Polytech'Nice
Département MAM
Option MAM5 INUM

Examen de Lois de conservation et modèles de trafic du 14 fevrier 2012

Corrigé

Exercice 1. 1. **(4 points)** $\mathcal{NC} =]\check{\rho}_F, 1] \times [0, \hat{\rho}_F[$.

2. **(3 points)** Graphiquement.

Exercice 2. 1. **(1 point)**

$$Df(\vec{\rho}) = \begin{bmatrix} \beta_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

2. **(3 points)** On a

$$\begin{aligned} \delta = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad V_1(\psi - \rho_1) = V_2(\psi - \rho_2) \quad \text{et} \quad \rho_1\rho_2 = 0. \end{aligned}$$

Si on prend $\rho_1 = 0$, on obtient

$$\rho_2 = \frac{V_2 - V_1}{2V_2 - V_1} > 0.$$

Si on prend $\rho_2 = 0$, on obtient

$$(V_1 - V_2)\psi = V_1\rho_1,$$

ce qui impliquerait $\rho_1 < 0$. Donc

$$(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2) = \left(0, \frac{V_2 - V_1}{2V_2 - V_1}\right)$$

En conclusion, le système est strictement hyperbolique sauf en $(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2)$ où les deus valeurs propres coïncident.

3. **(2 points)** Calculs.

4. **(3 points)** On a

$$\nabla\mathcal{F}^T = \begin{pmatrix} -\rho_1 \ln \rho_1 - \rho_2 \ln \rho_2 + \psi \ln \rho_1 \\ -\rho_1 \ln \rho_1 - \rho_2 \ln \rho_2 + \psi \ln \rho_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{\ln \rho_1}{V_1} \\ \frac{\ln \rho_2}{V_2} \end{pmatrix}^T \cdot Df = \nabla\mathcal{S}^T \cdot Df$$

5. **(4 points)** Pour $\rho_1 = 0$ on obtient

$$\lambda_1(0, \rho) = \frac{1}{2}\left(\beta_1 + \beta_2 - |\beta_1 - \beta_2|\right) = \begin{cases} \beta_1 & \text{si } \rho < \bar{\rho}_2 \\ \beta_2 & \text{si } \rho > \bar{\rho}_2 \end{cases},$$

ce qui implique $\lambda_1(0,\rho_2^l) = V_1(1-\rho_2^l)$ et $\lambda_1(0,\rho_2^r) = V_2(1-2\rho_2^r)$;

$$\lambda_2(0,\rho) = \frac{1}{2}\left(\beta_1+\beta_2+|\beta_1-\beta_2|\right) = \begin{cases} \beta_2 & \text{si } \rho < \bar{\rho}_2 \\ \beta_1 & \text{si } \rho > \bar{\rho}_2 \end{cases},$$

ce qui implique $\lambda_2(0,\rho_2^l) = V_2(1-2\rho_2^l)$ et $\lambda_2(0,\rho_2^r) = V_1(1-\rho_2^r)$. Il suffit donc de vérifier que

$$V_1(1-\rho_2^r) < V_2(1-\rho_2^l-\rho_2^r) < V_2(1-2\rho_2^l).$$