Polytech'Nice
Département MAM
Option MAM5 INUM

Examen de Lois de conservation et volumes finis

Paola Goatin
5 février 2015

Notes du cours et documents autorisés. 2 pages d'énoncé.
Durée de l'épreuve : 2h.

On considère le système de Aw et Rascle pour la modélisation macroscopique du trafic routier en coordonnées euleriennes :

$$\begin{aligned} &\rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ &(\rho(v + p(\rho)))_t + (\rho v(v + p(\rho)))_x = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

où $\rho > 0$ est la densité des véhicules, v leur vitesse moyenne et p joue le rôle d'un facteur d'anticipation (on assume $p'(\rho) > 0$ et $p''(\rho) \geq 0$, par exemple on pourra prendre $p(\rho) = \rho$).

1. **(1.5 points)** Montrer que pour des solutions régulières le système (1) est équivalent à

$$\begin{aligned} &\rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ &w_t + v w_x = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

avec $w = v + p(\rho)$.
Montrer ensuite que, en notant $D_t = \partial_t + v\partial_x$ (dérivée lagrangienne) et $\tau = 1/\rho$ (volume spécifique), le système (2) est équivalent à

$$\begin{aligned} &\rho D_t \tau - v_x = 0, \\ &D_t w = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

2. **(3 points)** En se plaçant dans les variables $\mathbf{v} = (\tau, w)$, montrer que le système (3) est équivalent au système

$$\begin{pmatrix} D_t\tau \\ D_t w \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \tau_x \\ w_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} \tau\tilde{p}'(\tau) & -\tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\tilde{p}(\tau) = p(1/\tau) = p(\rho)$. Calculer les valeurs propres de la matrice A et montrer que le système est strictement hyperbolique pour $\tau > 0$. Vérifier que les valeurs propres sont naturellement ordonnées ($\lambda_1(\mathbf{v}) < \lambda_2(\mathbf{v})$), ce qui permet de définir sans ambiguïté les 1- et 2-champs caractéristiques.

3. **(3 points)** Calculer les vecteurs propres de la matrice A et montrer que le premier champ caractéristique est vraiment non-linéaire, tandis que le deuxième est linéairement dégénéré.

4. **(2 points)** Calculer les invariants de Riemann du système (les chercher sous la forme $W_i(\tau, w) = w + \phi_i(\tau)$, $i = 1, 2$).
5. **(3 points)** Soit une détente de la première famille reliant un état gauche (τ_L, w_L) à un état droit (τ, w) :.

$$W_1(\tau, w) = W_1(\tau_L, w_L).$$

   Montrer que les états (τ_L, w_L) et (τ, w) vérifient la condition de Rankine-Hugoniot pour (1) (pour une certaine vitesse σ à expliciter). Vérifier que les ondes de la deuxième famille ont la même propriété (il s'agit de discontinuités de contact).
   Tracer ces courbes dans le demi-plan $\{(\tau, w) \in \mathbb{R}^2 \colon \tau > 0\}$.
6. **(1.5 points)** Les solutions du système (3) peuvent être approchées par le schéma suivant

$$\begin{aligned} &\rho_j^n \frac{\tau_j^{n+1/2} - \tau_j^n}{\Delta t} - \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} = 0, \\ &w_j^{n+1/2} = w_j^n. \end{aligned} \tag{4}$$

   Montrer que ceci équivaut à poser $\Delta x_j^n = \Delta x + \Delta t(v_{j+1}^n - v_j^n)$ et

$$\begin{aligned} \rho_j^{n+1/2} &= \frac{\Delta x}{\Delta x_j^n} \rho_j^n, \\ w_j^{n+1/2} &= w_j^n \end{aligned} \tag{5}$$

   (on est donc en train de résoudre (1) dans un référentiel qui se déplace avec les voitures).
7. **(3 points)** Pour revenir au référentiel fixe, on moyenne les variables conservatives obtenues sur les cellules de départ (étape transport) :

$$\begin{aligned} &\rho_j^{n+1} = \rho_j^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} v_j^n (\rho_j^{n+1/2} - \rho_{j-1}^{n+1/2}), \\ &\rho_j^{n+1} w_j^{n+1} = \rho_j^{n+1/2} w_j^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} v_j^n (\rho_j^{n+1/2} w_j^{n+1/2} - \rho_{j-1}^{n+1/2} w_{j-1}^{n+1/2}) \end{aligned} \tag{6}$$

   Montrer que le schéma résultant des étapes (5) et (6) conserve la masse et la “quantité de mouvement” :

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_j \Delta x \rho_j^{n+1} = \sum_j \Delta x \rho_j^n, \\ &\textstyle\sum_j \Delta x \rho_j^{n+1} w_j^{n+1} = \sum_j \Delta x \rho_j^n w_j^n \end{aligned} \tag{7}$$

8. **(3 points)** On considère une donnée initiale correspondant à une discontinuité de contact :

$$\begin{aligned} &\rho_{j-1}^0 = 1, \quad \rho_j^0 = 2, \quad \rho_{j+1}^0 = 2, \\ &v_{j-1}^0 = 2, \quad v_j^0 = 2, \quad v_{j+1}^0 = 2, \end{aligned} \qquad \text{et} \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{4}.$$

   Calculer v_j^1. Qu'observez-vous ?