Polytech'Nice
Département MAM
Option MAM5 INUM

Examen de Lois de conservation et modèles de trafic

Paola Goatin
24 janvier 2011

Notes du cours et documents autorisés. 2 pages d'énoncé.
Durée de l'épreuve : 2h.

On considère le système 2×2 suivant pour la modélisation macroscopique du trafic routier en phase congestionnée :

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ q_t + ((q-Q)v)_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $\rho > 0$ est la densité des véhicules, q joue le rôle d'une quantité de mouvement et la vitesse moyenne v est donnée par la relation de fermeture

$$v = v(\rho, q) = \left(1 - \frac{\rho}{R}\right)\frac{q}{\rho}. \tag{2}$$

Dans (1), (2), R et $Q \in [Q^-, Q^+]$, $Q^- > 0$, dénotent respectivement la densité maximale des voitures et un paramètre de la route donné.

1. **(4 points)** Ecrire le système sous la forme d'un système de lois de conservation
$$\mathbf{u}_t + f(\mathbf{u})_x = 0$$
(expliciter le vecteur des quantités conservées $\mathbf{u}$ et la fonction flux $f(\mathbf{u})$).
Montrer que le système (1) est équivalent au système
$$\begin{pmatrix} \rho_t \\ q_t \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \rho_x \\ q_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} -\frac{q}{R} & 1 - \frac{\rho}{R} \\ -\frac{q}{\rho^2}(q-Q) & (2q-Q)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right) \end{pmatrix}.$$
Vérifier que les valeurs propres de la matrice A sont
$$\lambda_1(\rho, q) = \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{\rho}\right)(Q - q) - \frac{Q}{R}$$
et
$$\lambda_2(\rho, q) = v(\rho, q).$$
Montrer que le système est strictement hyperbolique sur le domaine $]0, R] \times [Q^-, Q^+]$ (vérifier que $\lambda_1 < \lambda_2$ pour tout $(\rho, q) \in]0, R] \times [Q^-, Q^+]$).
Vérifier également que $\lambda_2(\rho, q) \geq 0$.
Que se passe-t-il quand $\rho = 0$ (dans le vide) ?

2. **(3 points)** Vérifier que les vecteurs propres de la matrice A sont

$$r_1(\rho, q) = \begin{pmatrix} \rho \\ q - Q \end{pmatrix}, \qquad r_2(\rho, q) = \begin{pmatrix} R - \rho \\ R\frac{q}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Montrer que le deuxième champ caractéristique est linéairement dégénéré tandis que $\nabla\lambda_1 \cdot r_1 > 0$ pour $q < Q$ et $\nabla\lambda_1 \cdot r_1 < 0$ pour $q > Q$.

3. **(3 points)** Vérifier que les invariants de Riemann du système sont

$$W_1(\rho, q) = \frac{q - Q}{\rho}, \qquad W_2(\rho, q) = v(\rho, q).$$

4. **(4 points)** Soit une détente de la première famille reliant un état gauche (ρ_L, q_L) à un état droit (ρ, q). Montrer que les états (ρ_L, q_L) et (ρ, q) vérifient la condition de Rankine-Hugoniot (pour une certaine vitesse σ à expliciter). Vérifier que les ondes de la deuxième famille on la même propriété (ils s'agit de discontinuités de contact). Cela signifie que les courbes des détentes coïncident avec les courbes des chocs et le système est dit "de Temple".
Tracer ces courbes dans le plan $\{(\rho, q) \in \mathbb{R}^2 \colon \rho > 0, q > 0\}$.

5. **(2 point)** On considère la fonction

$$\bar{\mathbf{u}}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si } x/t < \sigma, \\ \mathbf{u}_R & \text{si } x/t > \sigma, \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ q_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ q_R \end{pmatrix},$$

$$\rho_L = \tfrac{1}{2}, \quad q_L = \tfrac{1}{2}, \quad \rho_R = \tfrac{2}{3}, \quad q_R = 1, \quad \sigma = \tfrac{1}{2}.$$

Vérifier que $\bar{\mathbf{u}}$ est une discontinuité de contact de la deuxième famille.

6. **(4 points)** Montrer que la fonction

$$\mathcal{S}(\rho, q) = \rho\, \mathcal{G}\left(\frac{q - Q}{\rho}\right),$$

où $\mathcal{G}$ désigne une fonction quelconque régulière, est une entropie du système. En particulier, déterminer le flux $\mathcal{F}$ tel que

$$(\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{F})^t = (\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{S})^t A.$$

Donner des conditions sur $\mathcal{G}$ pour que $\mathcal{S}$ soit convexe.