Polytech'Nice
Département MAM
Option MAM5 INUM

Examen de Lois de conservation et volumes finis

Paola Goatin

10 janvier 2017

Notes du cours et documents autorisés. 4 pages d'énoncé.
Durée de l'épreuve : 3h.

Exercice I (PH, 20 points).

On considère les équations de Saint Venant sans topographie pour l'écoulement des eaux peu profondes sur un fond plat :

$$\begin{aligned} & h_t + (hu)_x = 0, \\ & (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right)_x = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

où $h > 0$ est la hauteur de l'eau, u la vitesse et g la constante de gravité.

1. **(3 points)** Ecrire le système sous la forme d'un système de lois de conservation $U_t + f(U)_x = 0$. En se plaçant dans les variables (h, u), trouver la matrice $A = A(h, u)$ telle que le système (1) soit équivalent au système

   $$\begin{pmatrix} h_t \\ u_t \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} h_x \\ u_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les valeur propres de la matrice A et montrer que le systèmes est strictement hyperbolique.

2. **(3 points)** Montrer que les deux champs caractéristiques sont vraiment non linéaires.

3. **(3 points)** Calculer les invariants de Riemann du système (les chercher sous la forme $W(h, u) = u + \phi(h)$).

4. **(4 points)** Soit une détente de la première famille reliant un état gauche (h_L, u_L) à un état droit (h, u). Montrer que $u_L < u$ et $h < h_L$. Calculer u en fonction de h_L, u_L et h. Plus précisément, montrer que u peut se mettre sous la forme

   $$u = u_L + \Phi(h_L, h).$$

   Expliciter la fonction Φ.

5. **(4 points)** Soit un choc de vitesse σ reliant un état gauche (h_L, u_L) à un état droit (h, u). Montrer que les relations de Rankine-Hugoniot peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} j &= h(u-\sigma) = h_L(u_L-\sigma), \\ hu(u-\sigma) + \frac{1}{2}gh^2 &= h_L u_L(u_L-\sigma) + \frac{1}{2}gh_L^2. \end{aligned}$$

En déduire que

$$j = \frac{g(h_L^2 - h^2)}{2(u-u_L)}.$$

Montrer que pour un choc de la première famille on a $h > h_L$ et $u < u_L$ et écrire u sous la forme

$$u = u_L + \Psi(h_L, h).$$

Expliciter la fonction Ψ.

6. **(3 points)** Chercher une couple (η, q) entropie-flux du système avec une entropie convexe de la forme $\eta = \frac{1}{2}hu^2 + \gamma(h)$. Expliciter la fonction γ et vérifier que la fonction η est convexe.

Exercice II (VF, 10 points).

On considère maintenant le système de Saint Venant avec topographie :

$$\begin{aligned} & h_t + (hu)_x = 0, \\ & (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x = -hgz_x. \end{aligned} \tag{2}$$

où $h > 0$ est la hauteur de l'eau, u la vitesse, g la constante de gravité et $z = z(x)$ est la topographie.

On s'intéresse aux solutions stationnaires du système (2), c'est-à-dire les solutions $h = h(x)$, $u = u(x)$ qui ne dependent pas de la variable temps t.

a) **(2 points)** En se plaçant dans les variables (h, u), montrer que ces solutions satisfont les équations suivantes :

$$\begin{aligned} & hu = cst, \\ & \frac{1}{2}u^2 + g(h+z) = cst. \end{aligned} \tag{3}$$

Que deviennent ces équations dans le cas particulier d'eau au repos $u(x) \equiv 0$?

On cherche des solutions approchées constantes par mailles

$$U_j^n = \begin{pmatrix} h_j^n \\ h_j^n u_j^n \end{pmatrix}$$

calculées à l'aide d'une méthode de volumes finis de la forme

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_l(U_j^n, U_{j+1}^n, z_j, z_{j+1}) - F_r(U_{j-1}^n, U_j^n, z_{j-1}, z_j)\right),$$

compatible avec les solutions stationnaires. Plus particulièrement, on cherche un schéma numérique qui preserve les solutions stationnaires discrètes au repos :

$$\begin{aligned} & u_j = u_{j+1} = 0, \\ & h_j + z_j = h_{j+1} + z_{j+1}, \end{aligned} \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

On considère donc les flux numériques définis par

$$\begin{aligned} F_l(U_L, U_R, z_L, z_R) &= \mathcal{F}(U_L^*, U_R^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g(h_L^2 - {h_L^*}^2) \end{pmatrix}, \\ F_r(U_L, U_R, z_L, z_R) &= \mathcal{F}(U_L^*, U_R^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g(h_R^2 - {h_R^*}^2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{F}(U_L^*, U_R^*)$ est un flux numérique donné consistant avec le système homogène (1) : $\mathcal{F}(U, U) = f(U)$. Les états $U_L^* = (h_L^*, h_L^* u_L)$ et $U_R^* = (h_R^*, h_R^* u_R)$ sont définis par les équations

$$\begin{aligned} h_L^* + z^* &= h_L + z_L, \\ h_R^* + z^* &= h_R + z_R, \end{aligned}$$

où $z^* = \max(z_L, z_R)$.

Montrer que le schéma numérique ainsi construit satisfait les propriétés suivantes :

b) **(2 points)** Le schéma est conservatif dans la variable h.

c) **(3 points)** Le schéma preserve les solutions stationnaires avec vitesse nulle $u = 0$. (On montre que dans ce cas $U_L^* = U_R^*$ et $F_l = f(U_L)$, $F_r = f(U_R)$).

d) **(3 points)** Le schéma est consistant avec le système (2), i.e. il est consistant avec le flux

$$F_l(U, U, z, z) = F_r(U, U, z, z) = f(U),$$

et avec le terme source

$$F_r(U_L, U_R, z_L, z_R) - F_l(U_L, U_R, z_L, z_R) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh(z_R - z_L) + o(|z_R - z_L|) \end{pmatrix}$$

pour $U_L, U_R \to U$ et $z_L, z_R \to z$.