre véhicules (c'est à dire les variables non commandées directement, correspondant à la "zéro-dynamique" du système) ne prennent des valeurs trop grandes. Nous reviendrons sur les raisons de cette contrainte en Section 4.

Cas de la voiture: Cette technique s'étend également au cas de la voiture, à condition de prendre comme point P , un point lié à la roue directrice.

3.2 Suivi de chemin sans contrôle d'orientation

Cas de l'unicycle: Nous reprenons les notations de la Figure 4 pour le problème de suivi de chemin par rapport à une courbe \mathcal{C} du plan. L'objectif de commande consiste simplement à stabiliser à zéro la distance d par rapport la courbe. D'après (9), d satisfait

$$\dot{d} = u_1 \sin \theta_e + u_2(-l_2 \sin \theta_e + l_1 \cos \theta_e). \quad (14)$$

Rappelons que dans ce cas, la vitesse d'avancement u_1 est donnée à l'avance. Nous faisons l'hypothèse que le produit $l_1 u_1$ est positif, c'est à dire que la position du point P par rapport à l'axe des roues motrices est choisie en fonction du signe de u_1 . Cette hypothèse sera supprimée en Section 4. Pour simplifier, nous supposons également que $l_2 = 0$, i.e. le point de référence P est situé sur l'axe médian du véhicule. Considérons alors la commande par retour d'état

$$u_2 = -\frac{u_1}{l_1 \cos \theta_e} \sin \theta_e - \frac{|u_1|}{\cos \theta_e} k(d, \theta_e) d. \quad (15)$$

avec k une fonction continue, strictement positive sur $\mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$, et telle que $k(d, \pm\pi/2) = 0$. Étant donné que nous avons supposé que $l_2 = 0$, l'application du retour d'état (15) à (14) donne

$$\dot{d} = -l_1 u_1 k(d, \theta_e) d.$$

Puisque à la fois u_1 et k sont strictement positifs, on déduit donc que $|d|$ est décroissante le long de toute trajectoire du système contrôlé. Étant donné que $k(0, 0) > 0$, il faut et il suffit pour que d tende vers zéro que u_1 soit de signe constant, que $\pi/2 - |\theta_e(t)| > \epsilon > 0$ pour tout t , et que

$$\int_0^t |u_1(s)| ds \longrightarrow +\infty \quad \text{quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Cette dernière condition est par exemple satisfaite si u_1 est constant, auquel cas d converge exponentiellement vers zéro. Il reste cependant à considérer le problème de la définition de u_2 par (15) puisque l'expression de la commande n'est pas définie en $\theta_e = \pi/2 + k\pi$. Nous allons déterminer des conditions sur les paramètres du système pour que, partant d'une condition initiale telle que $|\theta_e| < \pi/2$, $|\theta_e|$ reste toujours inférieure à cette valeur le long de la trajectoire, ce qui

garantira la bonne définition de la commande. Pour cela, considérons la valeur limite de $\dot{\theta}_e$ lorsque θ_e tend vers $\pi/2$ (resp. $-\pi/2$) par valeur inférieure (resp. supérieure). En utilisant (9), (15), et le fait que $l_2 = 0$, un simple calcul montre que

$$\dot{\theta}_e = u_1 \left[-\frac{c(s)}{1-dc(s)} \cos \theta_e - \left(1 + \frac{l_1 c(s)}{1-dc(s)} \sin \theta_e \right) \left(\frac{\tan \theta_e}{l_1} + \frac{\text{sign}(u_1)k(d, \theta_e)d}{\cos \theta_e} \right) \right].$$

Considérons d'abord le cas où θ_e tend vers $\pi/2$ par valeur inférieure. Dans ce cas, le signe de $\dot{\theta}_e$ est donné, à la limite, par celui de

$$-u_1 \left(1 + \frac{l_1 c(s)}{1-dc(s)} \right) \frac{1}{l_1}.$$

Pour que θ_e n'atteigne pas $\pi/2$, il suffit que ce signe soit négatif, ce qui est le cas si

$$\left| \frac{l_1 c(s)}{1-dc(s)} \right| < 1. \quad (16)$$

Si θ_e tend vers $-\pi/2$ par valeur supérieure, le signe de $\dot{\theta}_e$ est donné, à la limite, par celui de

$$-u_1 \left(1 - \frac{l_1 c(s)}{1-dc(s)} \right) \left(\frac{-1}{l_1} \right).$$

Pour que θ_e n'atteigne pas $\pi/2$, il suffit que ce signe soit positif, ce qui est aussi le cas si (16) est vraie. On déduit facilement de cette analyse la proposition suivante.

Proposition 2 *Considérons le problème de suivi de chemin pour un robot unicycle avec*

A. *une vitesse d'avancement u_1 strictement positive, ou strictement négative.*

B. *un point de référence P de coordonnées $(l_1, 0)$ (tel que $l_1 u_1 > 0$) dans le repère lié au véhicule.*

Soit k une fonction continue, strictement positive sur $\mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$, et telle que $k(d, \pm\pi/2) = 0$ pour tout d (par exemple, $k(d, \theta_e) = k_0 \cos \theta_e$). Alors, pour tout choix de conditions initiales $(s(0), d(0), \theta_e(0))$ tel que

$$\theta_e(0) \in (-\pi/2, \pi/2), \quad \frac{l_1 c_{max}}{1-|d(0)|c_{max}} < 1,$$

avec $c_{max} = \text{Max}\{|c(s)| : s \text{ parcourant } \mathcal{C}\}$, la loi de commande

$$u_2 = -\frac{u_1 \tan \theta_e}{l_1} - |u_1| \frac{k(d, \theta_e)d}{\cos \theta_e}$$

fait décroître la distance $|d|$ de P à la courbe, et fait tendre cette distance vers zéro si

$$\int_0^t |u_1(s)| ds \longrightarrow +\infty \quad \text{quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Cas du chariot avec remorques: Là encore, le résultat est directement applicable à ce système, en choisissant P sous les mêmes hypothèses que dans la proposition ci-dessus, mais à condition que u_1 soit à valeurs strictement positives.

Cas de la voiture: La technique est aussi applicable dans ce cas en prenant, comme pour le problème de stabilisation de trajectoires, un point P lié à la roue directrice.

4 Méthodes spécifiques aux systèmes non-holonômes

Si les techniques présentées dans la section précédente ont l'intérêt d'être simples, elles ne sont pas toujours suffisantes pour résoudre les problèmes de commande considérés. La principale limitation de ces techniques est qu'elles ne fonctionnent en général que pour des vitesses d'avancement de signe constant (voir en particulier les hypothèses de la Proposition 2). Pour des systèmes à remorques, ces techniques ne fonctionnent même que pour des vitesses strictement positives. Ceci est lié au fait que les variables d'orientation ne sont pas commandées. Pour mieux comprendre la nature de ces limitations, considérons la solution fournie par la Proposition 2 pour $u_1 > 0$, et supposons que l'on souhaite appliquer la même commande pour une vitesse $u_1 < 0$ (constante par exemple), tout en gardant le même point P situé en avant des roues motrices. La Figure 5 ci-dessous illustre un scénario possible. On se donne comme courbe dans ce cas une simple ligne droite et on suppose qu'à l'instant $t = 0$, P est déjà situé sur la courbe (i.e. $d = 0$). Si u_1 est négative, le robot est obligé pour suivre la courbe de se retourner (l'orientation θ_e passe par $-\pi/2$ en $t = 1$). Étant donné que le vecteur vitesse est dirigé vers le haut, le point P est obligé de quitter la courbe, indiquant que la commande n'est pas stabilisante dans ce cas.

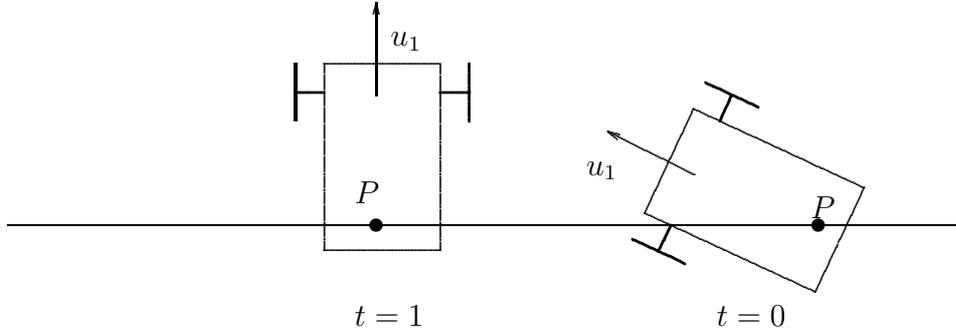


Figure 5: Instabilité du suivi en marche arrière

L'explication de ce comportement est la suivante. Étant donné que l'orientation n'est pas commandée, la variable θ_e va avoir une certaine dynamique, inconnue a priori. Cette dynamique peut être stable, ou instable. Pour la solution mentionnée ci-dessus, nous avons montré que la dynamique était en quelque sorte stable lorsque $u_1 > 0$. En effet, θ_e reste dans le domaine de définition $(-\pi/2, \pi/2)$ de la commande u_2 . Lorsque $u_1 < 0$, cette dynamique devient instable: θ_e atteint le bord du domaine $(-\pi/2, \pi/2)$ de définition de u_2 . Cette instabilité de la partie non commandée (ou de la "zéro dynamique" dans le langage de la commande) se rencontre de la même façon pour le chariot suivi de remorques. Lorsque la vitesse d'avancement est positive, il suffit de réguler le chariot par rapport à la courbe, et les remorques "suivent". Si l'on veut faire une marche arrière, l'expérience montre qu'il faut fortement tenir compte des remorques car, de même que pour l'unicycle considéré précédemment, le chariot va avoir tendance à "se retourner" sur les remorques. Ainsi, si l'on souhaite que la commande reste efficace à la fois en marche avant et en marche arrière, il importe que la loi de commande soit conçue de sorte que les variables d'orientations soient elles aussi activement régulées. Une façon indirecte de le faire est de choisir le point P de manière adéquate (par exemple au milieu de l'axe des roues arrière d'un robot de type unicycle). Dans ce cas, les contraintes non-holonômes apparaissent de façon beaucoup plus

explicités, et la commande ne peut plus être obtenue par application des techniques utilisées pour les robots manipulateurs holonomes.

Cette section est organisée comme suit. Dans un premier temps, nous reprenons les équations établies dans un repère de Frénet, et montrons comment elles peuvent être transformées en une forme canonique dite chaînée. Ceci est utilisé par la suite pour résoudre le problème de suivi de chemin avec contrôle de l'orientation. Nous reconsidérons également dans cette section le problème de stabilisation de trajectoires, avec contrôle de l'orientation. Enfin, nous abordons le problème de stabilisation de configurations fixes.

4.1 Passage aux modèles en forme chaînée

Il est montré dans le chapitre précédent que les équations cinématiques des robots mobiles qui nous intéressent (unicycle, voiture, chariot avec remorques,...) peuvent se mettre sous forme chaînée par un changement de variables d'état et de commande. Rappelons en particulier que les équations (4) de l'unicycle, et (5) de la voiture, se transforment en un système chaîné de dimension trois et quatre respectivement. Celles d'un chariot avec N remorques se transformant en un système chaîné de dimension $N + 3$. Nous allons voir que cette propriété se généralise aux modèles cinématiques établis par rapport à un repère de Frénet. Le résultat sera seulement donné pour l'unicycle et la voiture (équations (9) et (10)) mais il demeure vrai pour le chariot muni de remorques. Comme dans le cas des équations cinématiques par rapport à un repère fixe, le point P de référence doit être choisi au milieu de l'axe des roues arrières du véhicule (ou de la dernière remorque pour le chariot avec remorques).

Commençons par l'unicycle. Sous l'hypothèse que P corresponde à l'origine de \mathcal{R}_1 , on a $l_1 = l_2 = 0$ de sorte que le système (9) se simplifie en:

$$\begin{cases} \dot{s} &= \frac{u_1}{1 - dc(s)} \cos \theta_e \\ \dot{d} &= u_1 \sin \theta_e \\ \dot{\theta}_e &= u_2 - \dot{s}c(s). \end{cases} \quad (17)$$

Nous allons déterminer un changement de coordonnées et de variables de commande

$$(s, d, \theta_e, u_1, u_2) \longmapsto (z_1, z_2, z_3, v_1, v_2)$$

permettant de transformer (localement) (17) en un système chaîné de dimension trois:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= v_1 \\ \dot{z}_2 &= v_1 z_3 \\ \dot{z}_3 &= v_2. \end{cases} \quad (18)$$

Posons d'abord

$$z_1 = s, \quad v_1 = \dot{s} = \frac{u_1}{1 - dc(s)} \cos \theta_e$$

de sorte à avoir déjà $\dot{z}_1 = v_1$. Ceci implique que

$$\dot{d} = u_1 \sin \theta_e = \frac{u_1}{1 - dc(s)} \cos \theta_e ((1 - dc(s)) \tan \theta_e) = v_1 ((1 - dc(s)) \tan \theta_e).$$

Posons ensuite $z_2 = d$ et $z_3 = (1 - dc(s)) \tan \theta_e$, de sorte que l'équation ci-dessus devienne $\dot{z}_2 = v_1 z_3$. Finalement, définissons

$$v_2 = \dot{z}_3 = \left(-\dot{d}c(s) - d \frac{\partial c}{\partial s} \dot{s} \right) \tan \theta_e + (1 - dc(s))(1 + \tan^2 \theta_e) \dot{\theta}_e.$$

Les variables z_i et v_i vérifient bien (18).

Par cette construction, il est aussi facile d'établir que l'application $(s, d, \theta_e) \mapsto z$ est un changement de coordonnées **local**, défini sur $\mathbb{R}^2 \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (pour être plus exact, nous devrions en fait également prendre en compte la contrainte $|d| < c(s)$). Remarquons enfin que le changement de variables de commande nécessite la connaissance de la dérivée de la courbure ($\partial c / \partial s$). La façon de procéder pour transformer les équations de la voiture en un système chaîné de dimension quatre est analogue (les calculs deviennent cependant plus lourds). Nous résumons les résultats dans la proposition suivante.

Proposition 3 *Le changement de coordonnées et de variables de commande*

$$(s, d, \theta_e, u_1, u_2) \mapsto (z_1, z_2, z_3, v_1, v_2)$$

défini sur $\mathbb{R}^2 \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ par

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3) &= (s, d, (1 - dc(s)) \tan \theta_e) \\ (v_1, v_2) &= (\dot{z}_1, \dot{z}_3) \end{aligned}$$

transforme le modèle (17) de l'unicycle en un système chaîné de dimension trois. De même, le changement de coordonnées et de variables de commande

$$(s, d, \theta_e, \phi, u_1, u_2) \mapsto (z_1, z_2, z_3, z_4, v_1, v_2)$$

défini sur $\mathbb{R}^2 \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^2$ par

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \left(s, d, (1 - dc(s)) \tan \theta_e, -c(s)(1 - dc(s))(1 + 2 \tan^2 \theta_e) - d \frac{\partial c}{\partial s} \tan \theta_e \right. \\ &\quad \left. + (1 - dc(s))^2 \frac{\tan \phi}{L} \frac{1 + \tan^2 \theta_e}{\cos \theta_e} \right) \\ (v_1, v_2) &= (\dot{z}_1, \dot{z}_4) \end{aligned}$$

transforme le modèle (10) de la voiture (avec $l_1 = l_2 = 0$) en un système chaîné de dimension quatre.

4.2 Poursuite d'un véhicule de référence

Nous allons considérer le problème de stabilisation de trajectoire, pour un robot unicycle, lorsque le point de référence P est situé au milieu de l'axe des roues arrières. Contrairement à ce qui se passe lorsque P n'est pas situé sur cet axe (i.e. $l_1 \neq 0$), le vecteur vitesse de P est alors contraint par la non-holonomie. Cela implique en particulier qu'une trajectoire de référence $t \mapsto (x_r(t), y_r(t))$ n'est pas nécessairement réalisable par le robot. Aussi, pour que le problème de stabilisation ait un sens, il convient d'abord de caractériser les trajectoires réalisables. Une façon de le faire est de considérer que $t \mapsto (x_r(t), y_r(t))$ correspond elle-même à la trajectoire

d'un robot unicycle de référence, i.e. il existe une "commande de référence" $t \mapsto (u_{1,r}(t), u_{2,r}(t))$ (supposée continue) telle que

$$\begin{cases} \dot{x}_r &= u_{1,r} \cos \theta_r \\ \dot{y}_r &= u_{1,r} \sin \theta_r \\ \dot{\theta}_r &= u_{2,r}. \end{cases} \quad (19)$$

Nous nous proposons de déterminer une commande par retour d'état permettant de stabiliser asymptotiquement à zéro l'erreur de suivi

$$e = (x - x_r, y - y_r, \theta - \theta_r)^T,$$

ce qui revient précisément à asservir le robot unicycle à celui de référence. La démarche est similaire à celle utilisée pour le suivi de chemin: dans un premier temps nous allons exprimer les équations d'erreur par rapport à un repère lié au robot de référence, puis, après un changement de variables s'inspirant de celui transformant les équations cinématiques d'un robot en un système chaîné, nous déterminerons des commandes stabilisantes. Associons un repère \mathcal{R}_r au robot de référence (voir Figure 6 ci-dessous).

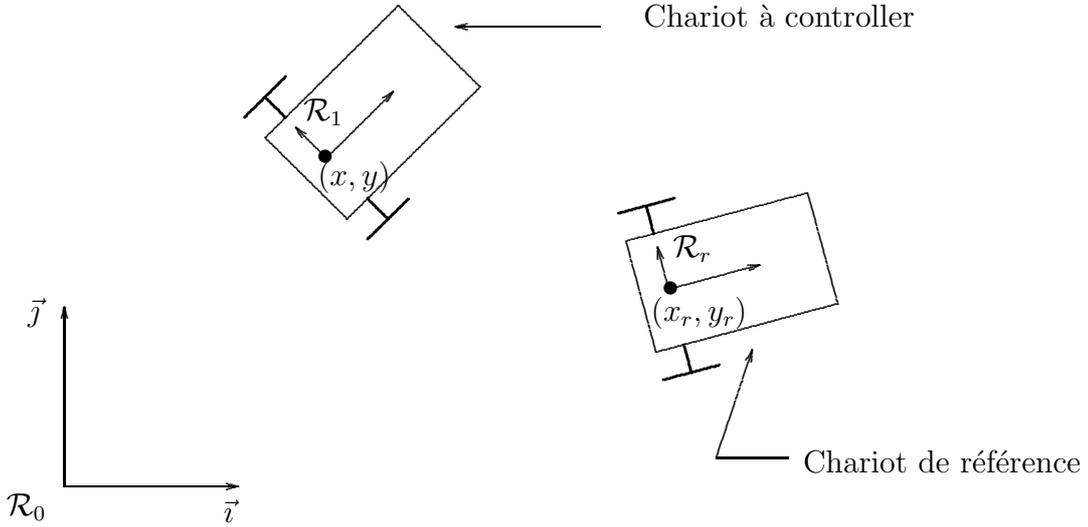


Figure 6: Suivi d'un véhicule de référence

Nous exprimons l'erreur de suivi en position $(x - x_r, y - y_r)$ par rapport à ce repère. Cette erreur est donnée par

$$\begin{pmatrix} e_{1,r} \\ e_{2,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de la dérivée de l'erreur donne

$$\begin{aligned} \dot{e}_r &= \dot{\theta}_r \begin{pmatrix} -\sin \theta_r & \cos \theta_r \\ -\cos \theta_r & -\sin \theta_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{2,r} e_{2,r} + u_1 \cos(\theta - \theta_r) - u_{1,r} \\ -u_{2,r} e_{1,r} + u_1 \sin(\theta - \theta_r) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notons $e_r = (e_{1,r}, e_{2,r}, \theta - \theta_r)$ de sorte que,

$$\begin{cases} \dot{e}_{1,r} &= u_{2,r}e_{2,r} + u_1 \cos e_{3,r} - u_{1,r} \\ \dot{e}_{2,r} &= -u_{2,r}e_{1,r} + u_1 \sin e_{3,r} \\ \dot{e}_{3,r} &= u_2 - u_{2,r}. \end{cases} \quad (20)$$

Il s'agit de déterminer une commande (u_1, u_2) permettant de réguler l'erreur e_r à zéro. Pour cela, on effectue le changement de coordonnées et de variables de commande

$$(e_{1,r}, e_{2,r}, e_{3,r}, u_1, u_2) \longmapsto (z_1, z_2, z_3, w_1, w_2)$$

défini par

$$\begin{aligned} z_1 &= e_{1,r} & w_1 &= u_1 \cos e_{3,r} - u_{1,r} \\ z_2 &= e_{2,r} & w_2 &= \frac{u_2 - u_{2,r}}{\cos^2 e_{3,r}}. \\ z_3 &= \tan e_{3,r} \end{aligned}$$

Notons que ce changement n'est valide que pour $e_{3,r} \in (-\pi/2, \pi/2)$. Autrement dit, l'erreur d'orientation relative entre le robot et celui de référence doit être inférieure à $\pi/2$.

Il est immédiat de vérifier que le système (20) est donné, dans ces nouvelles variables, par

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= u_{2,r}z_2 + w_1 \\ \dot{z}_2 &= -u_{2,r}z_1 + u_{1,r}z_3 + w_1z_3 \\ \dot{z}_3 &= w_2. \end{cases} \quad (21)$$

Remarquons que le dernier terme dans chacune des trois équations ci-dessus correspond à celui d'un système en forme chaînée. On a alors le résultat suivant

Proposition 4 *La loi de commande*

$$\begin{cases} w_1 = -k_1|u_{1,r}|(z_1 + z_2z_3) & (k_1 > 0) \\ w_2 = -k_2u_{1,r}z_2 - k_3|u_{1,r}|z_3 & (k_2, k_3 > 0) \end{cases} \quad (22)$$

rend l'origine du système (21) globalement asymptotiquement stable si $u_{1,r}$ est une fonction différentiable, bornée, de dérivée bornée, et qui ne tend pas vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Remarque: Par comparaison avec les résultats de la Section 3, notons que $u_{1,r}$ peut tout à fait passer par zéro, et changer de signe.

Preuve: Considérons la fonction définie positive

$$V(z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \frac{1}{k_2}z_3^2).$$

La dérivée de V le long des trajectoires du système commandé (21)–(22) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_1w_1 + z_2(u_{1,r}z_3 + w_1z_3) + \frac{1}{k_2}z_3w_2 \\ &= w_1(z_1 + z_2z_3) + z_3(u_{1,r}z_2 + \frac{1}{k_2}w_2) \\ &= -k_1|u_{1,r}|(z_1 + z_2z_3)^2 - \frac{k_3}{k_2}|u_{1,r}|z_3^2. \end{aligned}$$

Ainsi, V est décroissante le long des trajectoires du système commandé, et converge donc vers une valeur $V_{lim} \geq 0$. Cela implique que les variables z_1, z_2 , et z_3 sont bornées le long de toute trajectoire de ce système. Puisque $u_{1,r}$ est continue et de dérivée bornée, $|u_{1,r}|$ est uniformément continue. Il en est de même pour les solutions z_1, z_2 , et z_3 . Par conséquent, \dot{V} est uniformément continu et, par application du lemme de Barbalat, \dot{V} tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Ceci entraîne, au vu de l'expression de \dot{V} , que $u_{1,r}z_3$ et $u_{1,r}(z_1 + z_2z_3)$ (et donc aussi $u_{1,r}z_1$) tendent vers zéro. On a d'autre part, en utilisant l'expression de $w_2 (= \dot{z}_3)$:

$$\frac{d}{dt}(u_{1,r}^2 z_3) = 2\dot{u}_{1,r}u_{1,r}z_3 - k_3u_{1,r}^2|u_{1,r}|z_3 - k_2u_{1,r}^3z_2,$$

et on déduit de ce qui précède que

$$\frac{d}{dt}(u_{1,r}^2 z_3) + k_2u_{1,r}^3z_2$$

tend vers zéro. Comme $u_{1,r}^3z_2$ est uniformément continue, puisque de dérivée bornée, et comme $u_{1,r}^2z_3$ tend vers zéro, on déduit par application d'une version étendue du lemme de Barbalat, que $u_{1,r}^3z_2$ (et donc aussi $u_{1,r}z_2$) tend vers zéro. Au vu de l'expression de V , la convergence de $u_{1,r}z_i$ ($i = 1, 2, 3$) vers zéro entraîne celle de $u_{1,r}V$ vers zéro. Par conséquent $u_{1,r}V_{lim} = 0$, et $V_{lim} = 0$ en utilisant l'hypothèse que $u_{1,r}$ ne tend pas vers zéro. ■

La linéarisation de la commande (22) donne la commande plus simple

$$\begin{cases} w_1 = -k_1|u_{1,r}|z_1 \\ w_2 = -k_2u_{1,r}z_2 - k_3|u_{1,r}|z_3 \end{cases}$$

Comme $w_1 \approx u_1 - u_{1,r}$ et $w_2 \approx u_2 - u_{2,r}$ près de l'origine, il est naturel de se demander si la commande

$$\begin{cases} u_1 = u_{1,r} - k_1|u_{1,r}|z_1 \\ u_2 = u_{2,r} - k_2u_{1,r}z_2 - k_3|u_{1,r}|z_3 \end{cases},$$

peut également être utilisée pour le système (20). Il n'est en fait pas difficile de vérifier, par un calcul classique de placement de pôles, que cette commande stabilise l'origine du système linéaire qui approxime le système (20) lorsque $u_{1,r}$ et $u_{2,r}$ sont constants, avec $u_{1,r} \neq 0$. Elle stabilise donc aussi **localement** l'origine du système (20) lorsque ces conditions sur $u_{1,r}$ et $u_{2,r}$ sont satisfaites. Cela signifie également que le réglage des gains k_1, k_2 , et k_3 , peut être réalisé par des techniques classiques de la théorie de la commande des systèmes linéaires, en travaillant sur l'approximation linéaire du système (20). La commande (22) est en fait conçue pour qu'un réglage effectué pour les seules vitesses particulières $u_{1,r} = 1$ et $u_{2,r} = 0$ donne de bons résultats pour toutes les autres vitesses (excepté bien sûr $u_{1,r} = 0$, auquel cas l'approximation linéaire du système (20) est non commandable, et la commande s'annule). Cette propriété provient du fait que les gains de commande sont multipliés par $\pm u_1$. Ceci revient à normaliser les équations du système commandé par rapport à la vitesse d'avancement, et permet d'assurer que le véhicule commandé rejoigne la trajectoire du véhicule de référence en suivant un chemin indépendant de l'intensité de sa vitesse d'avancement.

La simulation de la Figure 7 illustre ce schéma de commande. Le véhicule de référence part de la position $(x, y) = (0, 0)$. Les commandes de références associées sont $u_{1,r} = 1$, et $u_{2,r} = \cos t - 1/4$. Le robot à commander part de $(x, y) = (-2, 0)$. La figure de gauche montre la

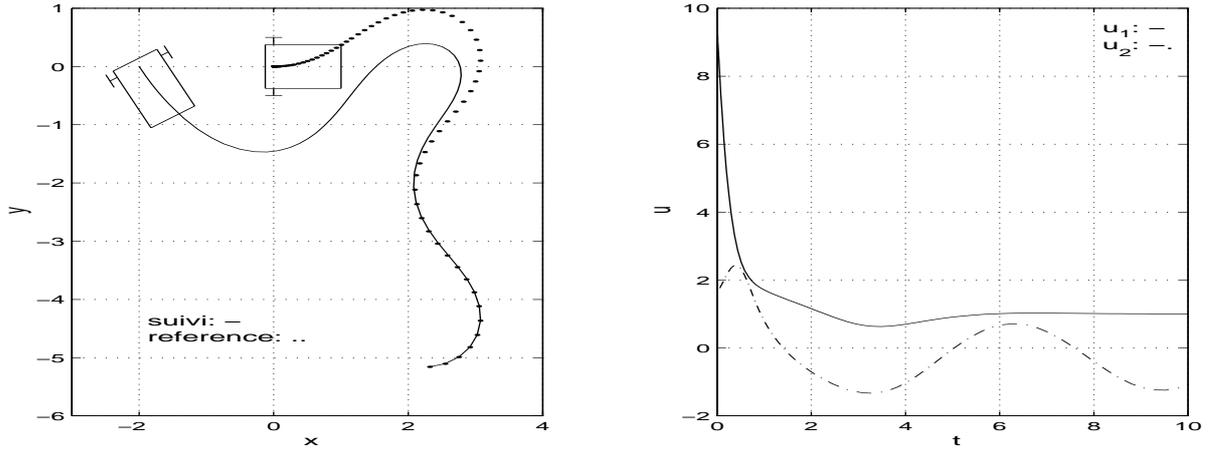


Figure 7: Suivi d'un véhicule de référence

trajectoire des deux robots, tandis que celle de droite fournit les valeurs des commandes (u_1, u_2) . Bien évidemment, ces valeurs tendent également vers celles de référence.

Généralisation à la voiture: La méthode précédente se généralise au cas de la voiture. Nous donnons les principales étapes de cette généralisation, et laissons au lecteur le soin d'en vérifier les détails.

On considère le modèle (5) de la voiture, ainsi que le modèle de la voiture à poursuivre:

$$\begin{cases} \dot{x}_r &= u_{1,r} \cos \theta_r \\ \dot{y}_r &= u_{1,r} \sin \theta_r \\ \dot{\theta}_r &= \frac{u_{1,r}}{L} \tan \phi_r \\ \dot{\phi} &= u_{2,r}. \end{cases} \quad (23)$$

Nous supposons qu'il existe $\delta \in (0, \pi/2)$ tel que l'angle de braquage ϕ_r appartienne à l'intervalle $[-\delta, \delta]$.

En définissant $e_{1,r}$, $e_{2,r}$, et $e_{3,r}$ comme pour le cas de l'unicycle, et $e_{4,r} = \phi - \phi_r$, on obtient facilement le système suivant (à comparer avec (20)):

$$\begin{cases} \dot{e}_{1,r} &= u_{2,r} e_{2,r} + u_1 \cos e_{3,r} - u_{1,r} \\ \dot{e}_{2,r} &= -u_{2,r} e_{1,r} + u_1 \sin e_{3,r} \\ \dot{e}_{3,r} &= \frac{u_1}{L} \tan \phi - \frac{u_{1,r}}{L} \tan \phi_r \\ \dot{e}_{4,r} &= u_2 - u_{2,r}. \end{cases} \quad (24)$$

On introduit alors de nouvelles variables d'état:

$$\begin{cases} z_1 &= e_{1,r} \\ z_2 &= e_{2,r} \\ z_3 &= \tan e_{3,r} \\ z_4 &= \frac{\tan \phi - \cos e_{3,r} \tan \phi_r}{L \cos^3 e_{3,r}} + k_2 e_{2,r} \quad (k_2 > 0) \end{cases}$$

Notons que pour tout $\phi_r \in (-\pi/2, \pi/2)$, l'application $(e_{1,r}, e_{2,r}, e_{3,r}, \phi) \mapsto z$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2)^2$ dans \mathbb{R}^4 . On introduit également de nouvelles variables de commande:

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1 \cos e_{3,r} - u_{1,r} \\ w_2 &= \dot{z}_4 = k_2 \dot{e}_{2,r} + \left(\frac{3 \tan \phi}{\cos e_{3,r}} - 2 \tan \phi_r \right) \frac{\sin e_{3,r}}{L \cos^3 e_{3,r}} \dot{e}_{3,r} - \frac{u_{2,r}}{L \cos^2 \phi_r \cos^2 e_{3,r}} + \frac{u_2}{L \cos^2 \phi \cos^2 e_{3,r}} \end{aligned}$$

Là encore, on peut montrer que $(u_1, u_2) \mapsto (w_1, w_2)$ définit bien un changement de variables pour $e_{3,r}$, ϕ , et ϕ_r , dans l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$. Par ces changements de variables d'état et de commande, le système (24) se transforme en:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= u_{2,r} z_2 + w_1 \\ \dot{z}_2 &= -u_{2,r} z_1 + u_{1,r} z_3 + w_1 z_3 \\ \dot{z}_3 &= -k_2 u_{1,r} z_2 + u_{1,r} z_4 + w_1 \left(z_4 - k_2 z_2 + (1 + z_3^2) \frac{\tan \phi_r}{L} \right) \\ \dot{z}_4 &= w_2. \end{cases} \quad (25)$$

La Proposition 4 devient alors:

Proposition 5 *La loi de commande*

$$\begin{cases} w_1 = -k_1 |u_{1,r}| \left(z_1 + z_2 z_3 + \frac{1}{k_2} \left(z_4 - k_2 z_2 + (1 + z_3^2) \frac{\tan \phi_r}{L} \right) \right) & (k_1, k_2 > 0) \\ w_2 = -k_3 u_{1,r} z_3 - k_4 |u_{1,r}| z_4 & (k_3, k_4 > 0) \end{cases} \quad (26)$$

rend l'origine du système (21) globalement asymptotiquement stable si $u_{1,r}$ est une fonction différentiable, bornée, de dérivée bornée, et qui ne tend pas vers zéro lorsque t tend vers l'infini, et si ϕ_r est restreint à un interval $[-\delta, \delta]$ avec $0 < \delta < \pi/2$.

4.3 Suivi de chemin avec contrôle d'orientation

Nous reconsidérons le problème de suivi de chemin avec comme point de référence, le point P situé au milieu de l'axe des roues arrières. L'objectif est de synthétiser une commande permettant le suivi à la fois en marche avant et en marche arrière.

Cas de l'unicycle: Nous avons vu en Sous-section 4.1 comment transformer les équations cinématiques par rapport à un repère de Frénet en un système en forme chaînée de dimension trois:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= v_1 \\ \dot{z}_2 &= v_1 z_3 \\ \dot{z}_3 &= v_2. \end{cases} \quad (27)$$

Rappelons que $(z_1, z_2, z_3) = (s, d, \tan \theta_e)$ et que $v_1 = \frac{u_1}{1 - dc(s)} \cos \theta_e$. Notre objectif est de déterminer une loi de commande qui stabilise $(d = 0, \theta_e = 0)$, et d'assurer également que la contrainte sur la distance de d à la courbe (i.e. $|dc(s)| < 1$) soit vérifiée le long des trajectoires du système bouclé. Pour la loi de commande, une première solution consiste à prendre un retour d'état de type proportionnel:

$$v_2 = -v_1 k_2 z_2 - |v_1| k_3 z_3 \quad (k_2, k_3 > 0) \quad (28)$$

Il est alors immédiat de vérifier que l'origine du sous système en boucle fermée

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = v_1 z_3 \\ \dot{z}_3 = -v_1 k_2 z_2 - |v_1| k_3 z_3 \end{cases} \quad (29)$$

est asymptotiquement stable lorsque v_1 est une constante, positive ou négative. Étant donné que u_1 (et non pas v_1) est la vitesse d'avancement du véhicule, on souhaite en fait établir les conditions de stabilité en fonction de u_1 . Le résultat suivant fournit une condition de stabilité relativement générale, et donne une condition suffisante pour que la contrainte $|dc(s)| < 1$ soit vérifiée.

Proposition 6 *Considérons le système (27) commandé par (28), et supposons que les conditions initiales $(z_2(0), z_3(0))$ (i.e. $(d(0), \tan \theta_e(0))$) vérifient*

$$z_2^2(0) + \frac{1}{k_2} z_3^2(0) < \frac{1}{c_{max}^2},$$

avec $c_{max} = \text{Max}\{|c(s)| : s \text{ parcourant } \mathcal{C}\}$. Alors, la contrainte $|dc(s)| < 1$ est satisfaite le long de toute solution du système en boucle fermé. De plus, la fonction

$$V(z) = \frac{1}{2} \left(z_2^2 + \frac{1}{k_2} z_3^2 \right)$$

est décroissante le long de toute trajectoire $z(t)$ du système, et $V(z(t))$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini si, par exemple, u_1 est une fonction du temps différentiable, bornée, de dérivée bornée, et ne tendant pas vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

La preuve est analogue à celle de la Proposition 4: un simple calcul montre la décroissance de la fonction V et donc sa convergence vers une valeur limite V_{lim} . Les mêmes arguments que ceux de la Proposition 4 peuvent alors être utilisés pour montrer que $V_{lim} = 0$.

Notons que les contraintes sur u_1 sont relativement faibles. En particulier, u_1 ne doit pas nécessairement être de signe constant.

Les simulations de la Figure 8 illustre ce schéma de commande. La courbe de référence (en pointillé sur la figure de droite) est un cercle de rayon 1. La vitesse u_1 du robot est définie par $u_1 = 5 \cos 2t$. Le robot a donc un mouvement de va-et-vient.

D'un point de vue pratique, il peut être intéressant d'ajouter à la commande un terme de compensation intégral par rapport à d . Plus précisément, définissons une variable z_0 par

$$\dot{z}_0 = v_1 z_2, \quad z_0(0) = 0.$$

La commande (28) peut alors être modifiée comme suit:

$$\begin{aligned} v_2 &= -|v_1| k_0 z_0 - v_1 k_2 z_2 - |v_1| k_3 z_3 \quad (k_0, k_2, k_3 > 0) \\ &= -|v_1| k_0 \int_0^t v_1 z_2 - v_1 k_2 z_2 - |v_1| k_3 z_3. \end{aligned} \quad (30)$$

La Proposition 6 devient:

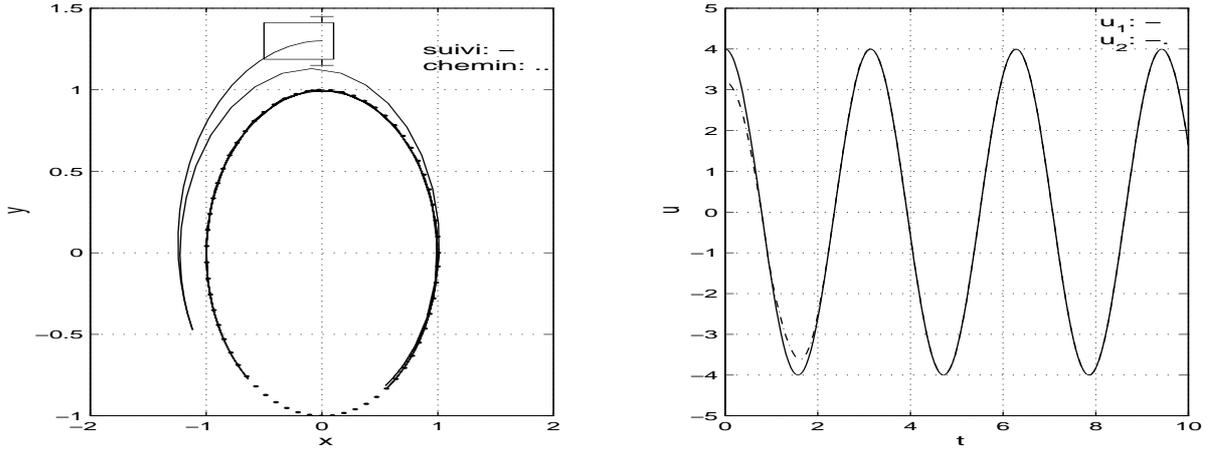


Figure 8: Suivi de chemin

Proposition 7 *Considérons le système (27) commandé par (30) avec k_0, k_2 , et k_3 , tels que le polynôme*

$$s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_0$$

soit Hurwitz stable¹. Supposons également que les conditions initiales $(z_2(0), z_3(0))$ vérifient

$$z_2^2(0) + \frac{1}{k_2 - \frac{k_0}{k_3}} z_3^2(0) < \frac{1}{c_{max}^2}.$$

Alors la contrainte $|dc(s)| < 1$ est satisfaite le long de toute solution du système en boucle fermé. De plus, la fonction

$$\frac{k_0}{k_3} \left(\int_0^t v_1 z_2 \right)^2 + z_2^2(t) + \frac{1}{k_2 - \frac{k_0}{k_3}} z_3^2(t)$$

est décroissante le long des trajectoires du système, et tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini si par exemple u_1 est une fonction du temps différentiable, bornée, de dérivée bornée, et ne tendant pas vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Généralisation à la voiture et au chariot avec remorques: Un des intérêts de ce type d'approche, outre la simplicité de la loi de commande, et le fait que les conditions de stabilité sont peu exigeantes, est qu'il se généralise presque directement au cas de la voiture ou du chariot avec remorques. La preuve est une extension directe du cas précédent. Le résultat est énoncé dans le cas général d'un système chaîné de type

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= v_1 \\ \dot{z}_2 &= v_1 z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= v_1 z_n \\ \dot{z}_n &= v_2. \end{cases} \quad (31)$$

¹Autrement dit, toutes ses racines sont à partie réelle négative.

La dimension $n = 4$ correspondant au cas de la voiture (voir Sous-section 4.1), le cas du chariot avec N remorques étant associé à la dimension $n = N + 3$. Rappelons également que dans tous les cas, z_2 représente la distance d à la courbe du point P situé au milieu de l'axe des roues arrières du dernier véhicule.

Proposition 8 Soient k_2, \dots, k_n des paramètres tels que le polynôme

$$s^{n-1} + k_n s^{n-2} + k_{n-1} s^{n-3} + \dots + k_3 s + k_2$$

soit Hurwitz stable. Associons à ces paramètres la commande

$$v_2 = -v_1 \sum_{i=2}^n \text{sign}(v_1)^{n+1-i} k_i z_i. \quad (32)$$

Alors, il existe une matrice définie positive Q (fonction des coefficients k_i) telle que, si les conditions initiales $(z_2(0), z_3(0), \dots, z_n(0))$ vérifient

$$\|(z_2(0), z_3(0), \dots, z_n(0))\|_Q < \frac{1}{C_{max}}, \quad (33)$$

la contrainte $|dc(s)| < 1$ est satisfaite le long de toute solution du système en boucle fermé. De plus, la fonction

$$\|(z_2(t), z_3(t), \dots, z_n(t))\|_Q$$

est décroissante le long des trajectoires du système, et tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini si par exemple u_1 est une fonction du temps différentiable, bornée, de dérivée bornée, et ne tendant pas vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Remarques: La condition (33) est toujours satisfaite lorsque $c(s) = 0$ pour tout s (cas de la ligne droite). Elle est peu contraignante en pratique lorsque C_{max} est petit. Notons également qu'il est possible de calculer explicitement la matrice Q en fonction des paramètres k_i (voir [12] pour plus de détails).

Comme dans le cas de dimension trois, il est possible d'ajouter un terme intégral dans la commande. Dans ce cas, la commande est calculée à partir de l'expression d'un "système étendu" dont le vecteur d'état est constitué des variables z_1, \dots, z_n , et de la variable supplémentaire z_0 , telle que $\dot{z}_0 = v_1 z_2$. Comme l'ajout de la variable z_0 préserve la structure chaînée du système, l'expression de la commande se déduit simplement de celle déterminée pour un système de dimension $n + 1$ sans terme intégral. Plus précisément, on obtient:

$$v_2 = -k_0 v_1 \text{sign}(v_1)^n \int_0^t v_1 z_2 - v_1 \sum_{i=2}^n \text{sign}(v_1)^{n+1-i} k_i z_i,$$

avec $s^n + k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-3} + \dots + k_2 s + k_0$ Hurwitz stable.

4.4 Stabilisation asymptotique de configurations fixes

Nous considérons dans cette partie le problème de la stabilisation par rapport à une position et une orientation de référence (celles-ci étant fixes). Ce problème peut être vu comme un cas limite du problème de stabilisation d'une trajectoire de référence. Cependant, les solutions obtenues jusqu'à présent sont insuffisantes pour résoudre ce problème. Dans la Section 3 tout d'abord, le résultat concernant la stabilisation de trajectoires n'excluait pas la stabilisation en un point fixe, mais aucun contrôle de l'orientation n'était assuré. Quant à la Section 4, nous avons du supposer, pour assurer les propriétés de convergence asymptotique de l'erreur à zéro, que la vitesse d'avancement u_1 du robot ne tendait pas vers zéro (ce qui exclut la stabilisation de configurations fixes).

Comme nous allons le voir, le problème de stabilisation de configurations fixes est très différent, du point de vue de l'automatique, des problèmes de suivi de chemin et de stabilisation de trajectoire. Sa spécificité est qu'il ne peut être résolu par des techniques de commande linéaire (où basées sur la linéarisation). Ceci, ajouté au fait que dans la pratique bon nombre d'applications ne nécessitent pas un positionnement très précis, a fait que ce problème n'a été étudié que relativement récemment. Les méthodes développées pour le résoudre ne datent que de la dernière décennie et sont, pour la plupart, encore à un stade de recherche. En particulier, le fait que ces méthodes reposent sur des techniques de commande non-linéaires, implique des difficultés à la fois au niveau de la synthèse et au niveau de l'analyse des propriétés de ces commandes (analyses de robustesse en particulier). Le lecteur doit donc être informé que ces études sont encore en cours, et que leurs conclusions amèneront éventuellement à rejeter certaines approches, en raison de leurs limitations du point de vue applicatif. Aussi avons nous choisi de faire un exposé un peu informel de ces approches, dans le but de donner un aperçu des problèmes, et de quelques solutions développées, mais sans détailler les aspects techniques et mathématiques.

Un aspect primordial du problème de stabilisation des systèmes non-holonômes est lié à l'impossibilité d'obtenir une stabilisation asymptotique par le biais de retours d'état continus. Ceci découle d'un résultat important montré par Brockett² en 1983.

Théorème 1 (Brockett) *Soit $\dot{x} = f(x, u)$ ($x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$) un système de commande avec f différentiable, et $(x, u) = (0, 0)$ un point d'équilibre de ce système. Une condition nécessaire pour qu'il existe un retour d'état u continu tel que l'origine du système bouclé*

$$\dot{x} = f(x, u(x))$$

soit localement asymptotiquement stable, est la surjectivité locale de l'application $(x, u) \mapsto f(x, u)$ au voisinage de $(x, u) = (0, 0)$. Plus précisément, pour tout voisinage Ω de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^{n+m} , l'image par f de Ω doit être un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n .

Ce résultat implique que de nombreux systèmes commandables ne sont pas asymptotiquement stabilisables par retour d'état continu (bien évidemment de tels systèmes sont nécessairement non-linéaires). C'est en particulier le cas de tous les robots mobiles non-holonômes. Nous allons le montrer pour l'unicycle; la preuve pour les autres robots considérés dans ce livre est similaire.

²Le résultat montré par Brockett ne considérait que des retours d'état différentiables; il a ensuite été étendu à la classe plus large des retours d'état seulement continus.

Dans le cas du robot unicycle, l'équation (4) implique que le système est de la forme $\dot{x} = f(x, u)$ avec

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad u = (u_1, u_2), \quad f(x, u) = (u_1 \cos x_3, u_1 \sin x_3, u_2)^T.$$

Nous allons montrer que f n'est pas localement surjective au voisinage de $(x, u) = (0, 0)$. Pour cela considérons un vecteur dans \mathbb{R}^3 de la forme $(0, \delta, 0)^T$. Il est immédiat que l'équation $f(x, u) = (0, \delta, 0)^T$ n'admet pas de solution au voisinage de $(x, u) = (0, 0)$ puisque la première équation à satisfaire: $u_1 \cos x_3 = 0$ implique que $u_1 = 0$, et il n'y a alors pas de solution à la deuxième équation si δ est différent de zéro, aussi petit soit-il.

Notons évidemment que le linéarisé des équations de l'unicycle (au point d'équilibre $(x, u) = (0, 0)$) n'est pas commandable. S'il était commandable, on pourrait stabiliser asymptotiquement (localement) ce point d'équilibre par des retours d'état linéaires et donc continus.

Ainsi, par application du théorème précédent, le robot unicycle (comme les autres robots non-holonômes) ne peut être stabilisé asymptotiquement, en une position/orientation donnée, par du retour d'état continu. Ceci a conduit à développer d'autres stratégies de commande pour résoudre ce problème de stabilisation asymptotique. Trois types de commandes ont principalement été considérés:

1. les *retours d'état instationnaires continus*, qui sont des retours d'état que l'on fait dépendre de la variable temporelle (i.e. $u(x, t)$ au lieu de $u(x)$ pour un retour d'état classique).
2. les *retours d'état discontinus*, qui sont des retours d'état classiques $u(x)$, mais présentant une discontinuité au moins au point d'équilibre que l'on souhaite stabiliser.
3. les *retours d'état hybrides*. Bien que cette classe soit moins bien définie que les précédentes, elle est principalement constituée de retours d'état instationnaires, continus ou non, mais dont la spécificité est que tout ou partie de la dépendance par rapport à l'état n'est réinitialisée que périodiquement, e.g. $u(t) = v(x(kT), t)$ pour tout $t \in [kT, (k+1)T)$, T étant une constante de temps, et k parcourant \mathbb{N} .

Nous illustrons maintenant ces approches. Nous nous limitons en fait aux retours d'état instationnaires et hybrides. La principale raison pour cela est que les retours d'état discontinus posent des problèmes d'analyse importants: existence de solutions, sens mathématique à donner à celles-ci; ces problèmes n'ayant pas encore reçu de solutions satisfaisantes. En outre, pour la plupart des stratégies de commande discontinue décrites jusqu'à présent dans la littérature, la propriété de stabilité au sens de Lyapunov n'est pas assurée.

Retours d'état instationnaires: L'utilisation de retours d'état instationnaires pour la stabilisation asymptotique de robots mobiles a été proposée par l'un des auteurs afin de contourner l'obstacle mis en évidence par le théorème de Brockett. Depuis lors, des résultats très généraux ont été obtenus sur la stabilisation asymptotique de systèmes non-linéaires avec de telles commandes. En particulier, tout système sans dérive commandable peut être stabilisé avec ces retours d'état. En particulier, c'est le cas des modèles de robots mobiles que nous considérons ici. Nous allons illustrer ce type de méthode pour la stabilisation du robot unicycle à partir de la forme chaînée. Pour cela, revenons sur les résultats obtenus en Sous-section 4.3 pour le suivi de chemin. Nous avons établi (voir Proposition 6) que la commande

$$v_2 = -v_1 k_2 z_2 - |v_1| k_3 z_3$$

appliquée au système

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= v_1 \\ \dot{z}_2 &= v_1 z_3 \\ \dot{z}_3 &= v_2 \end{cases}$$

rendait la fonction

$$V(z) = z_2^2 + \frac{1}{k_2} z_3^2$$

décroissante le long des trajectoires du système, i.e.

$$\dot{V} = -2\frac{k_3}{k_2}|v_1|z_3^2$$

et assurait la convergence de z_2 et z_3 si, entre autre, v_1 ne tendait pas vers zéro. Par exemple, si $v_1(t) = \sin t$, la proposition s'applique: z_2 et z_3 tendent vers zéro, et

$$z_1(t) = z_1(0) + \int_0^t v_1(s) ds = z_1(0) + \int_0^t \sin s ds = z_1(0) + 1 - \cos t,$$

de sorte que $z_1(t)$ oscille autour de la valeur moyenne $z_1(0) + 1$. Pour réduire ces oscillations on peut multiplier v_1 par un facteur dépendant de l'état; par exemple on prend $v_1(z, t) = |(z_2, z_3)| \sin t$ puis on essaie de stabiliser z_1 en ajoutant un terme de compensation:

$$v_1(z, t) = -k_1 z_1 + |(z_2, z_3)| \sin t.$$

Il se trouve qu'on a ainsi synthétisé un retour d'état instationnaire asymptotiquement stabilisant:

Proposition 9 *Le retour d'état instationnaire continu*

$$\begin{cases} v_1(z, t) &= -k_1 z_1 + |(z_2, z_3)| \sin t \\ v_2(z, t) &= -v_1(z, t)k_2 z_2 - |v_1(z, t)|k_3 z_3 \end{cases} \quad (34)$$

rend l'origine du système chaîné globalement asymptotiquement stable.

La Figure 9 ci-dessous illustre le résultat précédent. Le robot mobile part de la configuration schématisée sur la figure de gauche. Cette figure montre la trajectoire du robot tandis que celle de droite donne l'évolution des variables de commande.

Un inconvénient de la commande (34), bien apparent sur cette simulation, est que l'état du système ne converge que très lentement vers zéro. On peut montrer en effet que ce taux n'est qu'en $1/\sqrt{t}$ pour la plupart des trajectoires du système bouclé. Cette propriété est lié au fait que la commande est Lipschitz par rapport à x ; elle est caractéristique des systèmes dont le linéarisé n'est pas stabilisable, comme le formalisme la proposition suivante.

Proposition 10 *Soit $\dot{x} = f(x, u)$ ($x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$) un système de commande avec f différentiable, et $(x, u) = (0, 0)$ un point d'équilibre de ce système. On suppose que le linéarisé de ce système n'est pas stabilisable. Considérons également un retour d'état instationnaire continu u , avec $u(0, t) = 0$ pour tout t , u périodique par rapport à t , et $u(., t)$ $k(t)$ -Lipschitz par rapport à x avec k bornée. Alors, ce retour d'état ne peut assurer une convergence exponentielle des solutions: il n'existe pas de constantes $K > 0$ et $\gamma > 0$ telles que, le long des trajectoires $x(.)$ du système, on ait*

$$|x(t)| \leq K|x(t_0)|e^{-\gamma(t-t_0)}. \quad (35)$$

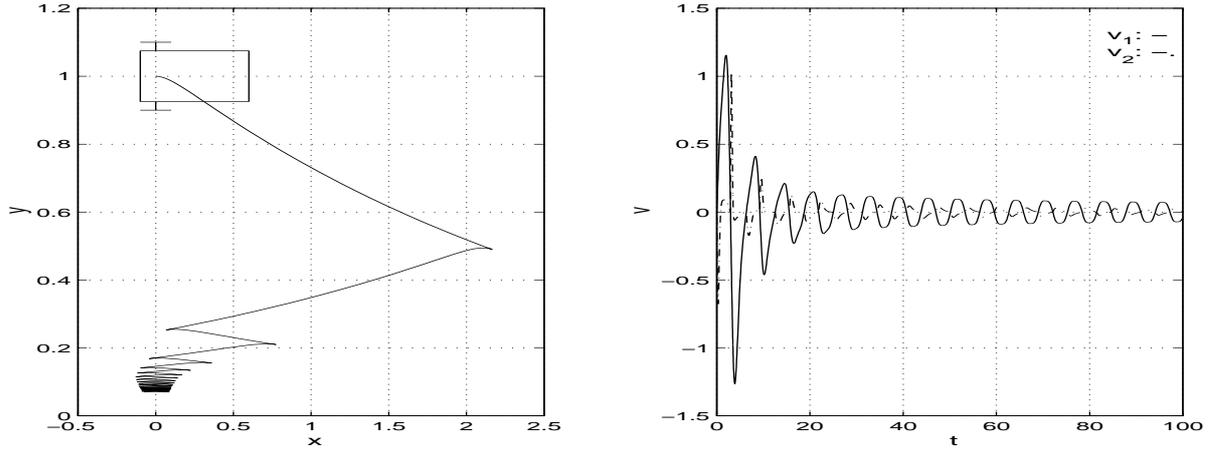


Figure 9: Stabilisation par un contrôleur Lipschitz

La raison intuitive de cette impossibilité peut être illustrée facilement sur l'unicycle. La deuxième équation est donnée, dans la représentation chaînée, par $\dot{z}_2 = v_1 z_3$. Étant donné que la linéarisation de cette équation donne $\dot{z}_2 = 0$, l'approximation linéaire du système à l'origine n'est pas commandable. Dans ces conditions, pour obtenir une convergence exponentielle, il faudrait au moins une commande (linéaire) dont les gains tendent vers l'infini lorsque la norme de l'état tend vers zéro, ce qui exclut les commandes Lipschitz. Motivés par ce type de raisonnement, des développements récents ont conduit à utiliser des retours d'état seulement continus afin d'obtenir des convergences de type exponentielle. Le principe sous-jacent consiste en quelque sorte à faire varier les gains en fonction de l'état (ces gains devenant infinis à l'origine) afin de retrouver une convergence plus rapide. Un exemple de retour d'état instationnaire continu et exponentiellement stabilisant est donné dans la proposition suivante.

Proposition 11 *Le retour d'état instationnaire continu*

$$\begin{cases} v_1(z, t) &= -k_1 z_1 + \rho(z) \sin t \\ v_2(z, t) &= -v_1(z, t) \frac{k_2}{\rho^2(z)} z_2 - |v_1(z, t)| \frac{k_3}{\rho(z)} z_3, \end{cases} \quad (36)$$

avec $\rho(z)$ la solution positive (unique) de l'équation

$$\rho^6 - \rho^2 z_3^2 - k_2 z_2^2 = 0,$$

rend l'origine du système chaîné globalement, asymptotiquement, et exponentiellement stable.

Remarquons la ressemblance entre les commandes (34) et (36). La fonction ρ peut être déterminée analytiquement en se ramenant à une équation du troisième degré par le changement de variable $X = \rho^2$. On peut également montrer que la commande (36) est bien définie (par continuité) à l'origine. Plus précisément, les rapports

$$\frac{|z_3|}{\rho(z)}, \quad \text{et} \quad \frac{|z_2|}{\rho^2(z)}$$

qui sont bien définis pour $|(z_2, z_3)| \neq 0$, tendent vers zéro lorsque $|(z_2, z_3)|$ tend vers zéro. Ceci assure la continuité de la commande.

Il est important de faire quelques remarques sur la propriété de convergence exponentielle garantie par le résultat ci-dessus. En effet, cette propriété ne correspond pas tout à fait à la propriété de convergence exponentielle classique. Dans le cas de systèmes linéaires par exemple, la convergence exponentielle signifie que la relation (35) est satisfaite. Dans notre cas, cette inégalité devient

$$\rho(z(t)) \leq K\rho(z(t_0))e^{-\gamma(t-t_0)}.$$

La fonction ρ est par exemple la fonction de la Proposition 11 ou, de façon plus explicite (et pour une autre valeur de K), la fonction

$$\rho(z) = (z_1^6 + z_2^2 + |z_3|^3)^{1/6}.$$

Malgré le fait que cette fonction soit bien une mesure de la norme de l'état (c'est une fonction définie positive qui tend vers l'infini lorsque $|x|$ tend vers l'infini), elle n'est pas équivalente à la norme euclidienne classique. Ceci ne modifie évidemment pas le fait que chaque variables z_i tend exponentiellement vers zéro. Cependant le comportement transitoire est affecté car on a seulement

$$|z_i(t)| \leq K|z(t_0)|^\alpha e^{-\gamma(t-t_0)}$$

avec $\alpha < 1$, et non pas

$$|z_i(t)| \leq K|z(t_0)|e^{-\gamma(t-t_0)}.$$

Cette loi de commande est illustrée par les résultats de simulation de la Figure 10. Pour cette simulation, la variable ρ a été calculée numériquement, à chaque pas d'intégration. La comparaison avec la simulation de la Figure 9 montre clairement le gain de performance obtenu.

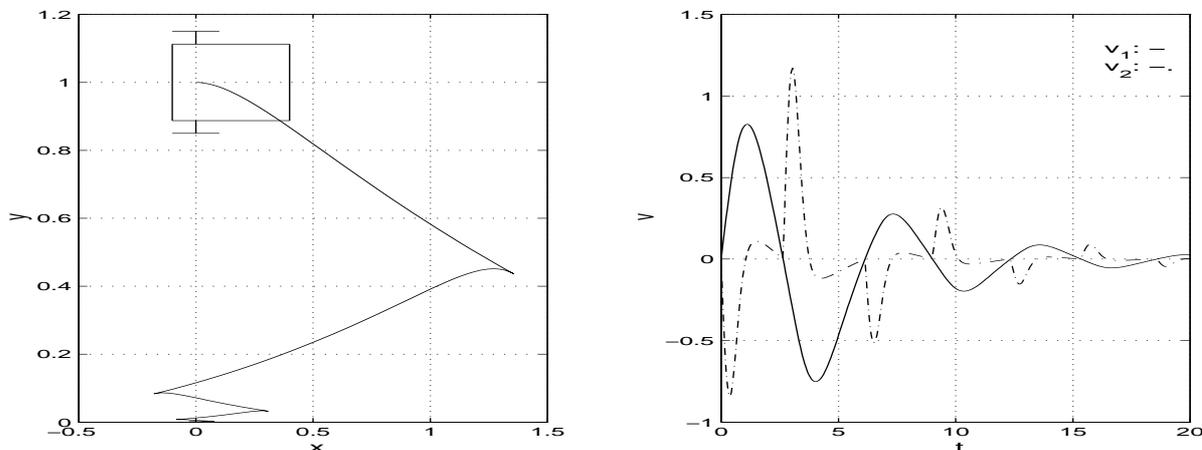


Figure 10: Stabilisation par un contrôleur seulement continu

Retours d'état hybrides: Ces retours d'état constituent une autre alternative pour la stabilisation de configurations fixes. Ils sont en général à mi-chemin entre la commande en boucle ouverte et le retour d'état, dans le sens où la dépendance par rapport à l'état n'est généralement

réinitialisée que périodiquement (et non pas de façon continue comme c'est le cas des retours d'état instationnaires). Il en résulte qu'entre les instants de réinitialisation, le système est commandé en boucle ouverte. Ce type de retour d'état peut toutefois présenter certains avantages par rapport aux retours d'état instationnaires (ce point sera brièvement évoqué plus loin). Un exemple de retour d'état hybride est fourni par la proposition suivante.

Proposition 12 *La loi de commande v définie par*

$$v(t) = u(z(kT), t) \quad \forall t \in [kT, (k+1)T) \quad (37)$$

que l'on peut également écrire

$$\begin{aligned} v(t) &= u(\bar{z}(t), t) \\ \bar{z}(t) &= z(kT) \quad \text{pour } t \in [kT, (k+1)T) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} u_1(z, t) &= \frac{1}{T} [(k_1 - 1)z_1 + 2\pi\rho(z) \sin(\omega t)] \\ u_2(z, t) &= \frac{1}{T} [(k_3 - 1)z_3 + 2(k_2 - 1)\frac{z_2}{\rho(z)} \cos(\omega t)] \end{cases}$$

et

$$k_1, k_2, k_3 \in (-1, 1), \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \rho(z) = k_4 |z_2|^{1/2} \quad (k_4 > 0),$$

stabilise exponentiellement l'origine du système chaîné étendu

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= u_1 \\ \dot{z}_2 &= u_1 z_3 \\ \dot{z}_3 &= u_2 \\ \bar{z}(t) &= z(kT) \quad \text{pour } t \in [kT, (k+1)T) \end{cases}$$

La Figure 11 ci-dessous montre le comportement du robot, ainsi que l'évolution des variables de commande. La trajectoire obtenue est relativement proche de celle de la Figure 10. Ceci est dû en particulier au fait que les deux commandes assurent une convergence exponentielle des trajectoires vers l'origine.

Mentionnons pour mémoire quelques problèmes posés par l'application des commandes non-linéaires que nous venons de présenter (retours d'état instationnaires ou hybrides). Des recherches récentes ont porté sur l'analyse des propriétés de robustesse de ces lois de commandes. Un problème qu'il est naturel de considérer est celui de la robustesse par rapport à des dynamiques non modélisées. Dans le cas de l'unicycle par exemple, dont les équations cinématiques ont la forme $\dot{x} = u_1 b_1(x) + u_2 b_2(x)$, on souhaite savoir si une loi de commande stabilisant ce système, stabilise également le système perturbé $\dot{x} = u_1(b_1(x) + \epsilon g_1(x)) + u_2(b_2(x) + \epsilon g_2(x))$, avec g_1 et g_2 des applications continues, et ϵ un paramètre quantifiant l'erreur de modèle. Ce type d'erreur permet par exemple de prendre en compte des incertitudes sur les caractéristiques géométriques du robot. On peut montrer que les lois de commandes du type (36) ne sont pas robustes par rapport à ce type d'erreur dans le sens où des solutions du système, au lieu de converger vers l'origine, vont, pour certaines fonctions g_1 et g_2 et pour ϵ arbitrairement petit, osciller dans un voisinage de l'origine sans converger vers ce point d'équilibre. Autrement dit, la commande

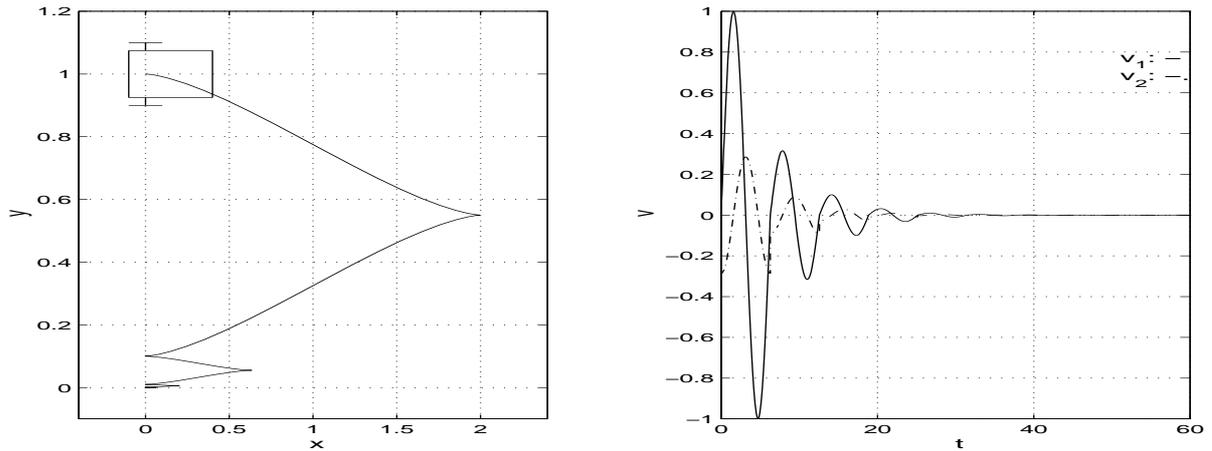


Figure 11: Simulation du contrôleur hybride

ne possède pas la propriété d'assurer la stabilisation asymptotique de l'origine du système de façon robuste vis à vis d'erreurs de modélisation. Les propriétés de stabilité de l'origine et de convergence vers l'origine sont toutes deux perdues dans ce cas. Il se trouve que la loi (37) ne présente pas ce problème: la convergence des trajectoires est garantie pour des erreurs de modèle suffisamment petites.

5 Repères bibliographiques

À notre connaissance, il n'existe que très peu de références en français sur la commande de robots mobiles. Par contre, de nombreuses références en anglais, et en particulier des publications de recherche, sont disponibles. En ce qui concerne les références de type synthèse, mentionnons les ouvrages [3], [9], et [21], qui contiennent des chapitres sur la modélisation et la commande des robots mobiles. Une étude détaillée des modèles cinématiques et dynamiques des différents types de robots mobiles est donnée dans [2]. L'usage de la forme chaînée pour représenter les équations des robots mobiles a été proposé dans [14], puis généralisée dans [19].

Le problème de suivi de chemin est peut-être chronologiquement le premier à avoir retenu l'attention des chercheurs en robotique mobile. Parmi les travaux précurseurs dans ce domaine, on peut citer [6] et [15]. Les résultats présentés dans cet ouvrage sont principalement basés sur [17] et [18]. La dernière référence contient en particulier les détails du suivi de chemin avec la forme chaînée de dimension générale (i.e. Proposition 8).

Le problème de la poursuite d'un véhicule de référence de type unicycle et/ou voiture est traité dans les ouvrages de synthèse [3], [9], et [21], ainsi que dans de nombreux articles de conférences et de revues. Cependant, la Proposition 4 constitue à notre connaissance un résultat original, présentant l'intérêt complémentaire d'être généralisable sans grande difficulté à des systèmes de dimension supérieure de type voiture avec remorques. Plusieurs auteurs ont également abordé ce problème par des techniques de linéarisation par retour d'état dynamique. On pourra en particulier consulter à ce sujet [5], [7], ainsi que [3, Chap. 8].

De nombreux articles ont été publiés récemment sur la stabilisation de configurations fixes.

La référence [8] donne un aperçu de l'ensemble des techniques de commande par retour d'état qui ont été élaborées dans ce but, ainsi qu'une liste fournie de références. Le premier résultat concernant l'utilisation de retours d'état instationnaires pour la stabilisation de ces systèmes a été donné dans [16]. L'article de conférence [11] fait le point sur l'état des travaux en cours dans ce domaine. Il se situe dans le cadre plus général des systèmes de commande non-linéaires. Des résultats plus spécifiques, et en particulier ceux relatifs aux Propositions 9 et 11, sont donnés dans [18] et [12]. En ce qui concerne la synthèse de retours d'état seulement continus mais assurant une stabilité exponentielle, on pourra consulter [10]. Des synthèses de retours d'état hybrides peuvent être trouvées dans [20] et [1] par exemple. La loi de commande donnée dans la Proposition 12 a été obtenue dans [13]. Nous n'avons pas abordé ici la synthèse de retours d'état discontinus, mais le lecteur intéressé pourra trouver des exemples de tels retours d'état dans [4].

Conclusion

References

- [1] M. K. Bennani and P. Rouchon. Robust stabilization of flat and chained systems. In *European Control Conference (ECC)*, pages 2642–2646, 1995.
- [2] G. Campion, B. d'Andrea Novel, and G. Bastin. Structural properties and classification of dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 12:47–62, 1996.
- [3] C. Canudas de Wit, B. Siciliano, and G. Bastin (Eds). *Theory of robot control*. Springer Verlag, 1996.
- [4] C. Canudas de Wit and O. J. Sørдалen. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(11):1791–1797, 1992.
- [5] B. d'Andréa Novel, G. Campion, and G. Bastin. Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization. *International Journal of Robotics Research*, 14:543–559, 1995.
- [6] E.D. Dickmanns and A. Zapp. Autonomous high speed road vehicle guidance by computer vision. In *IFAC World Congress*, 1987.
- [7] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems. In *European Control Conference (ECC)*, pages 1882–1887, 1995.
- [8] I. Kolmanovsky and N.H. McClamroch. Developments in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems*, pages 20–36, 1995.
- [9] J.-P. Laumond, editor. *Robot motion planning and control*, volume 229 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, 1998.
- [10] R.T. M'Closkey and R.M. Murray. Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 42:614–628, 1997.

- [11] P. Morin, J.-B. Pomet, and C. Samson. Developments in time-varying feedback stabilization of nonlinear systems. In *IFAC Nonlinear Control Systems Design Symp. (NOLCOS)*, pages 587–594, 1998.
- [12] P. Morin and C. Samson. Control of nonlinear chained systems. from the routh-hurwitz stability criterion to time-varying exponential stabilizers. In *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 618–623, 1997.
- [13] P. Morin and C. Samson. Exponential stabilization of nonlinear driftless systems with robustness to unmodeled dynamics. Technical Report 3477, INRIA, 1998.
- [14] R.M. Murray and S.S. Sastry. Steering nonholonomic systems in chained form. In *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 1121–1126, 1991.
- [15] W.L. Nelson and I.J. Cox. Local path control for an autonomous vehicle. In *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1504–1510, 1988.
- [16] C. Samson. Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart. *Int. Workshop in Adaptive and Nonlinear Control: Issues in Robotics. LNCIS, Vol. 162, Springer Verlag, 1991*, 1990.
- [17] C. Samson. Path following and time-varying feedback stabilization of a wheeled mobile robot. In *Int. Conf. on Automation, Robotics, and computer-vision*, 1992.
- [18] C. Samson. Control of chained systems. application to path following and time-varying point-stabilization. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40:64–77, 1995.
- [19] O. J. Sørдалen. Conversion of the kinematics of a car with n trailers into a chained form. In *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 382–387, 1993.
- [20] O. J. Sørдалen and O. Egeland. Exponential stabilization of nonholonomic chained systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40:35–49, 1995.
- [21] Y.F. Zheng, editor. *Recent trends in mobile robots*, volume 11 of *World Scientific Series in Robotics and Automated Systems*. World Scientific, 1993.