Polytech'Nice
Département MAM
Option MAM5 INUM

Examen de Lois de conservation et volumes finis du 5 février 2015

Corrigé

1. **(1.5 points)** La deuxième équation se réécrit

$$\begin{aligned} 0 &= (v+p(\rho))\left(\rho_t + (\rho v)_x\right) + \rho\left((v+p(\rho))_t + v(v+p(\rho))_x\right) \\ &= \rho\left(w_t + v w_x\right) \end{aligned}$$

Ensuite, en posant $D_t = \partial_t + v\partial_x$ on obtient

$$\begin{aligned} &D_t\rho + \rho v_x = 0, \\ &D_t w = 0, \end{aligned}$$

puis on observe que

$$D_t \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2} D_t \rho$$

et donc $D_t\rho = -\rho^2 D_t\tau$, ce qui permet de conclure.

2. **(3 points)** On remplace $v = w - \tilde{p}(\tau)$ dans la première équation de (3) et on obtient :

$$D_t\tau + \tau\tilde{p}'(\tau)\tau_x - \tau w_x = 0.$$

Les valeur propres sont $\lambda_1 = \tau\tilde{p}'(\tau)$ et $\lambda_2 = 0$. Puisque $\tilde{p}'(\tau) = -\frac{1}{\tau^2}p'\left(\frac{1}{\tau}\right) < 0$ pour $\tau > 0$, on a $\lambda_1 < \lambda_2$. Le système est donc strictement hyperbolique pour $\tau > 0$.

3. **(3 points)** Les vecteurs propres sont

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{p}'(\tau) \end{pmatrix},$$

et on a

$$\begin{aligned} \nabla\lambda_1 \cdot r_1 &= \begin{pmatrix} \tilde{p}'(\tau) + \tau\tilde{p}''(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{p}'(\tau) + \tau\tilde{p}''(\rho) = \frac{1}{\tau^2}p'\left(\frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau^3}p''\left(\frac{1}{\tau}\right) > 0, \\ \nabla\lambda_2 \cdot r_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{p}'(\tau) \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

4. **(2 points)** La condition

$$\nabla W_1 \cdot r_1 = \begin{pmatrix} \phi'(\tau) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi'(\tau) = 0$$

donne $W_1 = w$. La condition

$$\nabla W_2 \cdot r_2 = \begin{pmatrix} \phi'(\tau) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{p}'(\tau) \end{pmatrix} = \phi'(\tau) + \tilde{p}'(\tau) = 0$$

donne $W_2 = w - \tilde{p}(\tau) = v$.

5. **(3 points)** La condition sur les invariants de Riemann donne la relation suivante

$$W_1(\tau, w) = W_1(\tau_L, w_L) \Longrightarrow w = w_L,$$

qui caractérise les détentes de la première famille. Les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites avec

$$\sigma = \frac{\rho v - \rho_L v_L}{\rho - \rho_L}.$$

Pour le deuxième champ on a

$$W_2(\tau, w) = W_2(\tau_L, w_L) \Longrightarrow v = v_L,$$

qui caractérise les ondes de la deuxième famille. Les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites avec $\sigma = v = v_L$.

6. **(1.5 points)** Simple substitution.

7. **(3 points)** Pour la masse :

$$\begin{aligned}
\sum_j \Delta x \rho_j^{n+1} &= \Delta x \sum_j \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} v_j^n \rho_{j-1}^{n+1/2} + \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} v_j^n\right) \rho_j^{n+1/2} \right] \\
&= \sum_j \left[\Delta t v_j^n \rho_{j-1}^{n+1/2} + \left(\Delta x - \Delta t v_j^n\right) \rho_j^{n+1/2} \right] \\
&= \sum_j \left[\Delta t v_{j+1}^n \rho_j^{n+1/2} + \left(\Delta x - \Delta t v_j^n\right) \rho_j^{n+1/2} \right] \\
&= \sum_j \left(\Delta x + \Delta t (v_{j+1}^n - v_j^n)\right) \rho_j^{n+1/2} \\
&= \sum_j \Delta x_j^n \rho_j^{n+1/2} = \sum_j \Delta x \rho_j^n.
\end{aligned}$$

Même raisonnement pour ρw.

8. **(3 points)** Puisque $v_j^0 = 2 \; \forall j$ est constante, on a

$$\rho_j^{1/2} = \rho_j^0 \quad w_j^{1/2} = w_j^0 \quad \forall j.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\rho_j^1 &= \rho_j^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x} v_j^0 (\rho_j^0 - \rho_{j-1}^0) = 2 - \frac{1}{4} 2(2-1) = \frac{3}{2}, \\
\rho_j^1 w_j^1 &= \rho_j^0 w_j^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x} v_j^0 (\rho_j^0 w_j^0 - \rho_{j-1}^0 w_{j-1}^0) = 4 - \frac{1}{4} 2(4-3) = \frac{7}{2},
\end{aligned}$$

ce qui donne $v_j^1 = \dfrac{\rho_j^1 w_j^1}{\rho_j^1} - \rho_j^1 = \dfrac{5}{6} \neq 2$. Cela montre que le schéma proposé introduit des erreurs au niveau des discontinuités de contact.