Polytech'Nice
Département MAM
Option MAM5 INUM

Examen de Lois de conservation et modèles de trafic du 24 janvier 2011

Corrigé

1. **(4 points)** On a
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ q \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ (q-Q)v \end{pmatrix}.$$
Pour $\rho = 0$, le système n'est pas défini.
2. **(3 points)** On a
$$\begin{aligned} \nabla\lambda_1 \cdot r_1 &= \begin{pmatrix} \frac{Q-q}{\rho^2} \\ \frac{1}{\rho} - \frac{2}{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ q-Q \end{pmatrix} = 2\frac{Q-q}{R}, \\ \nabla\lambda_2 \cdot r_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{q}{\rho^2} \\ \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R-\rho \\ R\frac{q}{\rho} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$
3. **(3 points)** La condition
$$\nabla W_1 \cdot r_1 = \begin{pmatrix} -(q-Q)/\rho^2 \\ 1/\rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ q-Q \end{pmatrix} = 0$$
est vérifiée. La condition
$$\nabla W_2 \cdot r_2 = \begin{pmatrix} -\frac{q}{\rho^2} \\ \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R-\rho \\ R\frac{q}{\rho} \end{pmatrix} = 0.$$
est vérifiée également.
4. **(4 points)** La condition sur les invariants de Riemann donne la relations suivante
$$W_1(\rho, q) = W_1(\rho_L, q_L) \Longrightarrow q = Q + \rho\frac{q_L - Q}{\rho_L},$$
qui caractérise les détentes de la première famille. Les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaite avec
$$\sigma = \frac{\rho v - \rho_L v_l}{\rho - \rho_L} = \frac{(q-Q)v - (q_L - Q)v_L}{q - q_L}.$$
Pour le deuxième champ on a
$$W_2(\rho, q) = W_2(\rho_L, q_L) \Longrightarrow v = v_L,$$
qui caractérise les ondes de la deuxième famille. Les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaite avec $\sigma = v = v_L$.
5. **(2 point)** Puisque $\sigma = v_R = v_L = 1/2$, il s'agit bien d'une onde de la deuxième famille.

6. **(4 points)** On trouve

$$\nabla\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -\frac{q}{R}\mathcal{G} - q\frac{q-Q}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)\mathcal{G}' \\ \left(1-\frac{\rho}{R}\right)\mathcal{G} + q\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)\mathcal{G}' \end{pmatrix},$$

donc on prend

$$\mathcal{F} = q\left(1-\frac{\rho}{R}\right)\mathcal{G}\left(\frac{q-Q}{\rho}\right).$$

Dérivant une deuxième fois $\mathcal{S}$ on obtient

$$D^2\mathcal{S}(\mathbf{u}) = \frac{\mathcal{G}''}{\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{(q-Q)^2}{\rho} & Q-q \\ Q-q & \rho \end{pmatrix},$$

qui est définie positive si $\mathcal{G}$ est convexe.