Polytech'Nice
Département MAM
Option MAM5 INUM

Examen de Lois de conservation et volumes finis du 10 janvier 2017 Corrigé

Exercice I.

1. On a
$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \qquad f(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \qquad A(h,u) = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}.$$
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = u - \sqrt{gh}$ et $\lambda_2 = u + \sqrt{gh}$, donc $\lambda_1 < \lambda_2$ pour $h > 0$.

2. Les vecteurs propres à droite sont
$$r_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix},$$
donc $\nabla\lambda_1 \cdot r_1 = \frac{3}{2}\sqrt{g} > 0$ et $\nabla\lambda_2 \cdot r_2 = \frac{3}{2}\sqrt{g} > 0$.

3. De $\nabla W \cdot r_1 = 0$ on obtient $\phi'(h) = \sqrt{g/h}$, donc $W_1 = u + 2\sqrt{gh}$. De $\nabla W \cdot r_2 = 0$ on obtient $\phi'(h) = -\sqrt{g/h}$, donc $W_2 = u - 2\sqrt{gh}$.

4. La condition d'entropie nous dit que $\lambda_1(U_L) < \lambda_1(U)$, donc
$$u_L - \sqrt{gh_L} < u - \sqrt{gh}.$$
Comme l'invariant de Riemann W_1 doit être constant, on a aussi
$$u_L + 2\sqrt{gh_L} = u + 2\sqrt{gh} \quad \Rightarrow \quad u = u_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh}.$$
Donc
$$(u - \sqrt{gh}) - (u_L - \sqrt{gh_L}) = 3\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h}) > 0 \quad \Rightarrow \quad h < h_L$$
et
$$2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h}) = u - u_L > 0 \quad \Rightarrow \quad u > u_L.$$

5. On obtient
$$u = u_L \pm (h - h_L)\sqrt{g\frac{h + h_L}{hh_L}}.$$
Le raccord avec la courbe de détente impose que $h > h_L$ et $u < u_L$, ce qui donne
$$u = u_L - (h - h_L)\sqrt{g\frac{h + h_L}{hh_L}}.$$

6. On a $(\nabla\eta)^T A = (\nabla q)^T$:

$$\begin{aligned} q_h &= \frac{1}{2}u^3 + u\gamma' + ghu, \\ q_u &= \frac{3}{2}hu^2 + h\gamma'. \end{aligned}$$

Donc on doit imposer

$$q_{hu} = \frac{3}{2}u^2 + \gamma' + gh = \frac{3}{2}u^2 + \gamma' + h\gamma'' = q_{uh},$$

ce qui nous donne $\gamma'' = g$. On peut donc choisir

$$\eta = \frac{1}{2}hu^2 + \frac{1}{2}gh^2, \quad q = \frac{1}{2}hu^3 + ghu^2.$$

La hessienne de η par rapport à $U = (h, m = hu)^T$ est

$$\begin{pmatrix} g + \frac{m^2}{h^3} & -\frac{m}{h^2} \\ -\frac{m}{h^2} & \frac{1}{h} \end{pmatrix},$$

dont la trace et le déterminant sont > 0.

Exercice II.

a) Si on soustrait u fois la première équation à la deuxième et on divise par h on obtient :

$$\begin{aligned} &h_t + (hu)_x = 0, \\ &u_t + uu_x + gh_x + gz_x = 0. \end{aligned}$$

Les solutions stationnaires satisfont

$$\begin{aligned} &(hu)_x = 0, \\ &\tfrac{1}{2}(u^2)_x + gh_x + gz_x = 0. \end{aligned}$$

Si $u(x) \equiv 0$ on obtient $h + z = cst$.

b) On note les composantes de F_l et F_r par $F_l = (F_l^1, F_l^2)$, $F_r = (F_r^1, F_r^2)$. Il est évident que $F_r^1 = F_l^1$, donc le schéma est conservatif pour la première composante.

c) On considère une solution stationnaire discrète au repos $u_L = u_R = 0$, $h_L + z_L = h_R + z_R$. Alors on a

$$h_L^* = h_L + z_L - z^* = h_R + z_R - z^* = h_R^*,$$

et, puisque $u_L = u_R = 0$, on a aussi $U_L^* = U_R^*$. Donc par consistance de $\mathcal{F}$ on a $\mathcal{F}(U_L^*, U_R^*) = f(U_L^*) = f(U_R^*)$ et

$$\begin{aligned} F_l &= f(U_L^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g(h_L^2 - (h_L^*)^2) \end{pmatrix} = f(U_l), \\ F_r &= f(U_R^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g(h_R^2 - (h_R^*)^2) \end{pmatrix} = f(U_R), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$F_l(U_j^n, U_{j+1}^n, z_j, z_{j+1}) - F_r(U_{j-1}^n, U_j^n, z_{j-1}, z_j) = f(U_j^n) - f(U_j^n) = 0$$

et donc $U_j^{n+1} = U_j^n$.

d) Si $U_L = U_R = U$ et $z_L = z_R = z$, alors $U_L^* = U_R^* = U$, donc $F_l(U,U,z,z) = \mathcal{F}(U,U) = f(U)$ et $F_r(U,U,z,z) = \mathcal{F}(U,U) = f(U)$. Pour le terme source, on observe que

$$F_r(U_L, U_R, z_L, z_R) - F_l(U_L, U_R, z_L, z_R) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g\big((h_R^2 - {h_R^*}^2) + ({h_L^*}^2 - h_L^2)\big) \end{pmatrix},$$

$(z_L - z^*) = 0$ ou $(z_L - z^*) = z_L - z_R$ et $(z^* - z_R) = z_L - z_R$ ou $(z^* - z_R) = 0$. Le résultat suit par développement de Taylor.